

比例の記号の変遷 – TOSM ポスト風信

数学セミナー 1月号 (2000.1.1), 2-5

昼下がり，わが輩と先生は，今日も縁側の下と上で居眠りをしていた．そこへ，お客さんですよと，奥さんの声．すぐ起きて行かないと，眠っていたことがわかってしまう．先生，やれやれ，と重い腰をあげた．行ってみると，来客ではなくて，手紙だった．

「長年，通信教育を事業として進めております「 \propto 」という記号の正式の用語名称をお教えてください．また，記号の出典は何でしょうか？」

「なんだ，ポストか．フニャフニャの記号～ねえ…ふーん」先生，どうも寝ぼけているようだ．うちの先生つねづね，算数や数学を教えることに困ったときには何でもお訊きと言っていて，ときどき見も知らぬ人から質問される．知ってる人だと，適当にごまかしているようだが，先生，見かけによらず気が弱くて，人見知りする質^{たち}なのだ．ぶつぶつ言いながら，調べものを始めた．当分相手をしてくれそうもない．わが輩は居眠りの続きと決めこんだ．

頭の上でがさがさという音がして，目が覚めた．書き上げた返事が，縁側から風で飛んで来たらしい．先生はと見れば，机に寄り掛かってお眠りだ．どれどれ…

先生の返事を覗いてみると

用語の正式名称というものがあるかどうかは分かりませんが，「比例記号」ということでよいと思います．

英語で考えてみても，数学史で有名な F. カジヨリが，《A History of Mathematical Notations》(数学記号の歴史)という本 [1] の中で，この記号について書いていますが，その節の見出しは Signs of Proportion と

なっています。ちなみに $A \propto B$ という式は A is proportional to B (A は B に比例する) という文章を表現したものです。

記号になるまで

さて、「比例」することを表現する記号が確立していくのにも長い歴史があったようです。カジョリの本を参考にして少し述べてみましょう。

記号による式の表示が確立する以前にも、比例を文章で表現することからの脱皮を試みた長い歴史がありますが、印刷以前の歴史は煩雑で今は手に負えません。

印刷されたものの最初のものはルドルフの教科書 Coss¹ のようで、シュティーフェル (1553) による再版には、

$$100 \mid \frac{1}{6}z \mid 100z \mid \text{Facit } \frac{1}{6}zz$$

というように、垂直の線で区切って、現在の記号での $100 : \frac{1}{6}z = 100z : \frac{1}{6}z^2$ を表わしているのが見つかります。しかし、例えば、タルターリアは数を扱った本 (ヴェネツィア, 1556) の中で

$$\text{Se } \mathcal{L} 3 // \text{ val } \beta 4 // \text{ che valeranno } \mathcal{L} 28$$

と書いているように、文章の多い表現も混在します。

その後、クラヴィウス²が『実用算術』(ローマ, 1583) の中で

$$9 . 126 . 5 . ? \text{ fiunt } 70 .$$

と、 $9 : 126 = 5 : 70$ のことを書いています。また、1699年にコラチャンが算術の教科書の中で、比例式を

$$\begin{array}{cccc} A & . & B & . & C & . & D & . \\ 5 & . & 7 & . & 15 & . & 21 & . \end{array}$$

¹1525年出版の、ドイツ初の代数学の教科書。

²グレゴリオ暦を作った人で、当時の指導的学者

と、 $5 : 7 = 15 : 21$ のことを 2 段に書いています。そのほか、シュヴェンター (1623) は $68 - 51 - 85$ と書いて、 $(51 \times 85)/68$ 、つまり、比例式の第 4 項を求めよという問題を提示していたり、ガリレオ (1635) も同様の問題を、具体的に積み上げ式に計算しています。ガリレオはまた別の本で、数を区分けするのに横線 $-$ でなく、点 $.$ や空白を用いたりしています。

これとは少し別の流れとして、例えば、オランダのヨハン・シュタンピオーエン (1639) は記号を使って、

$$a ., b \text{ gel} : b ., c$$

と書いています。今の記号では $a : b = b : c$ のことです。1601 年にランズベルギウスが

$$\text{ut } 5 \text{ ad } 10; \text{ ita } 10 \text{ ad } 20$$

と書いたのも、 $5 : 10 = 10 : 20$ のことを意味しています。これらは等比数列の一部という意識か、比例中項を求めるという意識かだろうと思われませんが、前後の記述がないので分かりません。また、イタリア人のミケランジェロ・リッチが、幾何の演習書 (1668) の中で

$$\text{esto } AC \text{ ad } CB, \text{ ut } 9 \text{ ad } 6$$

と書いてもいます。第 4 項が欠けていたり、第 2 項と第 3 項が同じであったりはしますが、式としてのちゃんとした表示まで後一步です。

オートレッドとウィングの記法

17 世紀前半に活躍したイギリスのオートレッドは、数式の表示や記号について大きな貢献をした人ですが、『数学の鍵』(ロンドン、1631) で、

$$5 . 10 :: 6 . 12$$

(今の記号では $5 : 10 = 6 : 12$) という書き方を導入し、これ以降の著書でもこの記法を採用していて、以降イギリスではこの記法が広く使われるようになります。

しかし、点「.」は色々な意味を持つことがあり、これはこれで不便なこともあります。例えば、小数点に「.」を使うことができません。

そのためイギリスでもこれを少し修正した記法が提案されます。すでに1651年にヴィンセント・ウィングが『天界の調和』(ロンドン, 1651)という天文書で $A . B :: C . D$ という記法とともに $A : B :: C : D$ という記法も使っています。この本ではもしかすると、タイプするときの間違いであった可能性があるというのですが、これ以降の著書でははっきりと $A : B :: C : D$ という記法に統一しています。

これ以降、オートレッドの記法とウィングの記法が優劣を競うことになり、少しずつウィングの記法が優位に立つようになります。中にはスイス人のジョン・アレキサンダーの『代数』(ロンドン, 1709)のようにオートレッド式の $a . b :: c . X$ を使ったり、 $a \bar{.} b : c \bar{.} X$ を使ったりしている例もあります。またこの本には、 $b \bar{.} a : d \left| \frac{ad}{b} \right.$ という書き方もあります。

例えばニュートンですら、1676年の手紙ではオートレッドの記法を、後の論文ではウィングの記法を用いたりしています。

一方ヨーロッパ大陸では、縦線を使ったものやタルターリア風の書き方に似たものが使われていましたが、一般的になりませんでした。

ルネ・デカルトは、1619-21年には $a|b||c|d$ という書き方をしており、1638年の手紙では $a|b|c|d$ と書いています。縦線で等比級数の各項を区分していく例は、スルジウスのホイヘンスへの手紙(1668-69)とか、ジャック・ド・ピリーの幾何の本(1643)に見受けられます。18世紀の初めの頃のデカルト主義者たちは $a|b||c|d$ の形を採用しており、ディドロの百科全書(1754)でも採られています。1701年にラ・イールが $aa||xx||ab$ と書いているのは、 $a^2 : x^2 = x^2 : ab$ の意味で、等比数列の3項を区切っている例と見ることも出来ます。

変わった書き方もいろいろあって、パリのピエール・エリゴーン(1644)は「 $hg \pi \quad ga \ 2|2 \quad hb \ \pi \quad bd$ は、 HG が GA に対するのは HB が BD に対するのと同じであることを意味する」と書いています。今の記号では

$hg : ga = hb : bd$ となり，相似比が等しいことを表しているようです．2|2 が「等しい」ことを， π が「比」を表しているのも面白いですね．

また，1659年のポーロニャのピエトロ・メンゴリーは， $a : r = a^2 : ar$ のことを「 $a; r : a^2; ar$ 」という書き方をしています．

ルーアンのA.ド・メルカテルの『算術』(1733)では，2,,3;;8,,12とあり，スペインのザラゴザの『算術』(ヴァレンシア，1669)では4.3:12.9とあり，ハンガリーのクレサの『球面三角法』(プラハ，1720)では $x...r :: r... \frac{rr}{x}$ や $AE..EF :: AD..DG$ という記号も見受けられます．

オランダのド・グラーフの本(アムステルダム，1694)では，2-4 = 6-12 と比例式を表し，ヨークは『算術』(ロンドン，1687)では125-429-10-? と書いていますが，後の本では33600 7 :: 153600 32 と書いていて，オートレッドとウィングの記号の争点である「.」と「:」を使わず，空白に代えています．

また，比と商とを区別する目的で，ジークは『算術』(ロンドン，1696)の中で，3-2 と書く代わりに $\frac{3}{2}$ と表しています．

オートレッドの . :: . という記法は大陸でもゆっくりと広まっていき，17世紀後半以降多くの人に用いられるようになります．

ド・ラ・カイユが『基礎数学講義』のラテン語版(ヴェニス，1762)で， $3.12 :: 2.8$ と $3 : 12 :: 2 : 8$ と $3 : 12 = 2 : 8$ と $3|12||2|8$ という4つの記法が一般に使われているが， $3 : 12 :: 2 : 8$ を用いると述べています．以降，イギリスとアメリカでは $: :: :$ が20世紀の始め頃まで一般に用いられ，今でも使われることがあるようです．なお，19世紀末までは，スペイン，ポルトガル，南米などでは，この記法が一般的でした．

ライプニッツですらオートレッドの記法を用いていたのですが，彼はじっくりと記号について考えることになります．その前駆として，シュタンピオーエンの『代数学』(1639)では， $A,, B = C,, D$ という記号も用いられていました．問題は $=$ を等号として用いるということ，比として等しいということに $=$ を使うということですが，普及はしませんでした．

イギリスでも、1668年にジェームズ・グレゴリーがパドゥアで出した幾何の本では比が等しいことに = を使っていますが、それに続く人はありませんでした。

ライプニッツの提案

1693年にライプニッツは比や比例に特別な記号を使うのはおかしいと述べています。比には商の記号で十分だし、比例に対しても比の等しさを表わすのなら、(ようやく認められるようになってきた) 等号「=」を用いない理由はない。比と商は同じ意味を持っているのだから同じ記号を用い、それが等しいという意味で、 $a : b = c : d$ とか $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ と書くべきだ、というのがライプニッツの主張です。1708年の『學術論叢』³は、 $a : b = c : d$ というライプニッツの記号が用いられた最初の印刷物ですが、その号に、それ以降の『學術論叢』の編集方針として、代数的な記号はライプニッツのものを使うと明言してあります。

ドイツのクリスチャン・ウルフはこれを採用し、1710年の教科書(マルデブルグ, 1710)ではまだオートレドの記号と併用していますが、1713年以降は一貫してライプニッツの記号を用いています。フランスではクレローの『代数学』(パリ, 1746)、サブリアンの『数物辞書』(パリ, 1753)、また1765年のパリ・アカデミーの出版物にも見受けられます。1727年という早さでオイラーがペトログラード・アカデミーの雑誌でも用いています。

1743年にはスイスで、1763年と1775年にオランダでこの記号を含む教科書が出版されています。もちろん、折衷の記号もあって、1768年のオランダの代数の教科書には $. = .$ という記号の出る例もありますが、消えてしまいます。

³Acta Eruditorum Lipsiensium 「ライプツィヒ學術論叢」ないし「ライプツィヒ学報」と訳すべきもの。1409年に設立されたライプツィヒ大学(ラテン名ユニヴェルシタース・リプシエンシウム)のオットー・メンケが、1681年の春ライプニッツに學術研究雑誌の創刊を相談し、翌1682年に創刊されたもの。第1号にライプニッツの論文が掲載されている。

1751年創刊の数物雑誌『スイス論集』の最初の巻にライプニッツの記号が使われています。アイルランドでは1770年，イギリスではやっと1812年にジョン・コールの『立体測角術』に採用されていますが，一般に普及するにはさらに1世紀の時間が掛かります。

ヨーロッパ大陸では19世紀には一般に採用されていますが，アメリカの19世紀は： :: ：が主流で，ライプニッツの記号が一般に普及するのは20世紀に入ってからのことです。

日本の場合，明治時代，主にドイツから学問を輸入したので，最初からライプニッツの記号を用いていたようです。

記号 \propto は廃物利用!?

比例式の記法にこんなにも長い歴史があったのですが，イギリスやアメリカで，変量の比例について使われることもあった記号が \propto だったのです。最初に用いられたのは18世紀末のことで，W. エマーソン『流率論』⁴によるものです。彼は「既にある共通の代数記号に，私は一般的な比例を表わすこの \propto という記号を付け加えたい。つまり， $A \propto \frac{BC}{D}$ は A が $\frac{BC}{D}$ と定数の比を持つことを意味する」と書いています。比例式の第4項が変量になっているという感じでしょうか。変量間の比例関係を表わすときに，固定した数量間の等式というイメージを避けるために作ったのでしょうか。その後イギリスで少しずつ普及していき，20世紀以降広く認知されるようになったようです。

ところで， \propto の左右を反対にした形の記号 $\supset\circ$ がデカルト『幾何学』（『方法序説』，パリ，1637の付録）の中に見ることができます。デカルトの

$$z \supset\circ b, \quad z^2 \supset\circ az + bb, \quad z^3 \supset\circ az^2 + bbz - c^3$$

などは方程式を表わしており，従ってこの記号は等しいことを表わしています。大陸では広く用いられたようで，ヤコブ・ベルヌーイも『推測

⁴W. Emerson, *Doctrine of Fluxions* (ロンドン，1768)

術』(死後出版, パーゼル, 1713)で等式にこの記号を使っていることは, ハイラー-ワナー [2] の第I章第1節最後の図版でも確認できます.

元々は, 等式は等しいという意味の言葉

aequales, aequantur, esgale, faciunt, ghelijck, gleich

やその略語を用いており, 多くの場合 *aeq* または *ae* という略号が使われていました. 2重母音 *ae* は *æ*, *æ* と書かれることも多く, これを図案化したものではないかと思われます.

エマーソンの頃, 既に等式にはリコードの記号「=」⁵が使われることが確定しており(イギリスでもあったからか), デカルトの記号 \sphericalangle は使われておらず, 廃物利用したいと思ったが, そのまま使うのではさすがに問題なので, 左右をひっくり返したのだったのかもしれませんが. 最後の部分は個人的な思い付きなので, あまり人には言わないで下さい.

この等号「=」についても, また, 質問を受けたときに最初僕が勘違いした相似の記号「~」についても面白い歴史がありますが, 今回はこれくらいにしておきましょう.

なお, 人名が沢山出てきて読みにくかったかも知れませんが, インターネットに簡単な紹介をしてありますのでご覧ください⁶.

先生はまだ眠っている

どうもえらく熱の入った返事だ. 質問の答えはたったの数行で, その他は好きなことを書いている.

そう言えば, TOSM ポストの質問はホームページの掲示板で受けていた筈だったが, 掲示板の具合が悪いことがあると手紙や電話でもくるら

⁵Robert Recorde 『才知の砥石』(*Whetstone of Witte*, ロンドン, 1557)において最初に印刷されている.

⁶アドレスは <http://www.com.mie-u.ac.jp/~kanie/tosm/analysis/jinmei.htm> です. ホームの <http://www.com.mie-u.ac.jp/~kanie/tosm/> から入れば, 質問を投函するポストの掲示板もあります.

しい。電話で訊かれても困るんだ，すぐに答えられるような質問は僕も面白くないし，せめてメールにしてくれとボヤいていたことがある。

以前はよく散歩についてやっていたが，先生，わが輩にだけだぞと言いながらボヤくことが多かった。

ポストも最近は面白い質問が少なくてな。他の大学の学生がレポートの答えを教えてくださいというのがあって，あれはショックだったな。俺は，真面目に算数や数学を教えている教師が，現場で起こってきた数学的な疑問を，解決できなかつたり，子供たちへの伝え方がわからないなんて場合に，お手伝いしようというだけなんだ。ボランティアなんだぞ。実際，けしからん！

わが輩に，そんなことを言ってどうなると思うのだろうか。そういうときには，顔を舐めてやることにしている。それで機嫌が直るのだから，先生も悪い人間ではない。

直方体の展開図の種類を小学校の先生に訊ねられことが切っ掛けのポストだが，質問もいろいろくるようだ。幾何の問題，有理数の問題，論理の問題，組合わせの問題，教え方の問題，歴史の問題，数学ゲームの問題……ハノイの塔が4本だったらどうなるか？なんて質問には，嬉しそうに何ヶ月か考えていた。答えられたんだったか，どうか。役にも立たぬことを考えるのが，好きなようだ。だから，ただ答えが欲しいだけという質問が嫌なんだろう。本を見れば載ってることをどうして俺に訊くんだって…，ありやあ怒っていたのか，拗ねていたのか。

まだ，寝ている。先生，近ごろお疲れで，わが輩と散歩に行くことも少なくなった。TOSMだTOSMだ，これからは直接現場の教師の支援活動をするんだと騒いでいた頃は，毎月のように岐阜だ福井だなんて出掛けていたが，御仲間もそれぞれ偉くなって，大学の仕事も学会の仕事も忙しくて相手にしてもらえないみたいだし。

それで暇になったかと言えば，ますます忙しくしている。あれはどういうものなのだろうか。春と秋の数学会のたびに，数学教育TFとか言って，開催地のまわりの高等学校の数学の先生との懇談会に参加している。

これも教師の支援活動だと思っているうちの先生とは別の考えの人もあるらしい。必要ではあっても、どこへ行くのか分からぬTF，蝶になれるのか分からぬ蛹のようなものようだ。

内緒のことかも知れないが，日本でも数学会 (MSJ) 以外の数学の学会を作った方がいいとか言っていたこともあった。MAAの向うを張ればMAJだ，マジだぞ！まじな話，数学会は数学者の相互扶助組織で，MAJは数学の普及と発展と地位の向上，という色合いの違うものがあった方がいいなんて言っていた。

長い付き合いのわが輩でも，説明抜きでは，知らぬことはわからぬ。MAA(Mathematical Association of America) というのは，アメリカの数学の団体だそう。会員の大半が高校の先生らしい。昔はアメリカの数学会 (AMS) と喧嘩していたようだが，今では仲直りして，両方の会長を歴任した人もいるそう。日本は，アメリカものの輸入でないと，新しいものは育ち難いから，それもいい方法だなと，失礼なことを言っていた。

「教育現場は教育以外のことが忙しい。ほとんどが学校運営や生徒管理。それも要らない仕事じゃないが，比重が重過ぎる。やはり，数学の教師なら数学が好きでないといけないよ。教えることより，数学が好きであっても良いくらいだ。大人の背中を見ながら育った子は大人になっていけるものだが，大人に向かい合うことだけで育った子は却って大人になることが難しいものだ。そんな数学好きな先生が教え方に悩むことがあったときになら，何を置いても協力したくなるだろう。それもあってTOSMを作ったんだがな⁷。

数学好きな先生でも，授業の準備や背景のための数学の勉強をしようとしても，時間もなく心を振り向ける余裕もない。それができるようにするには心の支えが必要だ。先生たちが堂々と入会できる数学の学会があれば，精神状態が浄化されるんじゃないかな。」

TOSM以外にも，数学の先生たちとの活動をしている数学者も相当い

⁷蟹江幸博『教育論壇-旗は揚げているのだが-』数学セミナー別冊「数学のたのしみ」4号(1997.12), 86-93にTOSM誕生の経緯がある。

るようで，大同団結の時期かもしれず，数学教育 TF を少しずつ拡大していく案もあるらしい．うちの先生，ほら話の内は威勢がいいが，実現しそうになると尻込みをする癖がある．

今日も居眠りの前には，これ以上忙しくなると死んじゃうぞ！と泣き言を言っていたのだ．

おっ，先生お目ざめだ．「おい，犬！散歩に行くぞ！」久し振りだ，付き合ってやるとするか．わが輩とて，先生を引き連れて土の上を走る方が好みである．先生の気鬱の治療にはこれが一番だ．犬はみな，何かしら社会に貢献しなければいけない．

では，出かけるか．えっ，わが輩に名前がないのかって？失敬なことを言うもんじゃない．わが輩には，先生にもない血統書があって，先生のよりずっと長い立派な名前がある．先生，ひがんで，覚えようとししないのだ．

参考文献

- [1] Florian Cajori: A History of Mathematical Notations, Dover (1993). Originally published by Open Court Publ., La Salle, Illinois, in 1928 and 1929.
- [2] E. ハイラー，G. ワナー 『解析教程 上下』(蟹江幸博訳) シュプリンガー・フェアラーク東京 (1997年)，Analysis by Its History, Springer Verlag(1996), by E.Hairer & G.Wanner.

参考文献

- [1] 伊原康隆 『志学 数学～研究の諸段階～発表の工夫』 シュプリンガー・フェアラーク東京 (2005)

- [2] 蟹江幸博 「臨床数学教育のすすめ」数学セミナー増刊『数学の教育を作ろう』(2002.10.30), 147-163.
- [3] —— 「10個の数で作る力学グラフ — 日本数学協会の発足に際して —」, 数学文化, 創刊準備号, 日本数学協会, vol.0, no. 1(2002.12), p.75-94.
- [4] 蟹江幸博 『孫と一緒にサイエンス 数って不思議!! ... ∞ 』近代科学社(2012年刊行予定)
- [5] ガリレオ・ガリレイ 『天文対話 上下』(青木靖三訳) 岩波文庫(1959)
- [6] 河合隼雄 『こどもはおもしろい』講談社 α 文庫(2005)
- [7] イアン・ジェームズ 『数学者列伝: オイラーからフォン・ノイマンまで, I~III』(蟹江幸博訳) シュプリンガー・ジャパン(2005, 2007, 2011)
- [8] 塩野七生 『我が友マキアヴェッリ: フィレンツェ興亡』新潮社(1987)
- [9] 塩野七生 『ルネサンスとは何であったのか』新潮社(2001)
- [10] 清水義範 『いやでも楽しめる算数』講談社(2001)
- [11] フェルディナン・ド・ソシュール (Ferdinand de Saussure) 『一般言語学講義: コンスタンのノート』(影浦峽, 田中久美子訳) 東京大学出版会(2007) (3ème Cours de Linguistique Générale, 1910)
- [12] 朝永振一郎 『物理学とは何だろうか? 上下』岩波新書(1979)
- [13] R・P・ファインマン 『ご冗談でしょう、ファインマンさん』(大貫昌子訳) 岩波書店(1986)

- [14] E. ハイラー, G. ヴァンナー 『解析教程 [新装版] 上下』 (蟹江幸博
訳) シュプリンガー・ジャパン (2006), 初版 (1997) . 丸善 (2012)
- [15] アルフレッド・レニイ (Alfréd Rényi) 『数学についての三つの対話
数学の本質とその応用』 (好田順治訳) 講談社ブルーバックス (1975)
(*Dialógusok a Mathematicáról*, Budapest, 1965)