

微分：定義と基本性質

蟹江幸博●三重大大学教育学部

演習 68.

(1) 有理関数 $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ の微分は、 $f(x)$ の表示によらない。つまり、 $f(x) = \frac{P(x)R(x)}{Q(x)R(x)}$ ($R(x)$ は多項式) の微分と一致する。

(2) 有理関数 $f(x), g(x)$ に対して、

$$(af + bg)'(x) = af'(x) + bg'(x) \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

が成り立つ。

(3) 整数 n に対して、

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

となる。

例解. (1) は本文にある。(2) については (1) のお蔭で通分することができるので、線形性は容易。積については、 $f = \frac{P}{Q}$, $g = \frac{S}{T}$ とおくと、

$$\begin{aligned}(fg)' &= \left(\frac{PS}{QT}\right)' = \frac{(PS)'QT - PS(QT)'}{(QT)^2} \\ &= \frac{(P'S + P'S)QT - PS(Q'T + QT')}{(QT)^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'g + fg' &= \frac{P'Q - PQ'}{Q^2} \frac{S}{T} + \frac{P}{Q} \frac{S'T - ST'}{T^2} \\ &= \frac{(P'Q - PQ')ST + PQ(S'T - ST')}{Q^2T^2}\end{aligned}$$

と一致する. 商については $\frac{1}{f} = \frac{Q}{P}$ について

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

示せばよいが, 右辺は

$$-\frac{P'Q - PQ'}{Q^2} \frac{Q^2}{P^2} = -\frac{P'Q - PQ'}{P^2}$$

となり, 左辺と一致する.

(3) $n \geq 0$ のときは既に表示されているので, $n = -m < 0$ のときに示せばよい.

$$(x^n)' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = - = nx^{n-1}.$$

演習 69. 関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であると
する. そのとき, 次が成り立つ.

- (1) $\varphi(a)$ は $f(x)$ のみによって定まる.
- (2) $f(x)$ は $x = a$ で連続である.

例解. 本文にある.

演習 72. 関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で微分可能であり,
 $z = g(y)$ が $y = b (= f(a))$ で微分可能であるとする.
そのとき, 合成関数 $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$
は $x = a$ で微分可能で, $x = a$ での微係数は

$$h'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

で与えられる.

例解. 本文にある.

演習 73. 関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で微分可能であり,
 $f'(a) \neq 0$ とする. $x = a$ のある近傍 $I = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$
で全単射であれば, その逆関数 $x = f^{-1}(y)$ は $y =$
 $b (= f(a))$ で微分可能で, $y = b$ での微係数は

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

で与えられる.

例解. 仮定から,

$$f(x)-f(a)=\varphi(x)(x-a) \quad \Leftrightarrow \quad x-a=\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)}$$

であり, 逆関数の言葉に書き換えると

$$f^{-1}(x)-f^{-1}(b)=g(f(x))-g(b)=\frac{1}{\varphi(f^{-1}(y))}(f(x)-b)$$

となる. $f'(a)=\varphi(x)\neq 0$ だから, $d_{\frac{1}{\varphi(f^{-1}(y))}}$ は $y=b$ で連続である.

演習 74. 上の議論のギャップを補え. [ヒント: $k \rightarrow 0$ だからといって, $z = \frac{1}{k} \rightarrow \infty$ となるとは限らない.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x} = e$$

を示して, 定義 14 を使え]

例解. 連続性の議論から,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e$$

を示せばよい. 収束性は演習 23 の後の議論をまねればよい. そこで,

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

を示せばよいが. これも演習 23(1) から,

$$1 > \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{n}{n^2} = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

となることから分かる.

演習 75

(0) $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$ のグラフを描け.

(1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(2) $\cosh' x = \sinh x$, $\sinh' x = \cosh x$,

$$\tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

(3) (加法定理)

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

本文にあるように, e^x の性質を使って計算するだけ.

演習 76

(0) $\cos x, \sin x$ は周期 2π の周期関数で,

$$\cos 0 = 1, \sin 0 = 0, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0, \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$(1) \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$(2) \cos' x = -\sin x, \sin' x = \cos x.$$

(3) (加法定理)

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

本文にあるように, 本書では第 11 回で示すが, 高校の教科書で復習しておいてください.

演習 77

$$(1) (\sqrt[n]{x})' = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}.$$

$$(2) (x^{q/p})' = \frac{q}{p} x^{\frac{q}{p}-1} \quad (p(\neq 0), q \text{ は整数}).$$

$$(3) (\log |x|)' = \frac{1}{x}.$$

$$(4) a > 0, a \neq 1 \text{ に対し, } (\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}.$$

(5) 任意の実数 a に対して $x > 0$ に対するべき関数 x^a は微分可能で, $(x^a)' = ax^{a-1}$ である.

例解. (1) $y = \sqrt[n]{x}$ とおけば, $x = y^n$ であり,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{y}{ny^n} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}.$$

(2) $y = x^{q/p}$ とおけば, $y^p = x^q$ であり,

$$py^{p-1} \frac{dy}{dx} = qx^{q-1},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{p} x^{q-1} (x^{q/p})^{1-p} = \frac{q}{p} x^{q-1+(1-p)q/p} = \frac{q}{p} x^{\frac{q}{p}-1}.$$

(3) $x > 0$ のとき, $y = \log x$ と置けば, $x = e^y$ となり,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

$x < 0$ のとき, $y = \log -x$ と置けば, $-x = e^y$ となり,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{-e^y} = -\frac{1}{x}.$$

(4) $y = \log_a x$ と置けば $x = a^y = (e^{\log a})^y = e^{y \log a}$ となり,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{(\log a)e^y} = \frac{1}{x \log a}.$$

(5) $y = x^a$ と置けば $\log y = a \log x$ となり,

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{a}{x},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay}{x} = \frac{ax^a}{x} = ax^{a-1}.$$

演習 78

(1) 上の 5 種類の対応が 1 対 1であることを示し, 関数のグラフを描け.

(2) $\operatorname{arcsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $\operatorname{arccosh} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

(3) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

(4) $(\operatorname{arcsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. $(\operatorname{arccosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
 $(\operatorname{arctanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$.

例解. (1) は実際にグラフを描けば, 容易に確認される.

(2) $y = \operatorname{arcsinh} x$ と置くと, $x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$ となり, $e^y > 0$ に関する方程式

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

を解けば,

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

が得られる. $\operatorname{arccosh} x$ の場合も同様.

(3) $y = \arcsin x$ と置くと, $x = \sin y$ となり,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$\arcsin x$ も同様. $y = \arctan x$ と置くと, $x = \tan y = \frac{\sin y}{\cos y}$ となり,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y,$$

となる. したがって,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

(4) $y = \operatorname{arcsinh} x$ と置くと, $x = \sinh y$ となり,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

他も, (3) と同様.

演習 79.

以下の関数の連続点と微分可能である点を決定し, そこでの微係数を求めよ. 定義域 I を指定しないときは, $I = (-\infty, \infty)$ とする.

(1) $f(x) = |x|$. $g(x) = |x^3|$.

(2) 多項式 $P(x)$ の実根を $a_1, \dots, a_k$ とするとき, $f(x) = |P(x)|$.

(3) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$. $|f(x)|$. $g(x) = \left| x^2 \sin \frac{1}{x} \right|$.
 $h(x) = x + x^2 \sin \frac{1}{x^2}$. ただし, これらは $x \neq 0$ で与えたもので, $x = 0$ では 0 としておく.

(4)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q^2} & (x = \frac{p}{q} \text{ は既約分数, } q \geq 2) \\ 0 & (x \text{ は無理数または整数}) \end{cases}$$

略解. (1) は本文のグラフを見れば分かる. $|x|^n$ は $x = 0$ 以外では微分可能. $x = 0$ では, $n = 1$ のとき, 左右微分可能で, $f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = 1$. $n \geq 2$ のときは微分可能で, 微係数は 0.

(2) $a_1, \dots, a_k$ 以外では微分可能. a_i が単根なら, $x = a_i$ で微分可能でないが, a_i が重根なら, $x = a_i$ で微分可能で, 微係数は 0 になる.

(3) $f(x)$ については, 0 では微分不能で, 左右微分可能でなく, 連続. それ以外では微分可能.

$|f(x)|$ については, $x = 1/(n + \frac{1}{2})\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) では微分不能で, 左右微分可能で, 連続. 0 では微分不能で, 左右微分可能でなく, 連続. それ以外では微分可能.

$g(x)$ については, $x = 1/(n + \frac{1}{2})\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) では微分不能で, 左右微分可能で, 連続. 0 では微分可能で, 微係数は 0. それ以外では微分可能.

$h(x)$ については, $x = 1/\sqrt{(n + \frac{1}{2})\pi}$ ($n \in \mathbb{Z}$) では微分不能で, 左右微分可能で, 連続. 0 では微分可能で, 微係数は 1. それ以外では微分可能. しかし, 単調増加ではない.

(4) 0 以外の有理数で連続でなく, 無理数で連続だが微分可能でない. 0 では微分可能で, 微係数は 0.