大学における数学教育の問題点と工夫

大島利雄 (城西大学理学部)

1. はじめに

10 年くらい前の研究集会の折かなにかであったと思うが，大学の数学の教員達が数人集まった中での雑談で，ある私大の先生が「『数学の教師になりたい』とある学生が相談に来ましたが，その学生は九九も大きな数になると不確かで満足に出来ないのです」と嘆いていた．学生のレベルがあまり高くない大学だが，それにしても学生も非常識ではないかと私は思った．

5 年前に私は東大を定年退職し，城西大理学部数学科に移った．城西大のキャンパスは埼玉県の坂戸市にあり，私が移った年に理学部数学科は学生定員を 80 名から 120 名に増やして，学生定員を 60 名ずつに分け，東京の紀尾井町に新築された建物に紀尾井町キャンパスの理学部数学科が創設された．私は紀尾井町キャンパスが主勤務先であったが，初年度は 1 年生のみだったので坂戸にも講義に通った．また大学院の講義は昨年度までは坂戸で開講した．紀尾井町での卒業生は昨年が最初で，私は大学院に入学した中の 2 名の指導教員となり，今年度の大学院の講義は紀尾井町で行った．

大学の数学教育は，線形代数と微積分が基本であるが，城西大ではそれらは必修で，キャンパス毎の定員 60 名を 2 クラスに分け，各クラスは線形代数，微積分共に週 2 コマ（=3 時間）の講義（演習を含む）が 1 年次と 2 年次前半まで続く（微積は，2 年後期まである）．実際の人数は，定員以上の入学があったり再履修生がいるので，1 クラスは 30 名より多くなるが，他大学に比べると 1 クラスの学生数は少ない方であると思う（初年度は入学者数が 200 人越えで多かったが）．

城西大に移っての一週目の紀尾井町での講義は，まだ新築の建物の教室が使えなかったので，別の建物の講堂で数学科新入生全員への講演であった．私は「理学部の理は，ことわり，とも読み，理学部は，物事がなぜそうなるかのことわり－理屈・原理－の理解・解明を目標としています」と始め，いくつかの例を話した．しかし，このことの困難性を以降に痛感することになる．

2. 数学教育の実情

城西大に移った初年度の数学科入学生は 200 人越えであり，卒業後に中高の数学の教師を希望するものが大半（百何十名か）であった．新入生の半分弱が紀尾井町キャンパス所属であった．それほど多くの者が希望を叶えることは不可能なのは明かであるが，九九や分数の計算で頭を悩ます学生はいないようなので，先ほどの私大に比べれば，よりレベルの高い教育が可能であろうと思った．

週 2 コマの線形代数のうち 1 コマは演習に当てることが多い．問題を出し，演習の時間に解答用紙に書いて提出する，という形式を多く行う．教科書などを見たり，分からないことを質問したりは自由である．対称行列の積が必ずしも対称行列にならないことに注意してもらおうと考え，対称行列の和は対称行列になりますか？ と問うた．「先生，こんな難しい問題は初めてです」と言われたので，「例で考えてみたら？」と言った（積の場合は，反例を挙げさせることを目指していたので）．しばらくすると「先生，これは証明ですか？」と言われたので，見てみると 2 行 2 列の各成分に具体的な数字を入れて対称行列になる例をひとつ書いていた．「この場合は，和は対称行列になりますね」と答えた．就任当初であって，（自分で考えて欲しいと思ったこともあり）それ以上アドバイスはしな

かった．正解と言えることを書いた答案はなかった．今では，これが学生にとってとても難しい問題であることを理解しているので，よりよい助言が可能と思っている．

離散数学では，フィボナッチ数列や（線形の）3 項間漸化式で与えられる数列の話を取り上げた．つがいの兎の話から，$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ の漸化式を導く説明をすると，「なるほど」と学生は納得するが，他の同様な問題では，自ら 3 項間漸化式を導くことが出来ない学生がほとんどであった．より簡単な漸化式で与えられる数列を与え，一般項を予想させ，それを数学的帰納法で証明する問題を試験に出した．学生は答のチェックをしないので，$n = 1,\ 2,\ 3$ のときに正しいかどうかを確かめよ，という問もその後に入れた．案の定，間違った一般項を書き，それを「数学的帰納法で証明」し，最後は $n = 1,\ 2,\ 3$ では成り立たない，と書いて平然と終わっている答案もあった．素直な学生が多いので，求められたことを素直に答える，という姿勢はある．

線形代数で，逆行列を計算させる問題では，大半の学生が正しく答えを出すが，その前に入れた問の「逆行列とは何か？」の正解は 5% にも満たない（答えは白紙か，明らかに間違った答ばかり）．今期行った解析学（2 年後期）では，べき級数を扱い，試験では具体的に与えたべき級数の「収束半径を求めよ」という問と，その前に「べき級数の収束半径とは何か？」を問うた．収束半径は多くの者が正解を得たが，後者を正しく答えたのは（甘くみても）2 名のみであった．

奇数を 1 から小さい順に n 個を並べて加えて $1 + 2 + \cdots + (2n-1)$ が n^2 になることを数学的帰納法で示せ，という問を多くのクラスで演習に出してみた．（分かっているかどうかは別として，甘くみて）正しい答案はクラスで 2〜3 名程度であった（1 年生と 2 年生）．あるクラスは，この演習の 1 週間前に，数学的帰納法の講義を受けていた，と後から聞いたが，現状はこのようである．

ウェブ上において，ある高校の数学の先生が「論理や数学的帰納法は入試には出題されないので，進学校では省いて教えない」と嘆いていた．またある塾の先生は「数学の問題は 5 分以上考えてはいけない．分からない場合は，答えを見て覚えなさい」と述べていた．

成績が上位で勉学意欲の高い 2 名の学生を今年度修士で受け入れて指導している．2 名には一緒に週 3 コマ（4.5 時間）程度のセミナーを実施している．当初，最後に一般的に数学的帰納法で示されていた定理を扱った．数学的帰納法の仕組みが理解できていないので，それを考えてもらい，帰納法の議論のみに 3 週程度かけ，やっと数学的帰納法が分かったように思う．最近では，線形空間 S と T があって，それぞれ 2 次元で具体的に基底を求め，$f : S \to T$ および $g : T \to S$ という線形写像を与え，$g \circ f$ と $f \circ g$ があるスカラー倍 C_α になることを示した（ここまでの計算はセミナーで院生が話した．S と T は具体的な線形微分方程式の解空間）．その後に「C_α が 0 でないときは，この線形写像は線形空間の同型写像となり，0 のときは，f も g も零写像でないので...」と書かれていた．この部分が分からないようで，理解に 11 月末から 1 月末の学期が終わるまでかかり，まだ完全には終わっていない（少しずつ理解を深めている）．すなわち，単射とか全射という概念が数学的に理解できていないので，その理解にこの程度かかっているということである．院生は「... です」と話すので，私は「何が ... なのですか？」と尋ねると，はっきり答えられないことが多い（90 分のセミナー中に 10 回以上，この問を発していると思う．論理的な日本語の文章表現に学生は苦労している）．

高校数学でも大学数学でもよいが，その中の一つでも卒業までに理解して欲しい，思っているが，院生をみても，それがとても難しいことが分かる．初年度入学の紀尾井町の学生の中に 1 人だけ，数

学は理解することが必要，と分かっていた学生がいたが，他はそうでなかった．大学院に入学してやっとそのことが分かってきたのが院生の 2 人で，大学 4 年間は無駄なことをしていた，と言っている．今年度の 4 年生のセミナーでは 8 人を指導している．3 名は高校教員志望, うち 2 名は 4 月から採用される予定で，1 名は浪人して教員を目指すとのことである．昨年度の 4 年セミナーで指導した上記の院生より数学的能力は劣っていて，高校の数学が理解できると言える状況ではない．

学生は，数学を学ぶ，とは問題の解き方の手順を覚えて，与えられた問題を解くことと思っている．数学は解き方が一通りで考える必要が無くて覚えればよいので，苦手な国語や他の理系よりも易しい，という考えで入学したものが大半である．数学教師の仕事は，問題の解き方を覚えて学生にそれを教えることと考えていて，理解することが必要とは思わないので，誰でも，そのときに努力すればできると考えているようである（最初に挙げた，ある私大の例も同様と思う）．高校で習った（はずの）数学の結果（定理や公式）について聞くと，忘れていたり分からない場合は調べて来るが，なぜそうなるか聞くと，それは習っていない，と学生は答える（それが真実かどうかは分からない）．

就任当初，古くからの城西大の教員からは以下のようことを聞いた（私には衝撃だった）．

– 「試験で，なぜなのかを問うてはいけない．答えられないから．もしそのような問題を出すなら，あらかじめその問題について，答え方を教えておく必要がある」

– 時間内に答えるのは無理な沢山の問題を出すこと「学生は解き方を覚えてきた問題しか手をつけない．覚えてきた問題を試験に出さなくて悪い成績をつけたら，意地悪な先生と思われる」

– 理解が困難な内容を教えていること「志村先生も，理解を求めるより，分からなくてもどんどん進めるのが効果的と書いている．易しくすれば，それに応じて学生が怠けるだけである」

– 文科省の指導に関して「役人はなにか仕事をしなくてはいけないので，そういうことを指示するが，それが実際に可能とは役人も考えていない」

3. 工夫

大学院生の指導では，基礎的なことをおろそかにせず，それの理解に重きをおいているが，1 年後に修論を書くことは十分に出来ると私は考えていて，欧文ジャーナルに投稿可能なレベルの修論もあり得ると思っている．そのような方向にいつ切り替えるかの判断が難しいところである．

城西大での 3 年目からは 3 年生の実解析を受け持つことになった（週 1 コマ，1 年間）．従来は「ルベーグ積分」が内容であった．1 年次に習うテイラーの定理が分かる学生が皆無なことに鑑み，フーリエ級数を扱う講義に変えた（ルベーグ積分を講義すべき，という意見の教員は複数いるが）．実解析では「関数の一次近似の誤差が二次微分で評価できる」ことの理解をまず目標とし（つまり，微分を理解して欲しい），「近似」をテーマとした講義を 1 年間の $\frac{1}{3}$ 程度行った．高校で習う三角関数表や 4 桁常用対数表の意味についての講義や演習を行い，昨年度からは計算尺の原理を話し，実際に学生がそれを作って自ら学ぶような授業を行った．これはある程度成功しているように思うので，来年度はさらに進める予定である．アナログでの理解のためにコンピュータを活用している（cf. 資料）．

学生の教育実習視察で中学高校へ行く機会が増えた．いろいろな学校があるが，今年度は，生徒のレベルがとても低い小中一貫校（公立）で, アクティブ・ラーニングを効果的に実践しているのを実際に見て，校長先生の話をうかがうなど，私はとても参考になった．