

# 次の世代に何を伝えるのか

～今こそ「高い立場からみた初等数学」を～

河村 央也（青空学園 管理人）

私は、かつて公立高校の教員を十数年間し、その後いくつかの職業を経て、現在まで塾などで高校生に数学を教えながら、1999年初秋からウェブサイト『青空学園数学科』の制作と管理を行ってきた。青空学園数学科では、高校数学を学問として学び、力をつけようとよびかけ、高校数学を掘りさげることや、高校数学の方法論などを中心に、多くの制作物を公開してきた。

さて、教育とは基本的に次の世代に何かを伝えることである。ここでは数学を通して高校生、大学初年級の学生に何を伝えるのか、伝えられているのか、という観点で考えたい。

## 1 基本的な数学の事実を伝える

18～19世紀に見出された基本的な数学の事実を伝えることは、数学教育の基本であるはずである。ところが、日本の学校数学はこれに応えるものになっていない。

### 1.1 解析分野

日本の高校における解析分野は、この40年間につぎのような点が変わった。

1. 平均値の定理について。1969年には「微分法」のなかで連続関数の最大最小値の存在を根拠に微分の定義から証明されていた。1997年はこれが「微分法の応用」の「発展」として扱われ、2005年にはついにこれが証明なしに「知られている」として扱われるようになり、平均値の定理の根拠が示されなくなった。
2. 定積分の定義について。1969年には定積分を微分とは独立にリーマン和で定義していた。ところが1997年以降は定積分を原始関数の値の差で定義した。積分を微分を前提として定義した。
3. さらに原始関数の存在条件をたとえ十分条件でも示すことなく、定積分の定義に用いている。また、「区分求積法」を面積の定義ぬきに用いることによって、面積の存在を前提にした議論のみになっている。

これではやはり、18～19世紀に見出された基本的な数学の事実を伝えることができない。これを立て直してゆかねばならない。私は、その前提の基礎作業として、有理数を仮定した上で、完備な数体としての実数の定義から微分方程式の基礎まで準備し、その上で、運動方程式から楕円軌道を導くところまでを、自己完結的に書くとうなるかやってみようと思いつき、それを『解析基礎』として2008年秋から公開してきた。

それに対して、2011年の3月、大学3年生のYさんから『解析基礎』について、メールをいただいた(2011.03.08)。

僕は、理学部物理学科の3年生です。青空学園数学科の様々な記事を読ませていただき、心から感動しました。本当にありがとうございます。中でも特に感激したのが、「解析基礎」の記事です。僕は物理学科ですが、数学に非常に興味があり、数学科の授業をいろいろと履修しています。昨年、「ルベグ積分」の授業を受講しました。しか

し、単位はとれたものの、理解したとは全く言えない状態でした。具体的には次のような疑問が残りました。

測度のもつ性質がいろいろあって煩雑すぎる。本質はどれか。

リーマン積分で成り立たないことがルベグ積分で成り立つのはなぜか。

原始関数と定積分はどのように結び付くのかなどなどです。

いろいろなルベグ積分の本を読みましたがすっきりすることはありませんでした。

しかしあきらめずに勉強を続けていると結局、

面積（測度）はどのように定義されるのか。

微分の逆演算がなぜ、定積分と関連するのか。

ここがわかっていないのだと気付きました。そんなとき、インターネットで青空学園の記事を見つけたのです。そこで、「定積分は微分とは独立に定義されるもの」という、僕にとって革命的な記事に出会いました。感動と悔しさで涙が出ました（笑）。

確かに、高校数学では、定積分を原始関数の差で定義しています。だから、原始関数が存在するかどうかなんて考えもせずに、定積分を計算します。僕もその一人でした。このことが、ルベグ積分がわからなかった根本の原因だったのです。計算方法の習得だけで根拠がわからなければ、やはりどこかで弊害が出てくるのですね。

高校時代に、「定義する」ということに意識的であり、定積分の定義を教科書の通りに理解すれば、大学数学と矛盾を来す。彼は、とにかく自力で、日本の高校数学を乗り越えたのだが、そうはできないまま、何となくおかしいと曖昧さを残した学生も多いだろう。これでは基礎分野で本当の研究活動はできない。

## 1.2 代数分野

3年生の理系、行列の授業では必ずどこかで、2次ベクトルと行列に関する次の5命題は同値であることを示す。

- 1) 2つのベクトルは平行でない。
- 2) 2つのベクトルで作った行列の行列式は0でない。
- 3) 2つのベクトルで作った行列は逆行列をもつ。
- 4) 2つのベクトルを係数とする連立方程式はただ一つの解をもつ。
- 5) 任意の平面ベクトルは、その2つのベクトルで一意に表される。

このようにまとめ、証明しながら話すと、皆「そうか、なるほど」と納得する。ところが、日本の高校線型代数では、2年次のベクトルと3年次の行列に内的な繋がりがなく、ばらばらに教科書に現れ、統一されては教えられてこなかった。そしてこれを $n$ 次元に一般化するのが、大学の線型代数だ、と締めくくる。このように2次元を高校で、一般次元を大学で、という棲み分けは意味がある。これらのこともまとめておこうと『数学対話』『線型代数の考え方』などを作ってきた。ところが、2012年頃からの高校課程では行列自体が再び姿を消す！やはり日本の高校数学は、根本的な立て直しが必要である。

- 1) 根拠を示すべきところを、感覚的な説明に置きかえ、それがわかりやすくすることだと思いがちをしている。それでは、わからないときにたちかえる土台がなくなり、考える力が育たない。こうしてますます分数や関数のわからない生徒を増やしている。
- 2) 教えるものが体系と立ちかえる根拠をつかみ、その上で、高校範囲、大学初年級範囲と適切に割り振り、一体のものとして、伝えなければならない。

## 2 わかる喜びの継承を

### 2.1 「わかってにっこり」が授業の原点

1993年秋、はじめて教壇に立ったとき、授業をやっている何かおかしいことに気づいた。クラスの何人かは分数の計算ができない。気づいてすぐに分数計算も授業でやろうとしたが、今度はできる側の生徒たちから、分かりきったことに時間をさかずに先に進んでくれ、と反発を受けた。新米教師で大いに困り悩んだ。

そこで、分数計算ができるという生徒に聞いてみた。「分数の積が、分母と分母、分子と分子をかければよいのはなぜか。理由が説明できるか。」彼らも方法を知っているだけで、それには答えられなかった。そこで私は、いわゆる水道方式に依って、分数の定義に立ち返って、そこから四則計算の原理と方法に入った。

皆はじめての話ばかりで、よく聞いてわかってくれた。わかってにっこりした顔が忘れられない。はじめてクラスとしての授業ができた。教えることについて実に多くのことを学んだ。10年ほど前、卒業以来28年ぶりにその頃の教え子に再会した。すぐ昔の話になり「高校でもう一度分数を習うとは思っていなかったが、面白かった」など、よく昔のことを覚えていてくれた。

人間というのは、わかるとうれいし、この喜びは人間の本質的な喜びである。授業というのはこの喜びを体験する場なのだ、ということを経験した。この高校教員最初の経験は、その後受験生に教えるようになってからも生きている。問題を正しくつかみ、自分で考え、「わかって、にっこり」できる授業、これを指針にやってきた。それが学問としての高校数学である。これはまた、大学の基礎科目の講義についても言えることではないか。

### 2.2 数学することへ向けて生徒に言ってきたこと

最近の高校生は、自ら今ある力でとにかく考えはじめる、ということができない。そこで、次のような話をしながら、実際に考えることの大切さを訴えてきた。

自転車に乗れるようになるには、自分で乗らなければならない。「分からない」からあと5分。 黒板を写すな。ノートをとれ。 理解して書け。手で書いて考える。

等々である。そのなかで、次のような意見も寄せられた。

数学は、講師の方がおっしゃったとおり「分からなくてももう5分」考えているうちに数時間が経っていることもありました。それでも解けないことも多々あって、友達には「時間がもったいない」と言われましたが、自分で試行錯誤することにより、解説を聞いたときの理解が深まり、また「ここまでは解けた」と自信にも繋がりました。

これは事実裏づけられた言葉であり、私が言うよりも説得力がある。ぞうきんを絞ってもう一滴も出ないと思っても、もう一度力をこめて絞れば、さらに一滴は絞り出せる。このように縁あって出会った生徒には、数学はそのときもっている道具でまず考えることが大切だ。小手先の方法に頼るな。自分で考える、これを伝えてきた。

### 2.3 わかる喜びを次代に伝える

自分で考える。そのときはじめて、じつは「わかってにっこり」が生まれる。その喜びを知れ。

夏期と冬期で授業を受けたものです。先生の授業はとてもおもしろく、別解などをされたときは思わず顔がにやけたりしてしまいました(笑)。先生のところに通って本当によかったと今も思います。友人と話していても、塾が苦痛だった人が結構いますが、私は毎週通うのがとても楽しみでした。おかげで数学も好きになれたし、...

何気ないことではあるが、このような事例の中に「わかる喜びの継承」がある。教育学部の2年生になった6月にもらったメール。教育学の勉強をはじめて、高校3年のときの自分を思い出したのだろう。

高校生には、このように、学問として正面から勉強し、わかる喜びを知ることが、結局は力をつけるいちばんの道であることも、強調してきた。教える中で得たこのような経験をまとめ、これらもまた『青空学園数学科』で公開してきた。大学生が高校生化しているといわれる中で、大学教育においても大切なことではないかと思う。

自分で考え、自分でわかり、にっこりする。こういう教育が当たり前になること、それが数学が人々の間に定着することではないだろうか。そしてこれは、今の現実の教室のあり方とはずいぶん違ったものであることもおさえなければならない。

- 1) 日本の高校数学は、知識をしての数学をのみ教え、数学することそのものを教えない。
- 2) 数学すること、つまり定義を理解し、命題の根拠を示し、自ら考え、計算し、そしてわかる喜びを知ること。これを伝えなければならない。

### 3 今こそ『高い立場からみた初等数学』を

私は、いまこそ、100年前のクラインにならって、現代日本における『高い立場からみた初等数学』が必要だと思う。

私は、小学校の「算数」も中学・高校の数学も大学初年の数学も、そして専門的な現代の数学も、数学として高い統一性がなければならないと考えている。そのうえで、専門化される前の、文明社会で生きるうえで必要であり、人間の土台となる数学のすべて、これが「初等数学」である。

現代日本では、指導要録はたびたび改変され、教育内容もたびたび変わる。しかし、実は、15歳から20歳の頃に学ぶべき数学内容と高校と大学数学の役割分担も、この半世紀でそんなに変わるものではない。

このように考えているとき、私は「教育数学」に出会った。私は、教育数学は教えるもの自身が「わかる喜びを体験する場」でもあらねばならないと思う。つまり、教育数学とは、わかる喜びの継承を根幹とする数学教育において、それに携わる者自身がそれを研究することをとおして自らわかる喜びを経験する場、としての数学でなければならない。

実際には、「わかった、うれしい」という経験のない数学教師が増えている。学校にそのような余裕がないのも事実である。これを何とかしたい。まず、数学を教える自分がそのような勉強をしなければならない。ここにも、青空学園の動機があり、青空学園のいくつかの制作物はそのような私の勉強録でもある。

- 1) 初等数学を現代の数学として、系統的に基礎づける。
- 2) それを学び研究し、数学教育に携わるもの自身がわかる喜びを知り、それを教室で次の世代に伝える。

これはまた、逆にまた現代数学はこの社会での存在意義を獲得することでもある。そんな協同の取り組みがはじまることを願っている。