

無限と有限と無限小と：略解

蟹江幸博●三重大大学教育学部

演習 1 (アキレスと亀)。

問題よりも少し一般にして考えてみる。アキレスの速さが亀の r 倍であったとする。計算を簡単にするため亀が分速 1m であるとしよう。

アキレスが亀の後方 rm のところにいた時点を $t_0 = 0$ とし、その時の亀の位置を $x_0 = 0m$ 、アキレスの位置を $y_0 = -rm$ とする（以下単位の m を省略）。第 n ステップでの時刻 t_n （以下単位の分を省略）は亀の位置 x_n と等しく、アキレスの位置 y_n は常に x_{n-1} に等しい。この差 $x_n - x_{n-1}$ をアキレスが進むのには $\frac{x_n - x_{n-1}}{r}$ 掛かり、次のステップまでに亀は $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{r}$ 進む。初期条件から $x_1 - x_0 = 1$ だから、

$$x_n - x_{n-1} = \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{r} = \cdots = \frac{x_1 - x_0}{r^{n-1}} = \frac{1}{r^{n-1}}$$

となり、

$$x_n = x_0 + \sum_{k=1}^n x_k - x_{k-1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{r^{k-1}} = \frac{1 - \frac{1}{r^n}}{1 - \frac{1}{r}}$$

となる。 $n \rightarrow \infty$ のとき、刻まれていった時は

$$t_n = x_n = \frac{1 - \frac{1}{r^n}}{1 - \frac{1}{r}} \longrightarrow \frac{r}{r-1}$$

に近づく。元の問題のように $r = 1000$ とすれば、 $1 + \frac{1}{999}$ 分後にはアキレスは亀に並んでいる。これはまた、

$$x = t, \quad y = -r + rt \text{ から } x = y \text{ とおけば } t = \frac{r}{r-1}$$

と、1 次方程式を解くだけでも得られる。どこにパラ
ドクスがあるというのだろう。

公比 $\frac{1}{r}$ が有理数なら、有限等比級数の和も無限等
比級数の和も有理数になって、有限な有理時間後にア
キレスは亀に追いついてしまう。どこに不思議がある
のだろう。やはり当時としては「有限の時間の中に、
無限の時刻を刻みこむことができよいのだろうか？」
ということだったのではないのだろうか。現代的には、
無限の操作を認めるかどうかという問題に転化してい
ると言えなくもない。それが古代からの通約不可能性
問題、つまり、無理数の存在と絡んだ興味を誘って、
一般の人々の理解と不理解の狭間あたりのグレーゾー
ンに位置するがために、いつまでも人の関心を引きつ
づけているのかもしれない。

演習 2 (アルキメデスの公理)。どんなに小さい正
数 $e > 0$ とどんなに大きな数 X に対しても、 $ne > X$
を満たすような自然数 n があることを示せ。

例解。要請 1 から、 $m-1 \leq X < m$ を満たす自然数
 m があり、式 (2) から $\frac{1}{n} < e$ を満たす自然数 n があ
る。したがって、 $X < m < m \times 1 < m \times (ne) = (mn)e$
となる。

逆に、この命題から要請 1 を導くことは容易である。
 $x > 0$ と 1 にこの命題を使うと、 $x < n1 = n$ を満た
す自然数 n があり、このような自然数 n には最小値
がある。

演習 3。どんな実数 α に対しても、どんな小さい正
数 $e > 0$ に対しても、有理数 $h < k$ で、 $h < \alpha < k$
かつ $k - h < e$ を満たすようなものがある。

例解。ヒントの通りに、 $e > \frac{1}{p}$ を満たす整数 $p > 0$
と、 $q \leq p\alpha < q+1$ を満たす整数 q をとる。これを p
で割れば、 $\frac{q}{p} \leq \alpha < \frac{q+1}{p}$ が得られる。

演習 4. 2つの実数 $\alpha < \beta$ に対し, $\alpha < h < \beta$ を満たす有理数 h が存在する.

例略解. $\beta - \alpha > \frac{1}{p}$ を満たす整数 $p > 0$ と, $q \leq p\alpha < q+1$ を満たす整数 q をとる. すると, $q < \alpha < \alpha + \frac{1}{p} < \beta$ となる, そこで, q を初項とし, 公差 $\frac{1}{2p}$ の等差数列を考えると, そのうちの1項は, 区間 $\left[\alpha + \frac{1}{2p}, \alpha + \frac{1}{p}\right]$ に入ることになる.

また直接, $\{h \in \mathbb{N} \mid q + \frac{h}{2p} \geq \beta\}$ の最小値 k をとって, $q + \frac{k}{2p}$ を考えれば問題の答を与えている. 自然数の空でない集合に最小値があることは数学的帰納法の言い換えと言ってもよく, 詳しくは, A.Ya. ヒンチン『数論の3つの真珠』日本評論社(2000)の附録にある, 筆者の解説を参照.

演習 5. (1) 数列 $\{a_n\}$ が収束するとき, 集合として $\{a_n \mid n \geq n_0\}$ が有界である.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0$ なら, どんな $n \geq N$ に対しても $a_n > \frac{a}{2} > 0$ をみたす N がある.

例解. (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ とする. 定義2から, ある数 N があって, どんな $n \geq N$ に対しても $|a_n - a| < 1$ を満たす. 集合 $I = \{a_i \mid i < N\} \cup \{a \pm 1\}$ の最大値 M と最小値 m をとればよい.

(2) 定義2から, ある数 N があって, どんな $n \geq N$ に対しても $|a_n - a| < \frac{a}{2}$ を満たす. ゆえに, $a_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$ となる.

演習 6 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ がそれぞれ有限の値 a, b に収束するとする. そのとき, 次の数列が収束し, 右辺の値に収束する.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm b_n = a \pm b.$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab.$$

(3) $b \neq 0$ であれば, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

例解. (1) 定義 2 から, 任意の数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある数 N_a, N_b があって, どんな $n \geq N_a$ に対しても $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ を満たし, どんな $n \geq N_b$ に対しても $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ を満たす. $N = \max\{N_a, N_b\}$ と置けば, どんな $n \geq N$ に対しても $|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ を満たす.

(2) 演習 5 (1) から, どんな n に対しても $|a_n|, |b_n| < M$ を満たす数 M がある. (1) と同じようにすれば, 任意の数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある数 N があって, どんな $n \geq N$ に対しても $|a_n - a|, |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}$ を満たす. だから, $|a_n b_n - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \leq |a_n(b_n - b)| + |(a_n - a)b| < 2 \frac{M\varepsilon}{2M} = \varepsilon$ を満たす.

(3) ヒントのように $a_n = 1$ とする. 演習 5 (2) から, どんな $n \geq N'$ に対しても $|b_n| > \frac{|b|}{2}$ を満たす N' がある. また, 任意の数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある数 N'' があって, どんな $n \geq N''$ に対しても $|b_n - b| < 2b^2\varepsilon$ を満たす. $N = \max\{N', N''\}$ と置けば, どんな $n \geq N$ に対しても

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b - b_n|}{|bb_n|} < \frac{2b^2\varepsilon}{2|b|^2} = \varepsilon$$

を満たす.

演習 7 (1) 数列 $\{a_n\}$ が有限の値 a に収束し,

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ であるとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm b_n = \pm\infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \operatorname{sgn}(a)\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

となる.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ ならば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$$

である.

例解. (1) a の符号が $\pm$ と同じなら, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm b_n = \pm \infty$ は明らか. $a < 0$ とする. 定義 3 から, 任意の数 $M > 0$ に対して, ある数 N があって, どんな $n \geq N$ に対しても $b_n > M - a + 1$ である. 演習 5 の証明から, 同じ N に対して, $n \geq N$ なら $a_n > a - 1$ としてもよい. そのとき, $a_n + b_n > (a - 1) + (M - a + 1) = M$ となる. $a > 0$ の時の $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - b_n = -\infty$ も同様である.

積の場合, $a > 0$ のときに, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$ を示す. 演習 5 (2) と定義 3 から, 任意の数 $M > 0$ に対して, ある数 N があって, どんな $n \geq N$ に対しても, $a_n > \frac{a}{2} > 0$ と $b_n > \frac{2M}{a}$ を満たすので, $a_n b_n > \frac{a}{2} \frac{2M}{a} = M$ を満たす.

商の場合. 任意に $\varepsilon > 0$ を与える. $M > \frac{|a| + 1}{\varepsilon}$ となるほど大きく数 $M > 0$ をとると, 演習 5 (2) と定義 3 から, ある数 N があって, どんな $n \geq N$ に対しても, $|a_n| < |a| + 1$ と $b_n > M$ を満たすので,

$$\left| \frac{a_n}{b_n} \right| < \frac{|a| + 1}{M} < \varepsilon$$

となる.

(2) の評価は (1) より易しい.

演習 8 (1) $P(n)$ を定数でない n の多項式とし, 最高次の係数を $a (\neq 0)$ とすると, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n) = \operatorname{sgn}(a)\infty$ となる.

(2) $P(n)$ と $Q(n) (\neq 0)$ を n の多項式とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$ を求めよ.

例解. (1) $\deg P = k$ として, $P(n) = an^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_{k-1} n + a_k$ と書くと,

$$P(n) = an^k \left(1 + \frac{a_1}{a} \frac{1}{n} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{a} \frac{1}{n^{k-1}} + \frac{a_k}{a} \frac{1}{n^k} \right)$$

となる. それゆえ演習 6 と 7 から, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} an^k = \operatorname{sgn}(a)\infty$ となる.

(2) $\deg P = h, \deg Q = k$ で, それぞれ最高次の係数を $a, b (b \neq 0)$ とすると, (1) から $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} an^h$, $\lim_{n \rightarrow \infty} Q(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} bn^k$ となり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^h}{bn^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{b} n^{h-k}$$

となる. つまり, a, b の符号と k, h の大小によって, $\pm\infty$ か $\frac{a}{b}$ か 0 になる.