# Hans Freudenthal と Hyman Bass の数学教育について

佐波　学*

## 1　はじめに

筆者の勤務する高等専門学校は、中学校卒業者を入学対象者とし、修業年限を 5 年ないし 5 年半とする教育機関である。教育課程は高等学校と同様な部分を含むが、高等教育機関であるとの位置づけのため、教員に教員免許の所持は義務づけられていない。

高等専門学校においては、理学系の大学・大学院で教育を受けた教員が、中等教育としての数学教育に携わるということが常態化している。高等専門学校で数学の教育に携わる者にとって、数学研究者の数学教育への関与のあり方はどうあるべきかという問題は、重要な課題のひとつと考えられる。

ハイマン・バスによると、「学校数学の教育に実質的 (substantially) な関与をしている数学研究者の数は増えつつあり、自分はそのひとりである。こうした活動には、長く、敬意を表すべき伝統がある ([2],p417)」という。そして、この伝統を代表する人物として、フェリクス・クラインとハンス・フロイデンタールを挙げている。

ここでは「数学研究者の数学教育への関与のしかた」を主題とし、代表的な人物として、フロイデンタールとバス自身をとりあげ、簡単な事例研究を試みる。

なお、クライン、フロイデンタール、バスの共通点としては、いずれも数学に関する一流の研究業績を持っていることと、クラインはIMUK(Internationale

*鳥羽商船高等専門学校

Mathematische Unterichtskommission) の初代会長、フロイデンタール、バスは、共に、IMUK の後身である ICMI(International Commission on Mathematics Instruction) の会長を務めたことが挙げられる。

また、クラインについては、[6] 及びその参考文献等を参照願いたい。

## 2 ハイマン・バスの数学教育

ハイマン・バスは、1932 年、テキサスで生まれた。1959 年にシカゴ大学で Ph.D. を取得、1960 年からはコロンビア大学で教職に就く。

主著である『Algebraic K-theory』の出版は、1968 年である。

1991 年、全米科学アカデミーの数理科学教育委員会の委員になり、1993 年から 2000 年の間は、委員長を務める。1995 年から 2000 年はアメリカ数学会教育委員会の委員長、1998 年から 2006 年は ICMI の会長を歴任している。

なお、 1999 年からミシガン大学に移っており、また、2001 年から 03 年は、アメリカ数学会の会長も務めた。

### 数学教育との出会い

バスは、1991 年に全米科学アカデミーの数理科学教育委員会 (MSEB, Mathematical Sciences Education Board) の委員になったことを契機に、本格的に数学教育に関与するようになった。

この委員会に集った、学校教員、学校長、教育研究者、科学博物館の館長、PTA の会長、教員団体の会長、産業界の代表、出版者、科学者、等々の、様々な団体の代表たちと接することで、バスは、数学教育の重要性への認識を新たにする。

そして、数学教育への見識を養う必要性を感じたバスは、文献を渉猟し、あるいは関係団体の人々との交流をはかることに、精力的に取り組み始めた。

### 数学者と数学教育に関する見解

バスが MSEB の委員長になって 4 年目の 1996 年、バークレーの数理科学研究所（MSRI）で、『研究大学における数学教育の将来 (the Future of Matematics Education at Research University)』と題する集会が開催された。

この集会の基調講演 [1] から、数学者と数学教育に関するバスの見解を窺ってみよう。

### 数学者と教育関係者

バスによれば、数学教育は、数学とは違って、精密科学ではない。もっと経験的で、元来、総合的（多分野にまたがる）なものであり、不確実さや不確定さが必然的に伴う人間というものを支援することに目的をもつという。

また、数学教育は、それ自身の、明証さの基準、論議や理論構築の方法、専門的な論述等々をもつ、ひとつの社会科学であり、すでに確立された研究基盤から、過去数十年にわたって多量に学ばれ続けてきているのだという。

したがって、大学の数学者と教育関係者とは、互恵的な交流を行うことが可能である。つまり、教育関係者は大学の数学者の教育に関する意識や能力を向上させることが可能であり、数学者は学校教程や教育実践の強化に貢献できるというのだ。

### ビジネス・チャンスとしての数学教育

さらに、こうも述べている。

> さらに付け加えるならば、数学教育というものは、数理科学に関する学科の新しい専門職大学院課程の計画において、重要な選択肢のひとつを与えてもいるのです。... そして、より重大な挑戦は、数理科学者と教育の専門家が協同することにより、数学科に基盤をもち、教員養成の数学的な部分を目的とするような数学の課程を設計することなのです。([1],p5)

バスは、数学教育に、数学者にとっての一種のビジネス・チャンスを見ているといっても良いかもしれない。

### 数学教育への新しい貢献

数学者に可能な数学教育への貢献とは何であろうか。

数学教員の養成や研修のために、現代数学を薄めたような講義を行うことだろうか。新しく得られた結果をアレンジして、生徒の興味をひくであろう教材を提供することか。それとも、カリキュラムの系統性に対する助言だろうか。

バスは、数学教育研究者のデボラ・ボールと共同研究をおこなうことで、新しい貢献の形を発見した。

### MKT — 教えるための数学的知識

ボールの研究対象は、「教えるための数学的知識（MKT、Mathematical Knowledge for Teaching)」であった。

このMKTは、単なる教科の内容のことではない。授業の準備や、授業後の評価活動も含む、「教えるという仕事」全般を実践するために必要な, 数学的な知識 (mathematical knowledges)、技能 (skills)、思考法の特性 (habits of mind)、感覚 (sensibilities) の総称である。

バスは、実践に基づくMKTへのアプローチによって、「教えるという仕事に固有の厳密な数学的知識で、数学研究を含む他の数学的な専門分野では未だに知られていないもの」を発見した。学校のカリキュラムの深層には、それを超えたところと同様に、豊かな数学が存在しているのだという。(例えば、[2] を参照のこと.)

# 3　ハンス・フロイデンタールの数学教育

## 3.1　数学教育との出会い

ハンス・フロイデンタールは、1905年、ドイツのリュッケンバルデに生まれた。1923年、ベルリン大学に入学。在学中に知遇を得たブラウエルの助手となり、1930年、アムステルダムに移る。

1931年に、ホップの指導下で学位を取得し、アムステルダム大学の講師となる。この時期の数学研究上の関心は、主として、トポロジーにあった。第2次世界大戦後の1946年には、ユトレヒト大学の幾何学の教授職に転じ、これを機に、幾何学と変換群、特にLie群の研究に関心を移している。

フロイデンタールは、戦前のトポロジー、戦後のLie群に関する数学上の著名な業績をもつだけでなく、数学史や哲学に深い造詣をもち、さらに、詩や小説も手がけるといった、多才な人物であった。「万能の人 (Homo Universalis)」と評されたこともある。

しかし、フロイデンタールが後半生に努力を傾注したのは、数学教育であった。

### 数学教育のカレッジ

フロイデンタールと数学教育との本格的な出会いは、1936 年に、新教育連盟（NEF — New Education Fellowship) オランダ支部に設立された数学研究会 (WVO) に加入したときに始まる。

新教育連盟は、19 世紀末から 20 世紀初頭にかけ、世界の各地で独立に生じたいくつかの教育刷新運動の連合体として、1921 年に設立された。

この団体は、子どもの個性の尊重や、発達的特性を考慮した集団指導、競争ではなく協力による教育、等々を指導原理として謳い、本部をロンドンに設置、支部を各国に設けていた。ユング、モンテッソーリ、ピアジェ、デューイ、タゴール、フロイトなど、世界の著名な教育者や学者達が参加している。

「教授法と教育の刷新」を目的とするオランダの WVO では、週末にメンバーの家に集まり、中等教育機関における数学教育の本質とは何か、議論を重ねたという。後に、 フロイデンタールは、WVO を、「自分にとっての数学教育のカレッジ」と呼んでいる。

フロイデンタールの WVO 加入については、1932 年に結婚した妻のスースの影響もあったらしい。

スース・フロイデンタール・ルッターは、新教育運動の熱心な活動家で、オランダのオルタナティブ・スクールのひとつとして定着しているイエナ・プラン教育の導入に尽力し、今も「オランダのイエナ・プラン運動の母」と呼ばれているという。彼女には、ナチス占領時代、ユダヤ系であったフロイデンタールの収容所脱出を成功させたという逸話もある。

### 最初の疑問

教育という営みには、「何を教えるか」という要素と、「どう教えるか」という要素がある。数学教育に関していえば、新教育運動の影響は、「どう教えるか」については新しかったが、「何を」については旧態依然たるものであった。

例えば、フロイデンタールが当初興味をもっていた中等教育機関での幾何教育についていえば、「数学教育は、知性の涵養に寄与するためのものであり、例えば、演繹（論理）的に考えることを身につけさせるためのもの」であった。

数学研究者としての経験と、豊富な数学史の知識をもつフロイデンタールにとって、「新しい数学的知識は演繹や論理によって得られるものでは

ない」ことは自明であったから、演繹的に考えることに数学教育の目的をおく思潮に疑義をもつ。

数学教育の対象である「数学」とは、そもそも何であるのか？ それは、数学者の研究対象である「数学」とは別のものなのか？

フロイデンタールの思索は、こうした疑問を探求する過程で、次第に深まっていく。

## 3.2 何をどのように教えるべきか

数学教育において教育の対象とすべき「数学」とは何で、それをどのように教えればよいのだろうか。この主題に対するフロイデンタールの基本的な考えをみておく。

### 人が学ぶべき数学とは何か

1967 年 8 月、『役に立つように数学を教えるにはどうすればよいか？』と題された研究集会が、ユトレヒトで開催された。

集会の講演で、フロイデンタールは、こう述べる。

> 算術と幾何学は、現実（reality）を数学化（mathematize）したところに起源をもちます。もっとも、少なくとも古代ギリシア以降は、数学自身が数学化の対象となってきましたが。... 体系化 (Systematization) することは数学の大きな力のひとつであり、可能であれば、学生はこの力を学ぶべきです。しかし、私が言うのは、体系化するという活動のことで、その結果のことではありません。その結果は、体系 (system) です。美しくも、閉じた体系。閉じていて、入口もなければ、出口もない。... 人が学ぶべきは、閉じた体系としての数学ではありません。学ぶべきは、むしろ、活動の方であり、現実を数学化する過程（process）であり、可能であれば、数学を数学化する過程、なのです。([5], p30.)

人が学ぶべき数学、数学教育が対象とすべき数学とは、「閉じた体系（システム）としての数学」ではなく、「現実を数学化する過程（プロセス）」である。これが、フロイデンタールの得た解答であった。

## 数学化する過程をどう教えるか

それでは、いったい、その過程（プロセス）なるものは、どうやって教えればよいのか。

答えは、ギリシアの古典にあるという。

プラトンの対話篇で、ソクラテスがメノンの少年奴隷に示した方法こそが、その原型なのだ。

学校教育で学ぶべき数学の題材は、いずれも、歴史の流れのなかで、かつて誰かが発明したものである。したがって、指導者が適切なときに適切な質問を発して導いていく「ソクラテス的方法」によって、学習者に再発明させることができるはずだ。

この方法を、フロイデンタールは、「誘導的再発明 (Guided Re-Invention)」と呼んだ。

こうして、数学教育では、何を、どのように教えるか、という問いに対する、フロイデンタールの基本理念が定まった。

## フロイデンタール信条（クレド）

1967 年、フロイデンタールは、ICMI の会長に就任し、翌 68 年には、雑誌『Educational Studies in Mathematics』を創刊する。また、オランダ政府が 1961 年に設置した数学教育現代化委員会の要請にもとづき、1971 年、ユトレヒト大学に数学教育開発研究所 (IOWO) が設立された際には、初代所長となった。

以降、この IOWO を主たる舞台とする、フロイデンタール自身の、そして、フロイデンタールに影響を受けた人々の活躍が、オランダ国内はもとより、国際的にも広がっていくことになる。

フロイデンタールの影響は、多様な流行やら方式を生み出した。（その最大のものである RME については、3.3 節で略述する。）ともすると、見解の違いすら生じかねない状態ではあったが、それがフロイデンタールの影響下にあることを示す、いわば、フロイデンタール信者たちの信条 (The Credo) が、上述の 2 つの基本理念である。

もう一度、まとめておこう。

- 数学教育が対象とすべき数学とは、人間の活動 (human activity) のひとつとしての数学であり、“ リアル ”な現象を数学化 (mathematize) する過程 (process) としての数学である。

旧来の、数学化の結果として得られた「概念からなる閉じた体系」としての数学ではない。

- 数学教育の方法は、学習者が対象とする数学化の過程を再発明 (re-invent) できるよう誘導 (guided) する機会を与えることである。(発展した) 数学の分野における過程についても同様である。

**数学の現象学へ**

その後、フロイデンタールは、数学的な構造を、「概念」として結晶化する以前の「現象 (phenomena)」として記述することに腐心した ([3])。そして、ついには、数学が生成して来る基盤としての「コモン・センス (common sense)」の追求へと立ち向かうことになる ([4] 第 1 章)。

## 3.3 RME — フロイデンタール研究所の数学教育

1990 年にフロイデンタールが没すると、ユトレヒト大学の数学教育開発研究所 (IOWO) として出発した組織は、フロイデンタール研究所 (FIsme — The Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education) と改称された。

この研究所から発する潮流は、オランダの数学教育はもとより、世界の数学教育界に、今現在も、多大な影響を及ぼしている。

**RME とは何か？**

フロイデンタール研究所に源をもつ数学教育は、“ Realistic Mathematics Education (RME) ”と称される。

RME とは、乱暴に述べれば、生徒が「リアル」と感じる情況 (context) の下で学習活動を行うことを重視する数学教育のありかた、を意味する。

もっとも、この「リアル」は、 必ずしも、我々の生活する「現実の世界」を意味するわけではない。ここでいう“ realistic ”は、オランダ語の“ zich REALISEren ”の訳で、英語で言えば“ to imagine ”（ 講談社『オランダ語辞典』では「実感する」）の意であり、したがって、対象となる世界は、現実世界に限られず、ファンタジーの世界や、数学の形式的な世界でも良いのだという。

**RME を支える２つの枠組み**

RMEが、3.2節のフロイデンタール信条(クレド)を基本理念として奉じているのは無論だが、それに加えて、その実践を支える理論的な枠組みがある。

1957年にvan Hieleが発見したレベル理論と、1978年にTreffersが提唱した数学化の方向の区分、である。なお、van Hiele、Treffersは、両者とも、フロイデンタールから学位論文の指導を受けている。

### レベル理論

レベル理論においては、学習者の理解には固有のレベルがあり、各人の学習過程において、理解のレベルは非連続的に遷移する、とされる。

「数えること」を例にとれば、誕生祝の席でバースデーケーキに挿してあるローソクの本数から年齢を知ることのできるレベル [ 情況に依存した (context-related) レベル] と、机上に放置された長さや太さの異なるローソクの本数を数えることのできるレベル [対象に関連した (object-connected) レベル]、等々の理解のレベルがある。

足し算等の演算が可能となるのは、より形式的な数え方 (formal way of counting) ができる理解のレベルに達してからのこととされる。したがって、対象に依存したレベルの学習者にとって、「みかん3個とりんご4個を足す」ことは、了解不能となる。

なお、理解のレベルは、学習者が自らの活動を「反省 (reflection)」することを契機として、下位から上位へと非連続的な遷移を生ずると考えられている。

### 数学化の種類の区分

「数学化」は、次の2種類に区分されるという。

- 水平方向の数学化 (horizontal mathematization)
  現実生活的な状況における問題を組織化し解決するための数学的な手段をうみだすプロセス。生活（life）の世界から記号 (symbols) の世界への移行という見方もできる。

- 垂直方向の数学化 (vertical mathematization)
  数学的な体系の内部における再組織化のプロセス。記号の世界の内部での移行ともいえる。

### RMEの基本戦略

RME の下での学校の授業としては、以下のような展開がユニットと考えられる。

1. 冒頭に、教師から、「リアルな（状況に即した）問題」が提示される。
2. 生徒が、それぞれに、各人の「理解のレベル」の下で、解く。
3. クラスで、それぞれの解法について、議論し、共有することで、理解のレベルの、水平方向や垂直方向への遷移が生じる。

実際の授業では、続けて、しかるべき問題が提示され、上記の過程を繰り返すことで、到達目標へと近づいていくことになろう。

RME の基本的な戦略としては、こうした授業展開を支援するための、次のような作業が要請されることになる。

- 「理解のレベル」と「数学化の方向（水平と垂直）」という枠組を用いた、学習活動の解析。
- その結果に基づいた、「リアル」な教材やカリキュラムの開発。

オランダにおける RME にもとづく数学教育の実際については、例えば、[7] を参照のこと。

## 4　数学者にとっての数学教育

「数学教育」という言葉は、「数学」と「教育」から成立っているが、「数学」も「教育」も、時代と地域に依存する、非常に幅の広い概念である。

数詞を用いて数えることや、指を折って加減をするといった日用の「数学」と、それを身に付けるための非制度的な「教育」は、人類の歴史と共にあっただろう。

より高度な「演算を備えた数系の応用」としての「数学」は、そうした応用を必要とする職能集団（土木、建築、作暦、交易、等々）内において保持され、継承（制度的教育）されてきた。そして、そこでは、数学と教育は一体と目されている。

### 数学と教育の分離

近代以降、職業としての数学研究者集団の成立と、初等・中等教育におけるいわゆる学校数学教育の普及が進むにつれ、数学研究者と数学教育の分離が促進された。

では、この数学と教育が分離した状況下での、数学者の数学教育への関与のあり方には、どのようなものがあるのだろうか。

### 2つの立場

クラインとフロイデンタールの数学教育への関与のあり方の違いを、バスは、次のように比喩的に表現している。

> クラインは数学教育の国への数学の国からの大使(ambassador)であったが、フロイデンタールは数学教育の国の一人前の、しかし卓越した、住民(citizen)となった。([2], p420)

敷衍するなら、数学者の数学教育への関与のあり方に、2つの立場を考えることができるだろう。

「数学教育」というものが、数学者の研究対象である「数学」とは別のものとして、数学者が数学教育に「外」から関与する立場と、数学教育の対象である「数学」と、研究者にとっての「数学」とは、ひとつの「数学」であるとして、数学教育に数学者が「内」から関与する立場である。
前者は「数学教育」を「教育」に重点をおいて見る立場であり、後者は「数学」におく立場といってもよいかもしれない。

もちろん、理念として、である。

ハイマン・バスを「外」から関与する立場の、そして、ハンス・フロイデンタールを「内」からの立場の、それぞれ代表とみなしたい。

### 数学者と数学教育

バスは、数学教育の分野に、数学者の社会的影響力を強化するための可能性と、研究対象としての未踏地を見出した。

そして、フロイデンタールは、人間が「数学する」ことの根源的な意味を問い、そこから数学研究も数学教育も派生するような「源泉」の記述とメカニズムの分析に挑み続けた。

そう、数学者は、いまだ扉の前に立っているに過ぎないのかもしれない。

## 謝辞

この研究会へは、旅費として、平成20年度科学研究費補助金「数学リテラシーを育成する数学教員養成カリキュラムの研究」基盤研究（B）2

０３００２５５浪川幸彦（代表者)、黒木哲徳（分担者）の援助を受けましたことを申し添え、感謝の印とします。

# 参考文献

[1] Bass, H. : *Keynote Address : Mathematicians as Educators*, Contemporary Issues in Mathematics Education, MSRI Publications vol.36, Cambridge University Press (1999).

[2] —— : *Mathematics, Mathematicians, and Mathematics Education*, Bulletin (New Series) of The American Mathematical Society, vol.42 (2005), No.4, 417-430.

[3] Freudenthal, H. : *Didactical phenomenology of mathematical structures*, Dordrecht, Reidel (1983).

[4] —— : *Revisiting mathematics education: China lectures*, Dordrecht, Kluwer Academic Publ. (1991).

[5] Goffree, F. : *HF : Working on Mathematics Education* , Educational Studies in Mathematics, 25 (1993) , 21-49.

[6] 蟹江幸博，佐波学 『エアランゲン就任講演にみるクラインの数学観について – 試論 – 』 三重大学教育学部紀要、 第 60 巻、 教育科学 (2009), 掲載予定.

[7] Van den Heuvel-Panhuizen, M. *Mathematics education in the Netherlands: A guided tour*, Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9, Utrecht University (2000).