高等数学の教育において何を伝えるのか

河村　央也（青空学園）

2018 年は明治維新から 150 年の節目の年である．それは西洋式の数学が導入されて 150 年ということである．

大学での数学講義などにおいて，計算技術としての数学は多様に教えられている．しかし，現代文明の普遍的な方法としての数学が，その基本においてどれだけ伝えられ，問題をとらえる力として学生の身についているかは，今日改めて検証されねばならない．

私は，かつて公立高校の教員を十数年間し，その後いくつかの職業を経て，現在まで塾などで高校生に数学を教えながら，1999 年初秋からウエブサイト『青空学園数学科』の制作と管理を行ってきた．青空学園数学科では，高校数学を学問として学び，力をつけようとよびかけ，高校数学を掘りさげることや，高校数学の方法論などを中心に，多くの制作物を公開してきた．

その経験で得られた具体的な例をとおして，数学から何を伝えなければならないのかを考え，今の教育でそれがなされているかを見直したい．

前回の研究会では，定積分の定義についての教科書の変遷をたどり，今の教科書のその問題点を考えた．その後の改訂で，教科書によっては，$y = f(x)$ のグラフで囲まれる面積の x 方向の微分が $f(x)$ になることを書き，これを「微分積分学の基本定理」として紹介しているものも現れた．今後に注意したい．

いくつかの問題提起　この数年，日本の教育のもつ基本的な問題について，産業界からも提起されるようになった．特に，日本の技術における創造性の欠如が，産業界などからいろいろと発言されるようになった．中島聡 (ブロガー／起業家／ソフトウェア・エンジニア) さんが「日本にはなぜ iPhone が作れなかったのか？」と次のように言っておられる．

> 私個人が、ここ 10 年間で「ライフスタイルを変えるほどのイノベーション」と感じたもの、そして実際に毎日のように使っているものを列挙してみました。残念ながら日本製のものは一つもありません。
>
> アプローチの一番の問題は、このプロセスの中で働く人々の当事者意識の欠如です。それぞれの人は、与えられた仕事を「作業」としてこなしているだけで、そこに「魂」が込められていないのです。
>
> 商品の購入の際に、人の心を一番動かすのは、どんな機能があるか（WHAT）や、それで何ができるか（HOW）ではなく、なぜ自分はそれを持たなければならないか（WHY）という部分だ、という話です。

確かに，iPhone だけではなくさまざまの SNS や OS などで，世界で使われるもののなかに日本発のものはない．ものそのものを作ることに長けていても，枠組みや仕組みを作ることにおいて，問題意識も能力も欠如していると言いうる現状である．

1　$\epsilon - \delta$ 論法

なにより，なぜその理論が必要なのかを考えるということを，今の数学教育はやっているか．

この問題に関して最近次の経験をした．教えた生徒で国立大の薬学部の学生になったものが，1 年生の解析の授業で $\epsilon - \delta$ 論法を習ったが，何も分からないと言う．大学の先生はどう言っているのだと聞くと,「数学を専攻するもの以外は分からなくてよい」と言ったというのである．

それでその学生とは時間のあるときに，こちらで解説しようということになった．青空学園においている『解析基礎』にしたがって，次の順に話した．

数列の収束

(1) 高校数学の極限で,「近づく」とか「収束する」とかが，感覚的な表現であること．いかに厳密な表現で定義するのかが問題である．

数列 $\{a_n\}$ が数 α に収束することは，高校数学では「n がかぎりなく大きくなるとき，a_n は α にかぎりなく近づく」と理解し，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

と書き表す．だが「かぎりなく」というのはどういうことだろうか．これは必ずしも明確ではない．また,「$n \to \infty$」は「n がいくらでも大きくなる」と理解する．しかし「いくらでも大きくなる」もまた必ずしも明確ではない．

収束や極限値という概念の定義のなかの言葉にはこのように「無限」が潜んでいる．無限という概念は，人間にとって魅力あるものだが，危険も伴う．収束や極限値を「無限」を用いずに定義することはできないのか．

(2) 高校時代の論証に用いられた言葉を振り返り，それが「すべて」と「存在する」，および「ならば」でできていたことを再確認する．これらだけで「収束」を定義できないか考える．

(3) そこで数列の収束を次のように定義してはどうか．

任意の正の実数 ϵ 対し，$n > N$ なら $|a_n - 1| < \epsilon$ となる N が存在する．

この命題のなかには「かぎりなく」や「いくらでも」という言葉はない．

これをもとに数列和差や積に関する基本的な性質を証明することもやってみた．続いて連続関数の定義に進む．

実数の連続と関数の連続　関数の連続性や収束性を論述するためにも $\epsilon - \delta$ 論法を用いる．連続性の厳密な定義そのものが $\epsilon - \delta$ 論法を必要としている．

関数は実数の部分区間 I で定義されたものとする．実数の区間 I で定義され実数値をとる関数を f とする．f は集合 I から実数の集合 $\mathbb{R}$ への写像に他ならない．以下 f はこのような関数であるとする．

この区間で関数が連続であることを次のように定義しよう．

関数 $f(x)$ と区間 I の点 c がある．任意の正の実数 ϵ に対して，正の実数 δ で

$$|x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(c)| < \epsilon \qquad (*)$$

となるものが存在するとき，関数 $f(x)$ は $x = c$ で連続である，という．

少し時間をかければ，以上のことを伝えることが出来た．

$\epsilon - \delta$ 論法は，収束性を「すべて」と「存在する」という論理の言葉で論じる方法である．いわば無限を有限の言葉でつかむ方法である．数学的な現象を人間が論理の言葉でつかむうえで不可欠である．

$\epsilon - \delta$ がなぜ必要か，そしてそれをどのように定義するか，それをもとに基本的な性質を示すこと，これは必ず伝えることができる．数学専攻以外は要らないという言葉には，大きな問題があるといわざるをえない．数学教育の講義の中で，$\epsilon - \delta$ 論法についてこのように言われるかぎり，日本に iPhone が生まれることはない．

2　高校確率の混乱

高校数学の確率分野はたいへん混乱している．特に，2016 年からの改訂で混乱が広がっている．よく勉強している高校生から次のような疑問が寄せられた．

> 教科書では「独立な試行の確率」の冒頭に,「1 個のさいころを投げる試行と，1 枚の硬貨を投げる試行において，互いにその結果に影響を及ぼさない．これらの試行は**独立**であるという」などと書かれている．ここでいう「独立」と，2 年の教科書に出てくる「事象の独立」の「独立」は同じことなのですか，違うのか．
>
> 事象とは試行の結果であるから,「試行の独立」と「事象の独立」は同じことのはずではないのか．ところが，$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ という等式は,「独立試行」では，結果としてこれが成立すると書かれてるが,「事象の独立」ではこれがその定義になっている．結果なのか，定義なのか．

この質問は当然である．実際,「試行の独立」，あるいは「独立試行」という用語は，教育現場に混乱をもたらしている．ある教科書は「同じ状態のもとでくりかえすことができる」ことを試行の条件として書く．そのうえで「2 つの試行が互いに他方の結果に影響しないとき，これらの試行は独立である」と書く．そして独立試行では $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ となると，何の論証もなしに書く．一方，事象の独立は，積事象の確率が確率の積になることとして定義された．

手元にある 1969 年の実教出版の教科書では,「独立試行」の「独立」はこの手順の性質としてつけられた形容詞であって，1 回 1 回の確率的行為が独立という意味ではない．独立試行という概念は，事象の独立の一部でなければならず，またそうしてこそ，確率論の記述となる．

経験的な確率統計が高校数学で一般的である．数学体系としての確率は教えられていない．

> U を試行の結果の集合，つまり標本空間とする．U の部分集合全体の集合を $\mathcal{B}$ とする．これは事象の集合である．確率 p とは，事象 $A \in U$ に対し実数 $p(A)$ を対応させる関数で，事象 $A,\ B \in U$ に対し，次のことが成り立つものである．
>
> $$\begin{array}{l} (1)\quad p(A) \geqq 0,\ (2)\quad p(U) = 1 \\ (3)\quad A \cap B = \emptyset \text{ のとき } p(A \cup B) = p(A) + p(B) \end{array}$$

この確率の定義が現行教科書では，経験主義的な確率が満たす性質になっていて，定義としては教えられない．

3　数学の根づきのために

やはり，近代 150 年，西洋式の数学はまだこの日本の現場には根づいているとは言いがたいのである．では，少なくとも数学教育のそれぞれの場で関わるものが，自覚的につかまねばならないことはどのようなことであるのか．

(1) 何が定義であり何が結論であるのかという数学構造を考えさせる．高校確率の問題．

(2) 命題が成立する根拠を問うことをつねに行う．$\epsilon - \delta$ 論法の意義．

(3) 根拠が明確でないとき，定義から再構成するという問題を立てる．実数論．

(4) 考える対象としての集合をとらえ，その構造をつかむこと．あるいは構造を定義する．

これらを実際にやってみることが高等数学の教育である．そして，これは十分可能である．問題は．数学教育に携わるものの，そのための教育であり，ここに教育数学の実践的な意義がある．