直線や平面の中にも別の世界が

蟹江　幸博（三重大学）

1.　2つのカルチャー・ショック

読んでいる君達にとって今は8月でしょうが，書いている僕には今は4月なのです．大学に入学した桜の季節に当時の僕が経験した2つのカルチャー・ショックについてお話することにしましょう．それは共に数学の講義で起こったのです．大学での最初の講義は偶々線形代数の講義でした．木造平屋の古ぼけた教室でした．僕は一番前の席に座って，大学の講義と言うものがどんなものだろうかという期待で，多分目を輝かして授業の始まるのを待っていました．多かれ少なかれ僕の同級生はそんな気持ちだったと思います．そんな僕達の気持ちを感じて居られたかどうか分かりませんが，Q先生は無造作に教室に入って来られました．しばらく何を言おうかと考えて居られるようでしたが，そのうち何を思われたか，黒板に「ベクトル」とだけ書かれ，「君達，ベクトルって知っていますか？」と尋かれました．誰も返事をしない．一番前の席で坊主頭を振り立てていた僕を指さして，「君，どう思いますか？」高校時代は優等生だった僕は，自分に可能な答えが決してQ先生を満足させないであろうことが分かっていても，こう答えざるを得ませんでした．「ベクトルって，大きさと長さを持っている…何かです．」この…に，青春の恥らいというものが感じられませんか？しかしQ先生は，恐らくは予期されていたであろうこの答を，さも見たくないものでも見たように，「それはそうなんですが…」それから，仕様がないなとでもいう風に，「ベクトルと言うのは，多次元の量のことです．」と言われた．一瞬静けさが教室に広がり，学生達は半ば呆然としてしまっていた．Q先生はそれを尻目に，ベクトル空間の公理を黒板に書いていかれた．チョークの音だけが響き，教科書のない授業が始まった．

2つ目は言わずと知れた ε-δ 論法で，実数論から延々と聞かされたものです．それが却って，高校数学の反動としてか心地よく感じられたものです．僕が入学した頃先生方の方針として，~~大学~~に入った途端のカルチャー・ショックは強いほど良いということのようでした．僕らはそれに乗せられた素直な学生だったのですね．しかし，それが高じてゲームかパズルのように ε-δ 論法を楽しんでいた僕達に，M先生が揺り戻しを掛けられました．「ε-δ 言うんは近似論なんやで，測定論でもあるし，何より誤差論なんや．」忘れ難い声の響きのM先生もやはり教科書のない授業でした．

カルチャー・ショックが幾分納まった一年生の夏頃に何人かの同級生とある解析の本の勉強を始めました．その本の前半が良い位相空間論になっていたのが僕らの原数学体験になったようで，僕は堅い幾何より柔らかい幾何の方が今でも好きです．平面や直線の中に限って，位相の問題を例や反例を交えながら述べてみましょう．大学における数学の抽象性の外見を少し，それを自分自身の感覚に馴染ませる試みを少し．

2.　反例を述べるためには偏見も必要

『この節は類型的で無味乾燥な位相空間論で，大学での数学の取っ付き難さの見本です．辞書の一種と思って，腹を立てないように．（紙数の都合で集合論は省略，知らない人も感じで分かる筈（？））

以下の『　』の中で当時の何人かの友人が出演してくれます．何人出て来るでしょうか．』

集合 X に位相 τ を与えるとは次の性質を持つ X の部分集合族 $\mathcal{O}$ を与えることである．

(O 1)　$X \in \mathcal{O}$，ϕ(空集合)$\in \mathcal{O}$．

(O 2)　$U_t \in \mathcal{O}(t \in T)$ ならば，$\cup U_t \in \mathcal{O}$．

(O 3)　$U_1, U_2 \in \mathcal{O}$ ならば，$U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$.

$\mathcal{O}$ の元を，位相空間 (X, τ) または $(X, \mathcal{O})$ の開集合と言う．

『どんな集合族ならこの条件を満たすんだろう？』

開集合の（X に於ける）補集合を閉集合と言う．閉集合全体のなす集合族を $\mathcal{F}$ と表すとき次の条件を満たす．

(F 1)　$X \in \mathcal{F}$，$\phi \in \mathcal{F}$.

(F 2)　$F_t \in \mathcal{F} (t \in T)$ ならば，$\cap F_t \in \mathcal{F}$.

(F 3)　$F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ ならば，$F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$.

『フーン，なるほど．閉集合族を与えても位相は定義出来るんだな．位相空間 $(X, \mathcal{F})$ と言うわけか．

位相を与えることは，近さの概念を導入することだって言ってたけど．ε-δ 論法の神髄が近似論だというのもよく分からんな．』

X の部分集合 U が点 a の近傍であるとは，点 a を含む開集合で U に含まれるものがあるときに言う．特に U が開集合のとき開近傍という．U が開集合であるのは，U の全ての点の近傍に U 自身がなっていることと同値である．

点 a の近傍の全体を点 a の近傍系と言い，$\mathcal{U}(a)$ と表せば，次の性質を満たす．

(U 1)　$U \in \mathcal{U}(a)$ ならば，$a \in U$.

(U 2)　$U_1, U_2 \in \mathcal{U}(a)$ ならば，$U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}(a)$.

(U 3)　$U_1 \in \mathcal{U}(a), U_1 \subset U_2$ ならば，$U_2 \in \mathcal{U}(a)$.

(U 4)　任意の $V \in \mathcal{U}(a)$ に対して，$U \subset V, U \in \mathcal{U}(a)$ を満たす U を適当にとれば，U の任意の点 b に対して $U \in \mathcal{U}(b)$ となる．

『沢山の近傍 $U \in \mathcal{U}(a)$ に属しているほど a に近い点と言うわけか．遠いとか近いとかいうのは主観の問題じゃないかと思うけど，うまく言うものだな．』

$\mathcal{U}(a)$ の部分集合 $\mathcal{U}^*(a)$ が点 a の基本近傍系であるとは次の性質を持つときに言う．

(U 1*)　$U \in \mathcal{U}^*(a)$ ならば，$a \in U$ である．

(U 2*)　$U_1, U_2 \in \mathcal{U}^*(a)$ ならば，$V \subset U_1 \cap U_2, V \in \mathcal{U}^*(a)$ を満たす V がある．

(U 3*)　任意の $V \in \mathcal{U}^*(a)$ に対して，$U \subset V, U \in \mathcal{U}^*(a)$ を満たす U を適当にとれば，U の任意の点 b に対して $W \in \mathcal{U}^*(b), W \subset V$ となる W がとれる．

集合 X の各点 x に $(U1^*)-(U3^*)$ を満たす集合族 $\mathcal{U}^*(x)$ が与えられたとする．集合族 $\mathcal{U}^*(x)$ に属する集合を含む集合の全体の成す集合族 $\mathcal{U}(x)$ は $(U1)-(U4)$ を満たし，従って X に位相を定義する．

『何が言いたいんだろう．同じことじゃないのかな．そうか，これなら与えるものが少しで良いんだよ．すると開集合を与えるのも節約出来るのかな．』

開集合族 $\mathcal{O}$ の部分集合族 $\mathcal{O}^*$ が $\mathcal{O}$ の基底であるとは，任意の開集合 $O \in \mathcal{O}$ が $O = \cup U_t \in \mathcal{O}^* (t \in T)$ によって表されるときに言う．即ち，任意の点 a と任意の $O \in \mathcal{O}$ に対して，$a \in U \subset O$ を満たす $U \in \mathcal{O}^*$ が存在するとき，$\mathcal{O}^*$ を開集合族の基底という．開集合族の基底 $\mathcal{O}^*$ は次の性質を持つ．

(O 1*)　任意の点 a に対して，a を含む $U \in \mathcal{O}^*$ が存在する．

(O 2*)　任意の $U_1, U_2 \in \mathcal{O}^*$ と任意の点 $a \in U_1 \cap U_2$ に対して，$V \subset U_1 \cap U_2, a \in V \in \mathcal{O}^*$ を満たす V がある．

開集合族 $\mathcal{O}$ の部分集合族 $\mathcal{O}^{**}$ が $\mathcal{O}$ の準基底であるとは，$\mathcal{O}^{**}$ の任意有限個の元の共通部分全体の作る部分集合族が $\mathcal{O}$ の基底になるときに言う．

集合 X のある部分集合族 $\mathcal{O}^{**}$ が，ある開集合族の準基底のなるための必要十分条件は次のものである．

(O**)　任意の点 a に対して，a を含む $U \in \mathcal{O}^{**}$ が存在する．

このとき $\mathcal{O}^{**}$ は開集合族 $\mathcal{O}$ を生成するという．$\mathcal{O}$ は (O 1)−(O 3) を満たし，$\mathcal{O}^{**}$ を含む最小の部分集合族である．

『これはまた節約できるもんだな．でも 0 個の集合の共通部分は空集合ということにしておかないとまずいな．共通部分の定義から良いと言うわけか．どの集合にも属す点の全体が共通部分なんだから．しかし節約すると，いつ同じ位相を決めるのかが問題か．』

集合 X 上の 2 つの位相 $\mathcal{O}_1$ と $\mathcal{O}_2$ が部分集合族として $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ がであるとき，$\mathcal{O}_1$ は $\mathcal{O}_2$ より弱い．または粗いと言い，$\mathcal{O}_2$ は $\mathcal{O}_1$ より強い，または細かいと言う．そして，$\mathcal{O}_1 \leqq \mathcal{O}_2$ と表す．$\leqq$ は集合 X 上の全ての位相の作る集合の上の半順序になっている．

集合 X 上の 2 つの位相 $\mathcal{O}_1$ と $\mathcal{O}_2$ がそれぞれ基底 $\mathcal{O}_1^*$, $\mathcal{O}_2^*$ によって与えられているとき，$\mathcal{O}_1 \leqq \mathcal{O}_2$ であるための必要十分条件は，任意の元 $W \in \mathcal{O}_1^*$ と任意の点 $a \in W$ に対して，$V \subset W, a \in V \in \mathcal{O}_2^*$ を満たす V が存在することである．

集合 X 上の 2 つの位相 $\mathcal{O}_1$ と $\mathcal{O}_2$ がそれぞれ近傍系 $\{\mathcal{U}_1(a), a \in X\}$, $\{\mathcal{U}_2(a), a \in X\}$ によって与えられているとき，$\mathcal{O}_1 \leqq \mathcal{O}_2$ であるための必要十分条件は，任意の点 $a \in X$ と任意の元 $W \in \mathcal{U}_1(a)$ に対して，$V \subset W$ を満たす $V \in \mathcal{U}_2(a)$ が存在することである．

『このままでも面白いんだけど，イメージ湧かんなあ．準基底の公理からみると幾らでも例は作れそうなんだけど．』

例1.　任意の集合 X に対して，$\mathcal{O} = \{X, \phi\}$ は位相を定める．これを密着位相という．

例2.　任意の集合 X に対して，X の全ての部分集合のなす集合族は位相を定める．これを離散位相という．

『離散位相だと任意の点にはその点だけからなる近傍が取れるから都会の孤独な社会で，密着位相だとどの点のどんな近傍も全体になってしまって田舎の皆親戚の社会と言うわけか．中間とものとしては X の任意の部分集合族（に必要ならば，X 自身を加えたもの）を準基底にした位相が作れるんだな．豊かな社会を作るにはどんなふうに選んだら良いかが問題という訳か．』

例3.　すべての実数の作る集合 $\boldsymbol{R}$ の部分集合族 $\mathcal{O}^{**}$ を

$$\mathcal{O}^{**} = \{(a, \infty), (-\infty, b) ; a < \infty, b > -\infty\}$$

とし，それを開集合族の準基底とする位相 τ_E を $\boldsymbol{R}$ のユークリッド位相といい，位相空間 $L = (\boldsymbol{R}, \tau_E)$ を（実）数直線という．

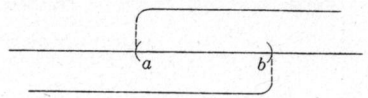

図 1

『τ_E の開集合族の基底はすべての開区間からなるものになっているし，どの数 a の基本近傍系 $\mathcal{U}_E(a)$ も a を含む開区間全体にとれる．すると 0 の基本近傍系 $\mathcal{U}_E(0)$ だけ与えれば，あとは a だけずらして $\mathcal{U}_E(a) = \mathcal{U}_E(0) + a$ と置けばいいことになるな．じゃあ，$\mathcal{O}_E$ でなくても，$\boldsymbol{R}$ の勝手な位相 $\mathcal{O}$ は 0 の基本近傍系 $\mathcal{U}(0)$ だけ与えれば，$\mathcal{U}(a) = \mathcal{U}(0) + a$ と置けばいいのか．嘘だな．0 に基本近傍を与えるときに $(U2^*)$ はいいとしても $(U3^*)$ は $\mathcal{U}(0)$ だけの条件じゃないからな．$\mathcal{U}(a) = \mathcal{U}(0) + a$ を満たす位相は一様位相というらしいぞ．成程．（名前が付いただけで納得してちゃいけないんのだが）

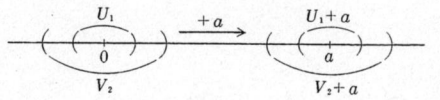

図 2

閉区間が閉集合なことは $\mathcal{O}^{**}$ の定義からすぐ分かるし，開集合でないことも難しくはないな．直線 L の開集合は互いに交わらない開区間の和として表されることも分かるよ．この感じは大切じゃないかな．無限個の開区間の共通部分が閉区間になることもあるんだから，開集合の公理 (O_3) もこの形でないといけないな．』

X の点 a が部分集合 A の触点であるとは，点 a を含む任意の開集合が A と交わることとし，A の全ての触点の作る集合を A^a と書き，A の閉包という．また A^a の定義を A を含む最小の閉集合としてもよいし，A を含む全ての閉集合の共通部分としてもよい．すると A が閉集合なら $A = A^a$ であり，逆に $A = A^a$ なら閉集合になる．閉包を取ると言う操作 ^{a} は次の性質を満足する．

(K 1)　$\phi^a = \phi$.

(K 2)　$A^a \cup B^a = (A \cup B)^a$.

(K 3)　$A \subset A^a$.　　(K 4)　$(A^a)^a = A^a$.

『こんなように操作を使っても位相を定義出来るんだね（Kuratowsky の方法）．補集合を取っても同じかな．操作主義の好きな人はこちらをどうぞと言うわけか．』

X の点 a が部分集合 A の内点であるとは，点 a を含む開集合で A に含まれるものがとれることとし，A の全ての内点の作る集合 A° を A の開核という．また A° の定義を A に含まれる最大の開集合としてもよいし，A に含まれる全ての開集合の和集合としてもよい．すると A が開集合なら $A = A^\circ$ であり，逆に $A = A^\circ$ なら開集合になる．開核を取ると言う操作 $^\circ$ は次の性質を満足する．

(I 1)　$X^\circ = X$.

(I 2)　$A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$.

(I 3)　$A^\circ \subset A$.　　(I 4)　$(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

閉区間 $[a, b]$ は開区間 $(a - 1/n, b + 1/n), n > 0$, の共通部分である．この様に，可算個の開集合の共通部分として表される集合を G_δ-集合という．（可算という数は，自然数全体の集合の元の数と思えば良

い.)数直線 L の任意の閉集合は G_δ-集合である．従って，任意の開集合は F_σ-集合，即ち，閉集合の可算個の和として表される．

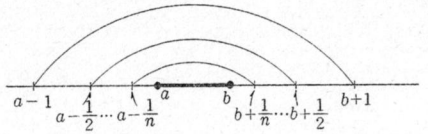

図3

$A^{\circ a}=A$ を満たす閉集合を正則閉集合と言い，$U^{a\circ}=U$ を満たす開集合を正則開集合という．$A=B_1\cup B_2, B_1=(0,1/2), B_2=(1/2,1)$ と置く．B_1, B_2 は

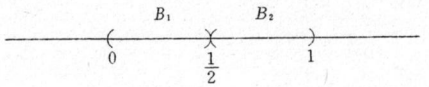

図4

正則開だが A は正則開ではない．$A^{a\circ}=A^{\circ a\circ}=(0,1)\neq A$，$A^{\circ a}=A^{a\circ a}=A^a=[0,1]$．また $(B_1\cap B_2)^a=\phi$，$(B_1)^a\cap(B_2)^a=\{1/2\}$，$(B_1)^{a\circ}\cup(B_2)^{a\circ}=A\neq(0,1)=((B_1)^a\cup(B_2)^a)^\circ$．一点は正則閉でない．

3. まだまだ続く退屈な講義

『この節は位相空間の作り方教室です．もう少し辛抱して下さい．』

位相空間 $(X,\mathcal{O}_X)$ から $(Y,\mathcal{O}_Y)$ への連続写像 f とは，集合 X から集合 Y への写像であって，Y の任意の開集合 U の原像 $f^{-1}(U)$ がまた X の開集合であるもののことである．

『つまり，$f^{-1}(\mathcal{O}_Y)\subset\mathcal{O}_X$．これは，$f^{-1}(\mathcal{F}_Y)\subset\mathcal{F}_X$ と同じだな．近傍系なら，X の任意の点 x と Y の点 $f(x)$ の任意の近傍 $U_{f(x)}$ に対して，$f(V_x)\subset U_{f(x)}$ となる x の近傍 V_x が取れるということになる．何と ε-δ 論法そのものじゃないか．』

例4. 集合 X と位相空間 $(Y,\mathcal{O}_Y)$ と写像 f が与えられたとき，X に f を連続にする最弱の位相を与える．これを，f によって $\mathcal{O}_Y$ から誘導された位相という．

『$f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$ を準基底とする位相を入れればいいんだけど，$f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$ 自身が(O 1)-(O 3)を満たしているようだな．だったら，$\mathcal{F}_Y$ でも $\mathcal{U}_Y(y)$ からでも一度に定義出来るし，^{a} や $^\circ$ を使ってもできるぞ．興奮しない，同値なんだから当り前だよ．』

例5. 位相空間 $(X,\mathcal{O}_X)$ の部分集合 A に包含写像 $i: A\longrightarrow X, i(a)=a$，から誘導された位相を相対位相という．このとき A を部分空間とも言う．ここで，$i^{-1}(U)=U\cap A$ に注意せよ．

例6. 有理数全体 $\boldsymbol{Q}$ は数直線 L の開集合でも閉集合でもないし，$\boldsymbol{Q}$ も無理数の集合 $L\setminus\boldsymbol{Q}$ も L で稠密 $(\boldsymbol{Q}^a=L, (L\setminus\boldsymbol{Q})^a=L)$ である．$\boldsymbol{Q}$ は G_δ-集合ではないが，F_σ-集合にはなっていて（1点は閉区間），それ故 $L\setminus\boldsymbol{Q}$ は G_δ-集合である．また $(\boldsymbol{Q}\cap(L\setminus\boldsymbol{Q}))^a=\phi\neq\boldsymbol{Q}^a\cap(L\setminus\boldsymbol{Q})^a=L$ となっている．

『相対位相でなら勿論 $\boldsymbol{Q}$ は閉だね．有理数 $\boldsymbol{Q}$ から実数を作るとき，$\boldsymbol{Q}$ のこの位相で完備化するんじゃなかったかな．それなら L の開集合族の基底として有理数を端点とする開区間 $\{(a,b); a,b\in\boldsymbol{Q}, a<b\}$ が取れるね．開集合族の基底として可算個のものを取ることが出来るとき，その位相空間は第二可算公理をみたすと言うから，L は第二可算なわけだ．』

例7. 位相空間 $(X,\mathcal{O}_X)$ と $(Y,\mathcal{O}_Y)$ が与えられたとき，直積 $X\times Y$ に2つの射影 $p_X: X\times Y\longrightarrow X$ と $p_Y: X\times Y\longrightarrow Y$ を連続にする最弱の位相を与え，直積空間という．

例8. $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^2$ に $(\boldsymbol{R},\tau_E)$ の直積位相を入れたものをユークリッド平面 E という．この位相も τ_E と書くことにし，普通のように (x,y)-座標を考えよう．

位相 τ_E は，座標軸に平行な辺を持つすべての長方形の内部を基底として定義したことになる．ここで長方形を正方形だけにしても基底になる．平面上の全ての円の内部も基底の条件を満たし，これで定まる位相が τ_E と同じなことは容易．

『面倒になると「易しい」と言うのが教師の悪い癖だ．位相の≦の条件から考えると，軸に平行な正方形の内部の点には，それを中心として正方形に含まれる円があり，どんな円の内点にも，それを中心として円に含まれる軸に平行な正方形があるということじゃないか．

それだと菱形全体を基底にしても良いし，楕円全体なんていうのでも良いな．勝手な凸の図形を持ってきて，それと相似なものの全体ぐらいでも良いんじゃないかな．凸でなくてもさ，2つの同心円の間に描いた閉曲線の内側の図形程度のものから始めても良さそうだね．』

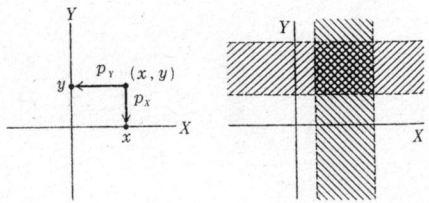

図5

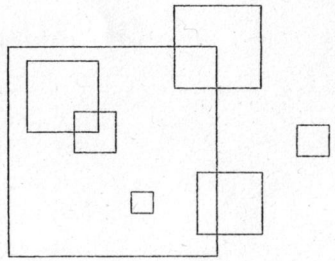

図6－1

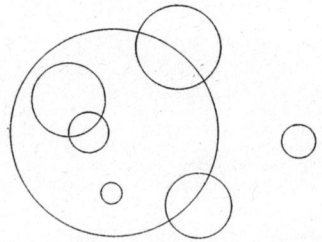

図6－2

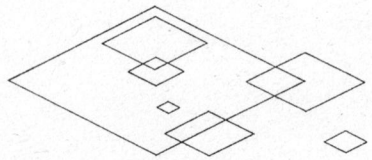

図6－3

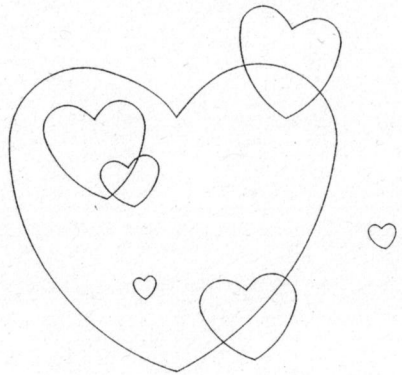

図6－4

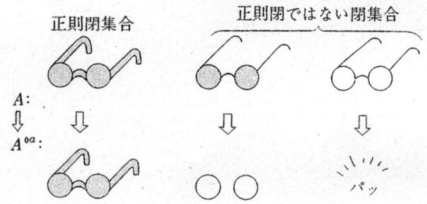

図7

4. 申し訳程度の3つの例

この節では数直線 $L=(\boldsymbol{R},\tau_E)$ とユークリッド平面 $E=(\boldsymbol{R}^2,\tau_E)$ が満たす位相空間としての性質を述べ，その性質を満たさない例を，$\boldsymbol{R}$ や $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合や，$\boldsymbol{R}$ や $\boldsymbol{R}^2$ に別の位相を導入することで考えます．以降，M は $\boldsymbol{R}$ か $\boldsymbol{R}^2$ のどちらかの集合を表すことにします．

命題1. (M,τ_E) はハウスドルフ空間である（分離公理 T_2 を満たすとも言う）．即ち，M の任意の2点 a,b に対し，点 a の開近傍 O_a と点 b の開近傍 O_b で，$O_a\cap O_b=\phi$ なるものが存在する．

a,b を中心とする区間または円で交わらないものが取れるのは明らか．

例9. M の有限部分集合の全体に M 自身を加えたものは，公理(F 1)-(F 3)を満たす．これを閉集合族とする位相を補有限位相 τ_f と言う（有限集合は τ_E で閉集合だから，$\tau_f\leqq\tau_E$）．位相空間 (M,τ_f) の任意の2つの空でない開集合は交わり，ハウスドルフではない．しかし，任意の2点 a,b に対し，点 b を含まない点 a の開近傍 O_a と，点 a を含まない点 b の開近傍 O_b が存在する．この性質を，(M,τ_f) は分離公理 T_1 を満たす，またはフレシェ空間であると

いう．

『$O_a=M\setminus\{a\}$，$O_b=M\setminus\{b\}$ と置けば良いからね．待てよ．一般に「フレシェ空間では1点だけの集合は閉集合である」ことが成り立つね．

これはザリスキ位相じゃないか．重要な位相なんだからキチンと導入して欲しいね．でも次元が高くなるとザリスキとは違うんだからさ．

雰囲気だけ』

例10． M の原点0を含まない部分集合の全体に M 自身を加えると，公理(O 1)-(O 3)を満たす．これを開集合族とする位相を除点位相 τ_{ep} と言う．（τ_{ep} と，τ_f や τ_E との間に大小関係はない．）位相空間 (M,τ_{ep}) の原点0を含む開集合は M のみなのでフレシェ空間ではないが，分離公理 T_0 は満たす．即ち，任意の2点 a,b に対し，点 b を含まない点 a の開近傍 O_a か，点 a を含まない点 b の開近傍 O_b のどちらかが存在する．

『でも分離公理 T_4 は満たすようだね．つまり，「任意の交わらない閉集合 A,B に対し，A,B の開近傍 O_A,O_B で，$O_A\cap O_B\neq\phi$ なるものがとれる」ということ．空でない閉集合は必ず原点を含むから，交わらない閉集合を考えると，片方は空集合になる訳か．

T_0 だけでは，点は閉集合とは限らないから，T_4 から T_1 や T_2 は出ないんだね．それで T_1 と T_4 の両方を満たす空間を正規空間と定義するのか．

T_0 も満たさないような空間があるのかな．密着位相を考えればいいさ．離散位相ならどんな分離公理も満たすのさ．ごもっとも．』

平面 E の2点 a,b に対して，区間 $[0,1]$ から E への連続写像 f で，$f(0)=a,f(1)=b$ を満たすものを，a と b とを結ぶ道と言う．

平面 E の部分集合 A を考え，A の任意の2点を結ぶ線分が A に含まれるとき A を凸であると言い，A の任意の2点を結ぶ道で A に含まれるものが存在するとき A を弧状連結であると言う．また，A が連結であるとは，（部分空間として），交わらない2つの空でない開集合の和に表すことが出来ないことを言う．

命題2． i）(M,τ_E) は凸で，弧状連結で，連結である．

ii）(M,τ_f) と (M,τ_{ep}) は弧状連結で，連結である．

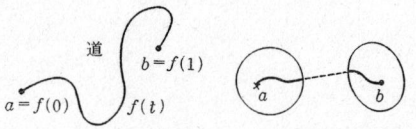

図8

『原点0とそれ以外の点 a に対して，$f(0)=0$，$f((0,1])=a$ とおけば，τ_{ep} では f は連続になって，0と a を結ぶ道な訳だ．でも (M,τ_{ep}) は弧連結じゃないんだよ．道の定義で f が1対1でもあることにしたものを弧ということにして，任意の2点を結ぶ弧がその中に取れる集合を弧連結と言うんだが，原点以外のどの点（開集合）の原像も1点であって，開集合になることはないからね．じゃ (M,τ_f) はどうかな？　連続体仮設を認めると弧連結だそうだよ．そんなことが関係するのかい？』

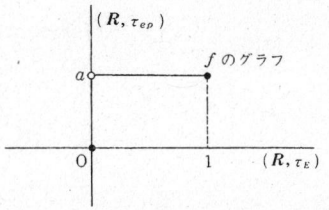

図9

命題3． (M,τ_E) の部分集合 A に対して次の性質は同値である．

i）A は有界閉集合である．

ii）（コンパクト性）A の任意の開被覆から有限の部分開被覆が取れる．

iii）（点列コンパクト性）A の任意の点列から収束する部分列が取れる．

iv）（可算コンパクト性）A の任意の可算開被覆から有限の部分開被覆が取れる．

v）（集積点コンパクト性）A の任意の無限部分集合には集積点がある．

vi）（擬コンパクト性）A 上の任意の（実数値）連続関数は有界である．

『定義のないのが沢山出て来たね．ある開集合族の和集合が A を含むときその族を A の開被覆といい，点 a はその任意の開近傍が a 以外に A の点を含むとき A の集積点という．点列 $\{a_n\}$ が点 a に収束するとは，a の任意の近傍に有限個の n を除いた全ての点列の点 a_n が入ってしまうときに言う．これでいいかな．(M,τ_E) の部分集合でない一般の位相空間の場合には，ii)→iv)，iii)→iv)，iv)→v)，iv)→vi)が成立ち，逆向きや→の関係のないところには反例があるんだ．i)の有界という概念は一般の位相空間では定義のしようもないね．何故かな．ii)からvi)の性質は A を相対位相で位相空間と考えたときの性質だと思えるということなのかな．(M,τ_E) 自身はコンパクトじゃないけれど，それに近い性質は持ってる．』

命題4． i）(M,τ_E) は可算個のコンパクト集合の和として表され（σ-コンパクト），任意の (M,τ_E) の点にはコンパクトな近傍が取れる（局所コンパクト）．

ii）(M,τ_{ep}) はコンパクトで点列コンパクトである．

iii）(M,τ_f) とその部分空間はコンパクトである．

『(M,τ_f) と (M,τ_{ep}) は共に第二可算じゃないけど，(M,τ_{ep}) は第一可算ではあるから，点列コンパクトになれるんだ．第一可算というのは，任意の点の基本近傍系として可算個のものがとれるということ．第一可算でコンパクトなら点列コンパクトだと言うのは一般に言えることさ．』

例11． (M,τ_E) のコンパクト部分集合の全体に M 自身を加えたものは，公理(F 1)-(F 3)を満たす．これを閉集合族とする位相を補コンパクト位相 τ_c と言う（有限集合はコンパクトでコンパクト集合は (M,τ_E) の閉集合だから，$\tau_f\leqq\tau_c\leqq\tau_E$）．位相空間 (M,τ_c) は T_1 だがハウスドルフでなく，連結でコンパクトである．第二可算でもあり，点列コンパクトである．

『この節は消化不良だね．でもこれより例を少なくすると教科書になっちゃうだろ．これじゃ幾何らしく見えないね．枚数超過なんだよ．本当はもっと色んな絵を描きながら色んな位相を入れて遊ぶ予定だったんだ．でも数学も楽しめるものといった感じは出てるだろ．無理矢理終らせた感じがするね．皆が勝手なことを言い出した．これは堪らない．逃げだそう．また今度ね．』

（かにえ　ゆきひろ）

マイコン用数式処理システム

muMATH 入門

古川昭夫 著　　B5判／定価2900円

いま話題の数式処理計算用のパソコン言語muMATH/muSIMPの入門的解説書．muMATHは何十桁もの数値計算，分数どうしの計算結果を分数の形で出せるほか，数式の処理（数値計算でなく）も可能．さらに圧巻は多項式の展開・整理，GCDの計算，三角関数の等式変形，有理式・初等関数の微分，Taylor展開，不定積分，数列の和，ベクトル・行列の演算(和・差・積・逆・行列etc)，方程式の解法，微分方程式の解などの処理もできます．これらの機能が詳細に解説されています．さらに，muSIMPによるプログラミングについても，具体的な数学の事例によって親切に解説されています．数学にかかわる学生・研究者に好適です．

数学の例題による

TURBO PASCALにも使える

PASCAL 入門

マグレガー・ワット著/竹之内脩 監訳

A5判／定価3800円

本書の目標は，読者がPASCALを使ってコンピュータ・プログラムが書けるようにすることである．初心者のための純粋な入門書となるよう意図されている．本書では，いくつかのストリング操作法と集合型とポインタの発展した使い方は，取り扱わなかったが，それ以外のすべてのPASCAL言語の仕様は取り扱っている．高校・大学教養部の数学を例にした親切丁寧なPASCAL入門書．

turbo PASCALの学習者には好適．

ディスク版やさしい統計学

PC－9801シリーズ15インチ2HD

対話型統計学習プログラムパッケージ

テキスト＝田畑吉雄　プログラム＝現代数学社作成

テキスト＋ディスク　セット定価9000円

現代数学社

〒606京都市左京区鹿ヶ谷西寺之前町1☎075-751-0727

ユダヤ人と現代文化

本田欣哉（立教大学）

20世紀の文化に最も強い影響を与えた学者は，マルクス（1818—1883），フロイト（1856—1939），アインシュタイン（1880—1952）の3人である．そろってユダヤ人であった．それは偶然なことだろうか．

この3人は，顔付きも違えば，性格も違い，また勿論，その学問の分野も全く違っている．けれども，彼等の学問的業績には，ある一つの共通の傾向がある．それは，高度本質主義である．対象の内奥にひそむ本質的なものを，高度に専門的な知識や技術によってつかみとるのである．より分りやすい実例をあげれば，1849年の脱疽菌の発見に始まる，種々の病気の病原体の発見，1910年のビタミンBに始まる，種々のビタミンの製品化，そしてかの原子爆弾の原理となった原子核分裂の連鎖反応の研究など，現代社会や現代文化における高度本質主義の偉力には，おそるべきものさえあるのである．

元へ戻って，資本主義経済機構のかくされた内部構造を明らかにしたマルクス，人間の心の内奥に巣くい，本人さえ意識していないが，実はその人の心理や行動に闇の中から重大な影響を与えている潜在意識の世界を発見したフロイト，この宇宙という時空間とそこでの物体の運動について，全く意外な真相を見出したアインシュタイン，これら3人の代表的高度本質主義者たちが，そろってユダヤ人であったのは，何故だろうか．

私が考える一つの理由は，ユダヤ民族が多年にわたり迫害されて来たことに関連している．ユダヤ人の学者が自分を売りこむためには，時代を先取りした，全く独創的でかつ強力な学説をかかげなければならなかったのではないだろうか．

しかし私は，もう一つの理由も考える．それは宗教の問題である．古代ギリシャの宗教は，多神教で，それぞれの神は，名前を持ち，個性を持ち，顔付きの特徴（たとえばゼウスの妻ヘーラーは‘牛の目をした’と形容された）さえ伝えられている．けれども，古代ユダヤ教は，一神教で，かつきびしく偶像を否定する．『旧約聖書』の「出エジプト記」には，‘汝おのれのために何の偶像をも刻むべからず’という，モーゼへの神の言葉が見られる．ユダヤ教の神は，人々の前に姿を現わさない‘不可知存在’であり，地上のいかなるものも，その似姿とはなり得ない．だから偶像を否定する．しかし一方，神はこの宇宙の最も本質的な力である．ユダヤ教は，宗教的高度本質主義を内包して居り，それが，前記3人の学者が高度本質主義のチャンピオンとなった，もう一つの理由のように思うのである．

（ほんだ　きんや）

BASIC 数学／1987（通巻242号）——— 目 次 8 月号 ——— 表紙／山本美智代

特集／反例で学ぶ数学

4　中学・高校数学の中の反例——田村三郎
9　解析学における反例——竹之内　脩
15　直線や平面の中にも別の世界が——蟹江幸博
22　逃げる学生・欠伸する学生に学ぶ——横地　清

64　muMATH でベルヌーイ数を求める——笠島友美
70　再帰図形を BASIC で描く／竜曲線——平井　徹

◇　◇　◇

35　線形代数の話／写像の大きさ測ってみよう——安藤四郎
44　クヴァント誌から／角度の評価——馬場良和訳
49　素数定理の歴史(2)——山下純一訳
55　積分論断章／諸々の収束の相関——岡安隆照
60　新しい微積分／極限と集積値——角田　譲
75　多変量解析法／生命表解析と比例ハザードモデル——高木廣文　服部芳明

◇　◇　◇

27　日常言語は不合理か——中島信夫
31　数学美へのアプローチ——古志秋彦
80　問題作りの風景／分数は重い——中沢貞治

◇　◇　◇

2　数学戯評／ユダヤ人と現代文化——本田欣哉
42　とはいうものの／今日は，JR さん——堀　淳一
83　数学の歴史／フェルマーとパスカル——タムラ・サブロウ　コタニ・マサオ
91　収穫と蒔いた種と／ひとつの手紙(7)——グロタンディーク　辻　雄一訳
82　ブックガイド——大塚道明
26　次号予告
92　エコーボックス