情報系工学部における線形代数

東京大学 室田一雄

1

情報系工学部の学生に数理的な手法の基礎となる数学の講義を 10 年程担当してきたが，線形代数を学ぶ際のポイントとして，次の 3 点を意識するように学生に対して言ってきた．

1. 行列は どのように 生じるか？ —システムの記述，微分方程式の離散化など
2. どのような 行列が 生じるか？ —大規模，疎行列など
3. 何を どのように 計算するか？ —ランク，固有値；数値計算法，Gauss 消去法など

2

線形代数の中心的な話題は，実数や複素数を要素とする行列やベクトルに関する方程式や固有値の理論であるが，情報系工学部では，この枠組みから少し外れたところにある内容も応用に直接結びつくという意味で重要である．具体的には，学部後期から大学院で学ぶべき項目として，例えば，以下のようなものが考えられる．

---

1. 行列とグラフ
   1.1. 行列と有向グラフ　1.2. 行列と 2 部グラフ
2. 非負行列
   2.1. 非負行列　2.2. Perron–Frobenius の定理　2.3. 確率行列　2.4. M 行列
   2.5. 二重確率行列
3. 線形不等式系
   3.1. 線形不等式の形　3.2. Fourier–Motzkin の消去法
   3.3. 線形不等式系の解の存在　3.4. 不等式系の解の構造　3.5. 線形計画法
4. 整数行列
   4.1. 単模行列 (ユニモジュラ行列)　4.2. 整数基本変形　4.3. Hermite 標準形
   4.4. Smith 標準形 (単因子標準形)　4.5. 線形方程式系の整数解
   4.6. 線形不等式系の整数性
5. 多項式行列
   5.1. 多項式行列とその例　5.2. 多項式の性質　5.3. 単模行列と基本変形
   5.4. Hermite 標準形　5.5. Smith 標準形 (単因子標準形)　5.6. 線形方程式系の解
   5.7. 行列束
6. 一般逆行列
   6.1. 一般逆行列とは　6.2. 最小ノルム型一般逆行列　6.3. 最小 2 乗型一般逆行列
   6.4. Moore–Penrose 型一般逆行列
7. 群表現論
   7.1. 対称性をもつシステム　7.2. 対称性と群　7.3. 群表現の性質

上に挙げた内容の位置づけについては，例えば，以下のように述べることができる．

「行列とグラフ」は，数値情報を捨象して構造情報だけに着目した手法である．非負行列の固有ベクトル (Markov 連鎖の定常分布) に関する理論に利用されるだけでなく，工学においては，大規模システムの分解や数値計算の効率化にも利用される．

「非負行列」は，実数に特有の性質である符号 (正と負) を加味した理論である．確率は非負であるから，非負行列の理論は，確率的手法の基礎となる．また，電圧を上げれば電流も増えるという類の単調性は，システムの特性を理解する際の最も基本的な概念の一つであるが，この種の単調性は非負行列の変種である M 行列の概念に対応する．

「線形不等式系」は，等式関係 (方程式) ではなく，不等式関係の理論である．不等式は最適化問題における制約式を表現するためなどに利用され，不等式の理論は線形計画法の理論的基礎を与える．数学的には，双対性とよばれる興味深い事実がある．

「整数行列」は，(実数ではなく) 整数を要素とする行列の理論である．数学的には「整除関係 (割り算)」が問題となる．工学においても，個数や人数を数えたり，化学反応を記述したりする際に整数が必要である．また，ネットワーク構造は整数行列と密接な関係をもつ．

「多項式行列」は，(実数や複素数のような数ではなく) 多項式という関数を要素とする行列の理論である．この場合にも「整除関係 (割り算)」が問題となり，数学的な構造は整数行列に似ている．工学においては，Laplace 変換を通じて多項式行列が登場する．微分方程式の数値解法 (動的システムのシミュレーション) や制御理論においては，多項式行列の理論が有用である．ここに挙げた内容をさらに深めた理論は，制御理論の現代的な道具として利用される．

「一般逆行列」は，長方行列や正則でない正方行列に対しても逆行列と似たものが定義できることを示している．統計学における回帰分析や構造工学などにおいて，変数と方程式の自由度が不整合の場合に多用される便利な道具である．

「群表現論」は，群論的対称性という要素を加味した線形代数の理論である．群論的対称性をもつ行列は，ブロック対角形に分解可能である．システムが (何らかの意味で) 対称であるという直観を数式の形にすることで，その特性を利用できるようになる．対称性に着目する手法は，物理，化学を始めとして，構造工学，最適化など多くの分野において利用される．

以上 (2013-11-23)