

次の世代に何を伝えるのか

～今こそ「高い立場からみた初等数学」を～

河村 央也 (青空学園 管理人)

Hisanari Kawamura (Aozora Gakuen)

1 はじめに

私は、かつて公立高校に十数年間勤務し、その後いくつかの職業を経て、現在まで塾などで、高校生に数学を教えてきた。その一方で、1999年初秋からウェブサイト『青空学園数学科』([4])の制作と管理を行ってきた。

いろんな場で高校生に数学を教えていると、教える各内容の根拠をつかんでいくことと、高校数学の方法論をもっていることが必要で、それがなければ、教えることを全うできないことを痛感した。それで、同じ思いをもつ教員や、自分で学ぼうという高校生、大学生の勉強の一助にと、みずから勉強したことを公開してきた。

青空学園数学科はまた、広く社会人に開かれた草の根数学の広場をめざしてきた。2000年5月になって『解析概論』の読書会をはじめた。数学をもう一度勉強したいと思いつつながらその条件がなく、そのままになっている人は少なくないはずだ。そんな人と読書の輪ができればと考え、同時配信メールを活用する読書会を企画した。数学関係の掲示板などで呼びかけ、10人も集まればはじめようと考えていたが、予想を超える400人以上の人が登録し、互いに教えあいながら『解析概論』を読み切り、すべての演習問題を解いた。その報告は文献([3])にある。その後もういくつかの数学書の読書会をおこなった。これもまた大きな経験であった。

学校やその他の教育関係の場、そしてウェブサイトなどはすべて、生徒と教員、人と人の出会う場である。せめて出会った生徒には、学問としての数学を伝えたい。数学を通してわかる喜びを伝えたいし、根拠を問う批判精神を育ててほしいと願ってきた。そうして共有される生き方、考え方が数学にかかわる文化である。

実践先行で来たので、理論化できていないし、すべての資料にあたれたわけでもないが、これらの経験を踏まえて、教育数学の一側面としての高等教育における数学の規格について、高校での数学は本来どうあるべきか、そして大学初年級における数学に何が求められるのかという観点から報告したい。

2 人間にとっての数学

2.1 文明の方法

数学は現代文明のもっとも基本的な方法であり、同時に人間にとって一つの言葉である。文明とは、技術の発展段階によって規定される人間と世界との関係の総

体である。それに対して文化とは、その文明のもとで、言語や歴史と一体のものとして特徴づけられる人間が生きる形である。

人間はサルからわかれ長い長い時間を経て、力をあわせて働く生き物になった。人間はこの世界から糧を得るため力をあわせて働く。個の力をあわせることで、類としての力が生れる。力をあわせるために言葉が生まれた。言葉は豊かになり、世界を分節してつかむ方法になった。同時に、言葉によって、考えるということが可能になった。そして先に生きたものの智慧を次代に伝えることができるようになった。

人間は働き、そしてそのことを省みる。言葉がそれを可能にした。今日の労働は昨日より疲れるとか、この石を持ちあげるのはあの石より楽だなど、体感しうる労働量の比較から量の認識がはじまる。また草木の実がなるまでの日にちも、朝放した山羊と夕方戻ってきた山羊の個数の大小も意識されていっただろう。

こうして量の仕組みに関する科学が育っていった。人間が、量についての認識とその言葉としての数、そして数の構造体の学としての数学を獲得してきた内的な発展過程は明確ではない。ただこのような道筋を経て数学が成立したことはまちがいない。

近代文明は商業をもってはじまり、そのとき代数学や幾何学が発展した。そのなかから発展してきた解析学は人類史の画期であった。世界を数学でつかむことに関して、まったく新しい段階をきり拓くものであった。産業革命はニュートン力学なしにはありえず、ニュートン力学は近代解析学なしには展開できなかった。このときから、数学はその文明を支える基本となった。

さらに現代文明は、ものごとすべてを数化してとらえたいうえで、その構造を解析しようとするところに、その本質がある。まさに、数学は現代文明を支える基本的な方法である。現代の人間がこの世界で生きていくためには、誰もがそれぞれ一定の数学を身につけなければならない。

2.2 第二の母語

数とその構造体の学としての数学は、この世界を量と数の面から分節してつかむ。世界を分節してつかむという点において数学は言葉と同じ働きをしている。

この意味で数学は第二の母語である。しかもこの母語は第一の母語によって表されるが、しかし他の言葉で表すことが可能である。それは、数学が、記号論理の言葉で書かれた公理系として再構築できることによって示されている。つまり、数学の言葉は翻訳可能であり、数学には普遍性がある。

数学はそれ自体として存在するが、存在するところは抽象された場である。それゆえに数学的な判断は論証による。数学は論証してはじめて存在する。ある数学的事実は何を根拠に成立するか。それを考える。本当か？ なぜなのか？ と考え

る。数学的事実を把握し、根拠を論証し、一見正しいことも根拠が明確でなければあくまで疑い、真偽を追求する。

だから数学を勉強することは、同時に、批判的論証の基礎訓練である。証明すること自体が近代の人間の必須の方法である。論述や弁証が典型的に用いられる数学を学び、結論の根拠を論述したり証明することを通して、筋道を立て結論を予測しそれを論証する力をつける。こうして、この文明のもとでそれに押しつぶされることなく生きるための基本的な方法もまた、数学を通して身につく。

つまり、言葉が、人間を一つの共同体に結びつけその規範の下で生きることを求める側面と、同時に人間の自立を支える基本をなすという側面があるのと同様に、数学もまた、第二の母語として、文明のもとでそれに適応して生きる方法であるとともに、この文明のもとで人間としての原理を失わず生きる方法を教えるという側面をもつ。

数学の土台が問われたデデキントやカントールの時代は、同時に近代文明が問われたときでもあった。その後、数学は数学としての深化と展開をなし、数学と世界の分離と統一の新しい段階に入っている。

文明に適応して生きるという観点からいえば、解析学の土台にある基礎概念を理解し、原理をふまえて微分や積分の計算ができ、これを使いこなすことが高校段階から大学初年級の数学の一つの目標である。

が、それ以上に、基礎的学習を通して、自然現象、社会現象を数学的方法を準備してつかむということそのものを知り、また量的な諸現象の数学的根拠を問うことで数学的世界を広げていくことを学ぶ。そして、これらを通して、大きな枠組を自分で設定し、根拠を問うことの大切さを知り、考える力をつける。これらが、より基本的な数学を学ぶ意義である。

言葉と数学のこのような働きがどのように意識され、また社会的に制度化されているかは、それぞれの文化によって異なる。あるいは、そのことがその文化を特徴づける。したがって、言葉の教育と数学の教育の有り様は、教育のあり方をもっとも端的に照らし出す。

3 高校数学の変遷

3.1 ある手紙

以上の観点をもって、この半世紀の日本の高校数学の変遷を省みる。まず、高校での積分の定義を意識的につかもうとしたものが、大学数学を学んだときにどのような混乱に直面するか、一つの例を提示したい。

2008年頃、青空学園で『解析基礎』を制作した。これは、実数の定義からはじめて微分方程式の基礎までを自己完結的に準備し、その上で、運動方程式から楕円軌道を導くところまで、自分の学習記録として書いたものである。現在の高校

解析の論の組み立てに疑問を持った教員や学生が、立ちかえって考えるための材料にしたいということが動機であった。

それに対して、2011年の3月、大学3年生のYさんからメールをいただいた。

僕は、理学部物理学科の3回生です。青空学園数学科の様々な記事を読ませていただき、心から感動しました。本当にありがとうございます。中でも特に感激したのが、「解析基礎」の記事です。僕は物理学科ですが、数学に非常に興味があり、数学科の授業をいろいろと履修しています。昨年、「ルベーク積分」の授業を受講しました。しかし、単位はとれたものの、理解したとは全く言えない状態でした。具体的には次のような疑問が残りました。

○測度のもつ性質がいろいろあって煩雑すぎる。本質はどれか。

○リーマン積分で成り立たないことがルベーク積分で成り立つのはなぜか。

○原始関数と定積分はどのように結び付くのかなどなどです。

いろいろなルベーク積分の本を読みましたがすっきりすることはありませんでした。しかしあきらめずに勉強を続けていると結局、

○面積（測度）はどのように定義されるのか。

○微分の逆演算がなぜ、定積分と関連するのか。

ここがわかっていないのだと気付きました。そんなとき、インターネットで青空学園の記事を見つけたのです。そこで、「定積分は微分とは独立に定義されるもの」という、僕にとって革命的な記事に出会いました。感動と悔しさに涙が出ました(笑)。

確かに、高校数学では、定積分を原始関数の差で定義しています。だから、原始関数が存在するかどうかなんて考えもせずに、定積分を計算します。僕もその一人でした。このことが、ルベーク積分がわからなかった根本の原因だったのです。計算方法の習得だけで根拠がわからなければ、やはりどこかで弊害が出てくるのですね。

今日、多くの数学教師はリーマン和の概念すら知らず、定積分の定義を強調しては教えない。高校生の多くは、定積分の定義を意識しては身につけない。それでも少数ながら「定義する」ということに自覚的である高校生はいる。それを大切に、それに答えうる教育でなければならない。ところが、彼らが定積分の定義を教科書の通りに理解すれば、大学数学と矛盾を来す。

メールの彼は、とにかく自力で日本の高校数学を乗り越えた。それができなくて、何となくおかしいと曖昧さを残したままの学生も多いだろう。これでは分野を問わず本当の基礎的な研究はできないのではないか、大きな問題である。

3.2 解析分野

少なくとも、1960年代の教科書ならYさんの混乱は起こらなかった。日本の高校数学はこの半世紀大きく変わった。次の諸資料によって、1960年代以降の日本の高校数学における解析と代数の取り扱い方の変遷を特徴的な点において確認する。

① 1965年教科書（数研出版）のI, IIB. ② 1969年教科書（日本書院）のI, IIB, III. ③ 1982年問題新集（科学新興社）の数学I, 代数・幾何, 基礎解析, 微分・積分. ④ 1997年教科書（数研出版）のI, A, II, B, III, C. ⑤ 2005年教科書（数研出版）の一部写し. ⑥ 2014年教科書（数研出版, 啓林館, 東京書籍）I, A, II, B, III.

- 1) 1965年, 1969年のものでは, 数列の極限と無限級数の和までが数学IIBの範囲であった。極限の概念とその計算は数学IIBの多項式関数の微分においても必要で, ここまでを数学IIBに置くのは自然である。

面積の定義が, 小正方形による内からの近似, およびその極限としてなされる。その上で, 関数のグラフで囲まれる領域の面積が区分求積によってなされ, それを踏まえて区間を n 等分したリーマン和 $\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}i\right)$ の極限によって定積分が定義される。その定義にもとづいて, 定積分が原始関数の値の差と一致することが証明される。

数学IIIでは, 「微分法」において, 連続関数の最大値と最小値の存在を根拠に, ロールの定理を経由して平均値の定理が証明される。そして連続関数の最大値と最小値の存在は「知られている」と明記される。

定積分は, 任意の小区間についてのリーマン和の極限で定義される。そして定積分の平均値の定理を用いて, 連続関数に対して, 積分法は微分法の逆演算であることを示している。

- 2) 80年代に用いられた教科である基礎解析と微分・積分では, 数列の極限と無限級数が微分・積分に移行する。それを除くと, 平均値の定理と定積分の定義は60年代の方法をそのまま継承している。
- 3) 1997年の教科書はこれらと大きく変わる。平均値の定理が「微分法の応用」の「発展」として扱われ, 必須でなくなる。

数学IIで面積が無定義に用いられ, 関数のグラフと x 軸で囲まれる領域の面積を, x 方向で微分するともとの関数になることが示される。面積の微分が $f(x)$ となることを数学IIで示す。そしてこれを原始関数が存在する根拠に用いて, 定積分を原始関数の値の差で定義した。つまり, 積分を, 微分を前提として定義した。この定積分の定義は, 数学IIIでも変わらない。

- 4) 2005年には平均値の定理が証明なしに「知られている」として扱われるようになり、平均値の定理の根拠が示されなくなった。定積分の定義は、90年代のものがそのまま移行する。
- 5) 2014年数研出版では、平均値の定理が、「発展」において、1969年版と同様に、閉区間で連続関数が最大値と最小値をもつことを根拠に、証明がなされる。さらにこの根拠は「実数の本質に基づくものであり」云々の記述があり、改善がなされたといえる。他の教科書にこの記述はない。

一方、定積分に関して、2014年版では次のような記述が現れる。

$$\int_0^x f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x}{n} f\left(\frac{kx}{n}\right) \quad \cdots \textcircled{1}$$

歴史的には、定積分は①で定義された。

教科書の著者は、この記述で、本来これが定積分の定義であるということが言いたかったのかも知れない。しかし、この教科書の文面からは、かつてはこのように定義されていたが今は違う、と誤ったことが高校生に伝わる。あるいは、原始関数の値の差として定義する現行の定義の方が正しい定義であると高校生が誤解する。

また、2014年版では、面積をリーマン和で表すことは発展的解説の中で復活する。ところが次の記述がなされる。

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x$$

ここで $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a + k \Delta x$

定積分を、上のような和の極限として求めることを、定積分の**区分求積法**という。

まず、「求積」とは『解析概論』の第3章冒頭「28 古代の求積法」にあるように、一貫して面積や体積を求めることであった。ところがここでは定積分を求めることとされている。さらにまた、「定積分を和の極限として求める」と書かれているが、解析学の立場でいえば、これは右辺の和の極限が左辺の定積分の定義なのであって、一方から他方を求めるということではない。

さらに、実際に高校生がやることは、そしてまたこの教科書の例題にもあることは「数列の和の極限を定積分で計算する」ことであり、この記述とは逆である。これをまじめに読んだ高校生は、大きく混乱するだろう。

2014年は「必修」の部分に「発展」を繋ごうとした結果、記述の統一性が失われている。

以上、各時代の教科書の特徴点をあげた。1997年以降、リーマン和を定積分の定義とすることを避け、微分法を前提に定積分を原始関数の値の差で定義している。ここに現行の日本の高校教科書の特徴がある。その結果、「微分法と積分法は互いに独立に定義され、それが互いに逆の方法である」という基本定理の意義が隠され、記述はさまざまな矛盾や堂々めぐりを繰り返して混乱する。

解析学の方法は単純明快なもので力強い。すべてを実数論に根拠づけることができる。ところが、日本の高校解析の教科書は、理論構成が煩雑で力強さを失っている。論述も感覚的な解説に頼って命題が成立する根拠を問うことがたいへん弱い。そのため立ちかえるべき地点が見えず、よけいに理解が困難になっている。

実際に多くの制約の中で教科書をつくる困難は理解する。しかし、大学初年級の解析学と矛盾せずにつながるようにしなければならない。半世紀の教科書の変化は、日本の科学教育の混乱と衰退を象徴している。この間、日本の高校での微分法・積分法は衰退し続けてきた。このようなことでは、ますます科学離れが進み、若者の考える力が衰えていく。

3.3 代数分野

代数分野においては、代数方程式の「根」から「解」への変化がもっとも大きな変化であった。1970年代中頃に起こった。これは次のような変化を伴っていた。

- 1) 1960年代は、2次方程式論が2次関数論に先行した。その結果、高校生は、グラフの交点の存在を根の存在から理解した。

$b^2 - 4c > 0$ のとき、2次方程式 $x^2 + bx + c = 0$ は相異なる2つの実根 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$ をもつ。よって、曲線 $y = x^2 + bx + c$ は x 軸と異なる2点で交わる。

- 2) ところが、1997年版以降は、2次関数論が2次方程式論に先行する。2次方程式 $x^2 + bx + c = 0$ の根について、「解の存在」自体をグラフの交点の存在から説明する。また高校生はこのように理解する。

$b^2 - 4c > 0$ のとき、曲線 $y = x^2 + bx + c$ の頂点 $\left(-\frac{b}{2}, -\frac{b^2 - 4c}{4}\right)$ は x 軸の下方にあり、曲線は x 軸と異なる2点で交わる。よって、2次方程式 $x^2 + bx + c = 0$ は相異なる2つの実数解をもつ。

3) 1980年代は過渡期であり、用語「解」を用いながら、2次方程式論が先行し、それを根拠にグラフの交点の存在が示される。

もとよりこの2命題は同値であり、また代数方程式の根の存在が閉領域における連続関数の最大値最小値の存在定理から示されるのであるから、いずれがより基本的であるのかは、理論の段階による。

しかし、教育的には、存在を言うにはその根拠が必要であることを教えなければならぬ。ところが「なぜ交点が存在するといえるのか。その根拠は何か」と問うことは教えず、交点の存在を感覚的に理解して終わる。この方向に変わった。

連続関数の中間値の定理も、1980年代の微分・積分ではじめて現れる。しかし当初から根拠としての実数の連続性にはふれられず、その結果、大学での数学にはつながらぬ。

高校では根の存在を根拠に交点の存在を示し、連続関数の基本性質の明示までを高校でおこない、大学数学では、実数論や関数論を踏まえて代数方程式の根の存在定理を示す。このように高校数学から大学数学への発展がなされねばならない。

3.4 変遷の背景

この半世紀の高校数学の変遷の方向性を一言でいえば、根拠から示すべきところを感覚的な説明に置きかえてきたということである。しかし、それでは、わからないときに打ちかえる根拠がなくなり、質問された教員も答えることができない。生徒の側も考える力が育たない。こうしてますます数学がわからない生徒を増やしている。

なぜこのようなことが起こったのか。その背景は何か。大きく言えば、近代日本そのものが西洋の結果を受容するのに忙しく、根拠を問う余裕がなかったということがある。そのなかでさらに、1970年代に国家の教育思想において転換があった。

私は、1973年秋に教員になった。それから十数年間の職場や地域での仕事を通して、次のような教育観をもつことができた。

教育とは人そのものを育てることである。一人一人を人間として育てる。一人一人の人間を开花させる。そうして現れた人間のさまざまな力は、けっして個人の私物ではない。どんな力も多くの人々に囲まれ育まれてはじめて开花する。であるから、育まれた自らの力を、育ててくれたこの世間に返さなければならない。少しでも世に循環させてゆかなければならない。こうして人を育て、人に支えられる世でなければならない。つくづくこのように思う。

ところが同じ頃、日本の教育は大きな転換をはじめていた。中央教育審議会は1970年代「人的資源の開発」ということを言いはじめ、それは今日に続いている。「人的資源」とは生産活動に必要な労働力ということである。人を人として育てる教育から、人を資源として使えるようにする教育への転換である。この能力を開

発するのが教育だというわけである。教育を生産活動の一部とする考え方が表面化する。

もとより近代の学校制度は、産業技術を習得した人間の育成を目的にしている。その時代の文明とそれを支える技術を習得する場が教育機関であることは必然である。また、人間が何らかの生産につながることは、人間としての存在条件そのものである。だから仕事を求める人すべてに仕事を保障する。労働権を保障する。それが人間の尊厳を重んじるということだ。しかしそのことは、人間が生産の資源であるということの意味するのではない。

人的資源という観点が導入されることで、根拠を問ひ、方法そのものを考えるよりも、定められた方法によって正確に計算できるようにする、という方向に数学教育思想が変わった。根拠を問う批判精神より、感性的理解による現状肯定を重視する教育への転換である。それが一定の時間を経て教育現場に伝わり、そして教科書が変わってきた。この方向性は、脱ゆとりと言われる2012年以降も変わっていない。

ちなみに、私が働いた高校はいわゆる公立の底辺校であった。そのなかで地域のすべての子どもに高校教育を保障し、生きる力をつけようとやってきた。生徒も「わかる授業」を要求し、教員もそれに応えようとしてきた。しかし、このような高校をとりまく社会の変転の中で、ついに廃校になった。数学を教える技倆をつけてくれた職場であった。

大学において、一般教養課程がなくなり、早くから専門課程に入るようになったのも、同じ人的資源という観点が背景にあるのではないだろうか。

しかしそれでは、本当に何ごとかを深く考え、新たな枠組を生み出すような人間は育たない。それは先のメールが教えている。近年、日本の産業から創造が失われ、いくつかの分野では現実の衰退が起こっている。それは、人間を資源とみなす考え方が生み出したものである。ここに、現代日本の産業が創造性を失った根本原因がある。

人間は資源ではない。人そのものとして、まじめに働き、ものを大切にし、隣人同僚、生きとし生けるもの、たがいに助けあって生きてゆく。ひとりひとりの力は個人のものでなく、互いのものである。それが人間というものだ。そのとき経済は人間にとって目的ではない。あくまで方法であり手段である。そういう人間を育てなければならない。

4 わかる喜びの継承

4.1 「わかってにっこり」が授業の原点

1974年の新学期、担任したクラスで教壇に立った。授業をやっていて何かおかしいことに気づいた。クラスの何人かは分数の計算ができない。気づいてすぐに

分数計算も授業でやろうとしたが、今度はできる側の生徒たちから、分かりきったことに時間をさかずに先に進んでくれと反発を受けた。新米教師の私は大いに困り悩んだ。

そこで、分数計算ができるという生徒に聞いてみた。「分数の積が、分母と分母、分子と分子をかければよいのはなぜか。理由が説明できるか。」彼らも計算方法を知っているだけで、それには答えられなかった。そこで私は、いわゆる水道方式に依って、分数の定義に立ち返って、そこから四則計算の原理と方法に入った。

皆はじめての話ばかりで、よく聞いてわかってくれた。わかってにっこりした顔が忘れられない。はじめてクラスとしての授業ができた。教えることについて実に多くのことを学んだ。10年ほど前、卒業以来28年ぶりにその頃の教え子に再会した。すぐ昔の話になり「高校でもう一度分数を習うとは思っていなかったが、面白かった」など、よく昔のことを覚えていてくれた。

「ああ、そうか」という経験を通して、その人自身に変化する。それが人間の知るという営みであり、そこに喜びがある。まさに体でわかるという経験である。この経験を得る場こそ、授業の場である。人間というのは、わかるとうれしいし、この喜びは人間の本質的な喜びである。それが「学問としての高校数学」を生きた学問にする。「理解はできるが、納得できない」段階からの飛躍である。

「分数のできない大学生」という報告はよくあるが、問題はそこで教員が何をしたかである。その報告は少ない。私自身は、試行錯誤を経て、授業というのはこの喜びを体験する場なのだということを経験した。そしてまた指導方法としての数学教育の難しさと醍醐味、これを実地に経験した。

高校教員になって半年後のこの経験は、その後他のところで教えるようになっても生きている。問題を正しくつかみ、自分で考え、「わかって、にっこり」できる授業、これを指針にやってきた。それが学問としての高校数学である。これはまた、大学の基礎科目の講義についても言えることではないだろうか。

4.2 学問に対する態度を教える

最近の高校生は、一般的に言って、まず自分に今ある力でとにかく考えはじめるということが大変弱い。受験勉強の中で、これを使いこえ、より能動的な勉強法を身につけ、大学生や社会人となってからこそ生きる人生態度を身につけてほしい。このように考え、次のような勉強法を語りつつ、授業をしてきた。

- 1) **数学しなければ数学ができるようにはならない。**昔、自転車に乗れるようになったときのことを思い出してほしい。人が乗っているのを見てもそれだけでは絶対に乗れるようにはならない。自分で乗ると転けたりして痛い。しかしそこをのりこえるとかならず乗れる。

数学も同じである。ところが数学をやらずに問題が解けるようになりたいと考え違いをしている人が多い。勉強の基本は自分で考えることである。

- 2) **まず持てる力で考えよ**。勉強の途上で何か分からないことに出会ったら、まず、現在の自分の内部の力、自分の知っている方法で考えることである。何が問題であるかわかるまでよく読み、つかめたら自分で考える。

これを**内因論**の態度という。それに対して、すぐに例題に頼ったり、まだ習っていないからできないと放置したり、こういう態度を外因論という。内因論が身につけている人は、確実に力が伸びる。

- 3) **少ない原理・自由な応用**をめざせ。数学は暗記だというのはまったく違う。一つの原理、一つの理論を深くつかむ。そしてそれを自由に応用する。その方法論が「高校数学の方法」である。これを系統的に勉強するなら、必ず演習問題は解けるようになる。

- 4) **教科書を自分のものに**。君らは教科書が自分のものになっていると言えるか。その点検は、教科書に載っている公式や定理が自分で再構成できるかである。日ごろ使っている公式が自分で作れるか点検してほしい。これが土台である。教科書を鵜呑みにするのではなく、定義や命題を自分で再確認し、どの定義が基礎であり、そこからどのように定理や命題が導かれるのか、自分で再確認しよう。

- 5) **書かなければだめだ。手で考えよ**。1980年代前半から共通一次試験・センター試験がはじまり受験勉強から「書くこと(論述)」の比重が小さくなった。これはセンター試験の最大の弊害である。

これを自分で乗り越えよ。手で書いて考えると、書いている自分を見つめるもう一人の自分がそこに現れ、問題を立体的に考えることができる。そして、無意識に蓄えられてきたことを意識の場に引き出すことが出来る。

- 6) 「**分からない**」からあと5分。少し考えてすぐにあきらめていないか。問題をつかむ程度で終わっていないか。そこで提案したいのは、分からないとなったとき、そこで止まらずあと5分考えるということである。

問題を考えるという一連の作業の中で、「分からない」は終着点ではなく、そこが出発点なのだ。そう心得て、分からなくても、そこであきらめずにもう5分、10分考えてみる。

- 7) **黒板を写すな。ノートをとれ**。黒板を写すのは、自分で理解できているかどうかに関係なくできる。わかったような気持ちになるがそれだけである。

そうではなく、授業中も自分で考え続ける。それも手で考える。そしてわかったことをノートしていく。

- 8) **間違いに学べ**。数学の問題を解こうとすると、多くの場合、途中で止まるか、できたと思っていたのにまちがっていたか、いずれかになる。

そこでどのようにするかが大切だ。自分の予習ノートに×を入れてそのままにする人が多い。模範解答を見てなるほどと思い、それで自分の方法を捨ててしまう人がいる。しかしそれでは問題演習をする意味がない。自分の方法は、1) 不可能ではないが、複雑で、その結果まちがっていたり、途中で止まった。2) 問題をとらえきれず、この問題を解くことはできない。

このいずれかである。どちらなのか確認しなければならない。わからなければ質問せよ。そして間違いを掘り下げて解明し、ノートせよ。

これらのことは、言うだけでは伝わらない。まず教員自身が実践していること。これが前提である。教員自身が数学していなければならない。そのうえで、授業を通してこのような勉強態度を納得させることができるか、教員の技倆が問われる。生徒の前で、少ない原理から問題を解いてみせることなど、言うは易く為すは難しである。

学問としての数学に対する基本的な態度は、大学初年級においても重要であり、これをそれぞれの学生に任せるのではなく、目的意識的に伝え実践させなければならない。そうすれば高校生にも伝わる。次のような意見も寄せられた。

数学は、講師の方がおっしゃったとおり「分からなくてももう5分」考えているうちに数時間が経っていることもありました。それでも解けないことも多々あって、友達には「時間もったいない」と言われましたが、自分で試行錯誤することにより、解説を聞いたときの理解が深まり、また「ここまでは解けた」と自信にも繋がりました。

これは事実に裏づけられた言葉であり、私が言うよりも説得力がある。ぞうきんを絞ってもう一滴も出ないと思っても、もう一度力をこめて絞れば、さらに一滴は絞り出せる。このように、縁あって出会った生徒には、小手先の方法に頼るな。自分で考えろ、これを伝えてきた。

こうして私は高校と塾という二つの現実の場で高校生に数学を教えてきた。それらの仕事をしてきた時間はあわせてかれこれ30年になる。そして自分で作りだした青空学園数学科という仮想学園の場で、自分の考えにもとづいて高校数学を述べてきた。ときどきこんなメールも来るので、これも教育活動といえるかも知れない。

現在、先生の本が書かれた「高校数学の方法」を使って勉強している者です。最終学歴が中卒と言うこともあり数学がかなり苦手だったのですが、先生のテキストをコツコツやっていくにつれて苦手意識も薄れてきて、先日行われた駿台の京大実践模試の数学においては5完でした。ただ、テキストを何度も繰り返してやりすぎて、問題をほぼすべて覚えてしまい、次にどんな問題集を選ぼうかで悩んでいます。

周りに相談できる知人もなく、困り果ててメールを送らせていただきました。問題集およびその使い方についてアドバイスしていただけませんか。大変お忙しいとは思いますが、なにとぞよろしくお願いいたします。

仮想学園でのやり取りであるから顔は見えない。しかしこれに答えることもまた、大きな意味での教育の営みだろう。「高校数学の方法」を問題を覚えるくらいくりかえし勉強し、力をつけてくれたことは嬉しい。きっと中学校でいろいろあって高校に行けなかったのだ。あるいは高校が続けられなかったのだ。

それが、ここで学ぶことで数学への自信が付き、次の問題集を聞いてくる。生き直すきっかけをつかんだ。数学が生きる力となっている。さらに、こうして「方法」という問題意識が広がる。それが数学が根づくということではないだろうか。

4.3 わかる喜びを次代に伝える

自分のもてる力で考える。そのときはじめて、実は「わかってにっこり」が生まれる。自分の内の力で考えなくてどうして「わかった！」という喜びが生まれようか。一時期「面白いほどよくわかる」を売りにする参考書が流行った。そういう授業も予備校などで流行った。それは講師の側がすべてを語る授業である。確かによくわかるだろう。しかしそのようにして「面白いほどよくわかる」のでは、自分で考えて「わかった！」という経験はできない。

わかる前の苦しさを、かつてのわかったという経験を導きに、乗りこえる。一人一人にこの経験をさせること、これが授業であり講義でなければならない。そのためには、授業では、何が問題であるのかをいっしょに考え、問題をつかませる。これを重視する。人間は本当に問題がつかめたら、自分で考える。そのように導き、自分で飛躍するようにしむける。

どこまで語りどこで飛躍させるのか、その兼ね合いが難しい。これができるためには、生徒や学生がどこまでわかっているか、本人以上に教える側がつかめていなければならない。このようなことを考え、試行錯誤をしながら、教えてきた。大学生になって2年目、教育学部の2回生なった学生がその6月に次のような感想を寄せてくれた。

夏期と冬期で授業を受けたものです。先生の授業はとてもおもしろく、別解などをされたときは思わず顔がにやけたりしてしまいました(笑)。先生のところに通って本当によかったと今も思います。友人と話していても、塾が苦痛だった人が結構いますが、私は毎週通うのがとても楽しみでした。おかげで数学も好きになれたし、…。

何気ないことではあるが、このような事例の中に「わかる喜びの継承」がある。教育学の勉強をはじめ、高校3年のときの自分を思い出したのだろう。教育学部

このこの学生は、もし将来教壇に立てば、自分の経験がどこかで生きるだろう。これがわかる喜びの継承ということであり、数学文化の基盤をなすことである。

高校生には、このように、学問として正面から勉強し、わかる喜びを知ることが、結局は力をつけるいちばんの道であることも、強調してきた。大学生が高校生化しているといわれる中で、大学教育においても大切なことではないかと思う。

数学を先生におしえていただけて本当に良かったと感謝しています。

いつも先生は数学を心から愛していらっしゃるのだなと感じておりましたが、数学の素晴らしさに少しふれられたような気がします。努力を重ねれば必ず報われるのが数学であり、勉強であるのだなと改めて実感しました。これからさらなる努力を重ね、立派な医者になりたいと思います。

2013年春のこのメールはこの生徒自身の感受性の深さを表している。このように、自分で考え、自分でわかり、にっこりする。こういう教育が当たり前になること、それが数学が人々の間に定着することではないだろうか。2014年春には次のような報告がサイトの掲示板に寄せられた。

自宅浪人の末、京大文学部に合格した者です。青空学園の「高校数学の方法」、「整数の基本」、「確率の基本」を勉強させていただきました。どの本も難しく、完璧には消化しきれなかったです。しかし、学校では聞いたことのない「方法」という観点などから、数学の奥深さや論理の大切さを感じられたように思います。現役の時は0完だった二次試験も今年はほぼ3完することができました。

また、「勉強のすすめ」からも力をいただきました。たとえば「内因論」、たとえば「分からない、からあと5分」。うまくいかないときや、自分のこれからについて独りで考えるとき、この言葉に助けられました。数学は、いまだに僕にとっては難しいものですが、この一年間取り組んでみて、数学の問題の解き方だけではなく、様々なことを考えることができました。これからも、多くの困難があっても、しっかりと考えながら生きていこうと思います。本当にありがとうございました。

確かに、受けとめる高校生や卒業生はいる。どこの誰かはわからなくてよい。これが文化である。数学すること、つまり定義を理解し、命題の根拠を示し、自ら考え、計算し、そしてわかる喜びを知ること。これを伝えなければならないし、それは可能である。

5 高い立場からみた初等数学

5.1 初等数学の普遍性

「初等数学」とは何か。小学校の「算数」も中学・高校の数学も大学初年の数学も、そして専門的な現代の数学も、一つの文明における数学として、高い統一性がなければならない。そのうえで、専門化される前の、文明社会で生きるうえで必要であり、人間形成の土台となる数学のすべて、これが「初等数学」である。

数学教育とは第二の母語としての数学の習得を通して人間を育てることである。この立場に立てば、15歳から20歳の頃に学ぶべき初等数学の内容や、高校数学と大学数学の役割分担も、半世紀のうちにそんなに変わるものではない。

「初等数学」は普遍性をもつ。ところが、現代日本では、指導要録はたびたび改変され、教育内容も数年を経ずして入れ替わる。解析学は書き換えられ、複素平面や行列が現れたりなくなったりする。また体系性や定義・定理の相互関係などはまったく重視されていない。

この根底には人間を資源と見る人間観があり、数学を計算技術と見る数学観がある。これを批判し、第二の母語であり人間形成に不可欠な初等数学を再建する。それが次代に伝えるべき数学である。この視点が、数学にかかわるすべての者に求められているのではないだろうか。

5.2 初等数学の基礎づけ

そう考えるなら、いまこそ、100年前のクラインにならって、現代日本における『高い立場からみた初等数学』が必要である。高い立場から見るとは、とはどういうことか。それは何より一定の数学観のもと、何を根拠に何がなり立つのかを明確にし、初等数学を一貫した体系のもとにつかむ、これが高い立場ではないだろうか。

私は、高い立場からみた初等数学こそ教育数学そのものであると考える。「数学教育とは、出来上がった数学(カリキュラム)をどう教えるかを問題にするものであり、教育数学は教育の諸々の諸相から実際に数学者がかかわることの出来る部分を取り出す営為である」([1])と定義されている。

教育数学はまず第一に、初等数学総体の基本部分として、数えることと量ることの体系、つまりは、整数の定義から測度論までを一貫した体系で基礎づけねばならない。これが教育数学の根幹である。さらにその前提として、記述の言葉としての集合論をどのようにとらえるのか、明確にしなければならない。

そこから枝葉を広げ、それらを小学生から大学初年級まで、どのように振り分け、役割分担して、伝えるのか。一貫した教育方法論を確立し、その上で教育課程を組み立てねばならない。教育数学に隣接する分野として、新たな人間観に裏づけられた教育方法論もまた今日の課題である。

教育の場で語られ、教授されることごとについて、教える者はそれらの言明の根拠を、まず自ら理解し、生徒や学生にその問いかけ、必要なら分かりやすくかつ厳格にそれを示すことができなければならない。また、数学の基本的な考え方や根底にある思想を把握し、それをかみ砕いて伝えることができなければならない。その中味を準備するのが、教育数学ではないだろうか。

そして、初等数学の全体系を意識的につかみ直すこと、これが高等教育における数学の規格でなければならない。小学校から高校までの数学を裏づけている数学理論、それがすなわち教育数学であるが、その習得そのものである。これが高等教育における数学の出発であり、大学初年級の数学の不可欠の内容である。

5.3 教える者が学ぶ場

さらに、教育数学は、教えるもの自身が数学し、そしてわかる喜びを体験する場でもあらねばならない。わかる喜びを伝えうるためには、その前提として、教えるもの自らがわかる喜びを経験していなければならない。「わかった」という経験のないものが数学を教えるなら、生徒たちがわかる喜びを経験するように指導することは難しい。

「わかる喜びの継承」は文化である。授業など人と人が出会う場でわかる喜びを次代に伝える、ここに数学教育の根幹があり、それを可能にするのが教育数学である。これが教育数学の重要な役割である。つまり教育数学とは、わかる喜びの継承を根幹とする数学教育において、それに携わる者自身がそれを研究することを通して自らわかる喜びを経験する場でもなければならない。

以上、教育数学とは、第一に、初等数学の全体像を明らかにし、その各分野を現代の数学として系統的に基礎づけるものであり、第二に、それを学び研究し、数学教育に携わるもの自身がわかる喜びを知る場である。

教育数学を通して教員としての基礎的な技倆を向上し、生徒に生きる力としての数学を身につけさせ、彼ら自身にわかったという経験をさせる。そのような数学を準備する協同の取り組みがはじまることを願っている。

参考文献

- [1] 数学教師に必要な数学能力に関する研究，数理解析研究所講究録 1711
- [2] 教育数学の構築，数理解析研究所講究録 1801
- [3] ウェブ上に草の根数学の広場を！ 河村央也，数学セミナー (2006年6月号)
- [4] 青空学園数学科：http://www33.ocn.ne.jp/~aozora_gakuen/