エアランゲン就任講演にみる クラインの数学観について—試論—

蟹江幸博 * 佐波　学 †

目次

* 三重大学教育学部数学
† 鳥羽商船高等専門学校

はじめに

昨今、日本ばかりでなく教育問題、特に数学教育の問題に多くの危機感が寄せられている。とかくに日本社会の現在的状況の諸症状を挙げ、それとの関連で語られることが多いが、ことはむしろもっと根本的なものであるように思われる。

本稿では、日本の数学教育および数学研究の今日的課題を考察する前提として、1870 年代から半世紀にわたり数学界の世界的な指導的人物であったフェリックス・クライン（1849–1925）の数学を取り上げて見ることにした。彼の数学観は多くの彼の著書によって明らかになっているように思われているが、彼の活動の広さや多様さ、また多面的であることから、却って分かりにくいという部分がある。そこで、我々はクラインの思想の原点として、23 歳の彼がエアランゲン大学に正教授として就任した際に行った記念講演に注目してみたい。

なぜ今、敢えて一世紀以上も前のクラインのエアランゲン大学教授就任講演を取り上げるのかと言えば、そこでクラインが直面した状況と現在の日本の状況に本質的に似通ったものがあるからであり、それに対して彼が採った、数学研究上、数学教育上、さらにそれらを取り巻く環境の整備に関するいわば行政的な行動の原点を教えてくれるからである。

世に名高い彼のエルランゲン・プログラムがエアランゲン大学教授就任に際して提出された文書であることから、それが教授就任講演（アントリッツレーデ，Antrittsrede）であったと、日本では広く誤解されていることをこの際注意しておきたいということも、もちろんある。後者は、新任教授としての、学部構成員を主な聴衆とする講演であって、数学研究を主題とするものではなく、大学における数学教育のあるべき姿について語ったものであった。

前者が幾何学を現代数学的枠組みの中に捉え直そうとするものであるのに対して、本稿の対象である後者はその時代の「数学」が直面した状況に対し彼が生涯かけてどう対処していこうというのかを数学関係者以外の大学人に対して宣言したものである。

両者を誤解なく引用するため、前者を現在常用されているエルランゲン・プログラム（もしくは単にプログラム）という名で、後者をエアランゲン・アントリッツレーデ（もしくはアントリッツレーデ）という名で呼ぶことにする。

クラインの数学教育改造運動に学ぼうとするとき、彼の多面的な活動の根底にある原理のようなものを知らないでは、今の時代に真に役立つものにはならないのではないだろうか。その原理は当然のことながら、彼が抱いていた数学に対する姿勢と思想にほかならない。アントリッツレーデの中にその数学観を見いだすことが、本稿で我々が取り組もうとした課題である。

アントリッツレーデが講演原稿としてしか残っておらず、クラインが公刊したものでないからからこそ、却って彼の初志が生の形で含まれているのではないかと考えている。ただ、これまで存在自体も余り知られておらず、文献批判の作業も済んでいないものであるため、歴史研究的な厳密さを主張することはできない。現在の我々ができる限りで、アントリッツレーデを読み解いてみて、彼の数学観を抽出してみようとする試みを行ってみた。

さて、各節の内容について述べておく。

§1 では、クラインが直面した時代背景を、特に 19 世紀ドイツの数学をめぐる状況を含めて概観する。

クラインは日本でも広く知られているが、その人物像としては、いわゆるエルランゲン・プログラムで著名な数学研究者としてのものと、20 世紀初頭の数学教育改造運動の指導者としてのものが、代表的なものと言えるだろう。実際にどのように受け取られているかは、エルランゲン・プログラムについては [2] に日本語訳と訳者による解説があり、また数学教育改造運動については [21] およびその参考文献を参照すれば、大略を把握することができる。また、クラインの伝記的記述については、彼の著書の日本語訳に付されたもの以外に、まとまったものとしては [5] がある。

しかし、クラインにはもうひとつ、「応用数学の振興」の推進者と言われる顔がある。これは「純粋数学と応用数学の対立の解消」のためのクラインの活動を重視したものである（[19]、[20]）。

クラインの活動を理解することは、現在の日本の数学をめぐる危機的状況の打破のため、何がしかの示唆を与えることにもなるだろう。そのためここで、数学研究をめぐる日本の現況をみてみよう。文部科学省のシンクタンクである科学技術政策研究所科学技術動向センターから 2006 年に刊行された POLICY STUDY は、日本の数学研究を取り巻く現在の状況を以下のように述べて強く警告している（[4] p. 3）。

(1) 数学研究には他分野に見られるような大規模な実験施設や多額の設備投資は不要だが、数学研究者が定常的に研究情報を得て研究活動を行うための経費（雑誌購入費や旅費、人件費など）が必要である。米国、フランス、ドイツなどの数学研究の主要国と比較して日本の数学研究費に関す

る状況は極めて厳しいと推測される。現状の日本の数学研究費の規模では、数学研究レベルの現状維持又はレベル低下を緩和する程度にしか寄与していない可能性がある。

(2) 日本の大学における数学博士取得者数は米国、フランス、ドイツと比較して少ない。海外のトップクラスの数学研究者からは、日本のトップクラスの数学研究者を継ぐ人材が不足していると警鐘が鳴らされており、日本の数学研究振興には今が最後のタイミングではないか。全学教育（教養教育）や入試への対応、事務量の増加などにより日本の大学における数学研究者のオブリゲーションが増加したことで、研究時間は大幅に減り、日本の数学研究環境は悪化を続けていると推測される。

(3) ライフサイエンス、情報工学、ナノテクノロジー等の多くの分野の研究者は、今後の研究発展に対する数学の必要性を感じている。欧米ではそのための数学研究者との協力体制が整っているのに対して、日本では遅れていると彼らは考えている。

米国、フランスなどでは産業界でも数学研究者が活躍している一方、日本ではそのようなケースは少ないと推測される。この背景には、**日本の企業が企業研究に対する数学の意義や可能性を十分に理解していないとともに、数学博士などを送り出す側の学術界もその意義や可能性を十分に企業に伝えてこなかった**[*1]ためと考える。これは日本の産業研究の発展を損ねている可能性がある。

[4] では、こうした「日本の数学研究の危機的」な現状の分析に続けて、日本における数学研究の強力な振興の必要性を訴え、また、そのための対策提言をおこなっている。

ここで、我々が着目するのは、上記引用中の (3) の後段部分である。この部分から、日本における数学研究の「学術界」と、科学技術に関わる他分野の研究者の「学術界」や「産業界」との、「数学というもの」に対する意識の乖離という論点を読み取ることができよう。

さらに、上記報告では明示的ではないものの、ここで問題とする「意識の乖離」が「政策決定に与る人々」との間において特に顕著であるように思われる。

この「数学という学術分野に関する意識の乖離」こそが、現在の状況をもたらした諸原因の根底にあるのではないかと推量される。

「数学研究者にとっての数学」と「数学の応用を要請する立場（ないし政策決定に寄与する立場）からの数学」の対立、あるいは、より標語的に、「純粋数学」と「応用数学」の対立という視点に着目すれば、19 世紀のドイツにおいても同種の状況、というよりはむしろ原型をなすような状況が存在したのである。

§2 では、クラインのアントリッツレーデについて概説する。

クラインには、少なくとも、数学研究者、数学教育改造論者、応用数学振興推進者という、3 つの顔があった。この 3 つの顔が、クラインという人物のなかで、どのように位置づけられていたかを考えてみたい。

ひとつには、時系列に即してそれぞれの側面が現われたと理解することができる。保型形式をめぐるポアンカレとの研究競争に破れたクラインが、純粋数学の研究をあきらめ、数学教育の活動に転じた、といった見方が一般には広く受け入れられている。しかし、それは事実と異なるのである。ポアンカレと研究上の競争関係にあったライプチィヒ大学の時代、クラインは研究に多くの時間を必要とした筈であるが、数学教室や付属施設の充実を含む教育（行政面）の活動にも多くの時間を費やしていた。研究と教育を両立させることによって、過労から健康を害したと言うことができるようである。

クラインは、研究者として世に立った当初から、数学と他の学術分野との乖離を解消するために心を砕き、そのための主要な方法として数学教育の問題にも深い関心を抱いていたことが知られている。そして、それをはっきりと示しているのが、23 歳のクラインが行ったエアランゲン・アントリッツレーデである。これは、新任教授としての、学部構成員を主な聴衆とする講演であって、数学研究を主題とするものではなく、まさに、数学と他の学術分野との乖離を憂い、その解消のために、大学における数学教育のあるべき姿について語ったものなのであった。

（変換）群による幾何学の統一を謳ったエルランゲン・プログラムは、教授就任に際して印刷物の形式で提出された研究計画書であって、アントリッツレーデとはまったく異なるものであるが、数学史上の重要性のせいでエアランゲン大学教授就任に際しての言明としてアントリッツレーデの存在すらも霞ませてしまったのである。

§3 ではアントリッツレーデの内容を吟味しながら、クラインにとって数学とは何であったかを考え、その数学観を取り出そうと試みている。

ピエンソンの指摘 [15] によれば、「クラインにとっ

[*1] ゴチックによる強調は、本稿の筆者による。

て、数学とは、ひとつの有機的な統一体であった。それは樹のようなもので、抽象的原理の土壌に深く根を張るが、しかし、その枝葉は、幾何学的直観と同様、純粋および応用の諸科学との接触を通じて養分を摂らねばならない」([18] p.281)。

クラインが数学というものを「有機的な統一体」と観ており、そのことが彼の様々な活動と深く関係していたということには、我々も同意する。しかし、その有機的統一体のありかたを表現するピエンソンの樹の比喩は、必ずしも適切なものとは言えないのではないだろうか。

クラインの学者としての活動の原点であるエアランゲン・アントリッツレーデから読み取れるのは、「数学の応用－純粋数学－数学の教育」を一体的に捉える数学観である。「樹」の比喩を用いるなら、「数学という樹」は「応用」という土壌から養分を得て「純粋数学」という幹を育み、その果実が「教育」を通じて再び土壌へと還元されていく、といった循環的な数学観という方が良いだろう。

このことが、クラインの数学観についての、本稿での主張である。

§4 では、補足的な話題をいくつか取り上げる。

なお、本論の中で用いるエアランゲン・アントリッツレーデのテキストであるが、我々の知る限り、日本語訳はないため、読者の便宜も考え、日本語仮訳を作成した（付録に付してある）。もともと公刊されたものではなく、手書きの原稿（予稿）が残っているだけであり、実際に彼が行った講演がこれと全く同じであったという保証はない。ロウがクラインの手稿からテキストを校定したドイツ語テキストとその英語訳が [17] に採録されている。本稿の日本語仮訳は、ドイツ語テキストを参照しながら、その英語訳に基づいて作成した。仮訳としたのは、ロウの校定したドイツ語テキストの意味の採りにくい点が幾つか残っているからであり、訳語の選択についても理解しやすさを重視して慣習的ないしは便宜的、近似的なものを採用したからでもある。

また、選択した訳語によって疑義が生じかねないような場合には原語を注記しておいた。ロウの同定したドイツ語そのものが絶対の確実性を持っているとは言えないための措置でもある。本稿での考察の目的からいって、必ずしも文献学的厳密さを要するものではないと判断したためでもあるが、もちろん著者らの非才の故でもある。暫定的な措置として御許しいただきたい。それでも注意を要する用語については、著者たちの理解の範囲内での説明を加えてある。

§1. 「数学」をめぐる 19 世紀ドイツの状況

フェリックス・クライン（1849-1925）の活動時期は概ねドイツ帝国に重なる。クライン 13 歳の 1862 年にビスマルクがプロイセンの首相になった。プロイセンはドイツの諸邦国を統一し、さらに普仏戦争に勝利した。プロイセン王ヴィルヘルム 1 世が、1871 年 1 月 18 日にヴェルサイユ宮殿の鏡の間でドイツ皇帝戴冠式を行い、ドイツ帝国が生まれた。1918 年 11 月に第一次世界大戦の敗北とドイツ革命の勃発により、第 3 代皇帝ヴィルヘルム 2 世がオランダに亡命し、帝国は終焉を告げた。この時クラインは既に 69 歳である。エアランゲン大学の教授に就任したのはドイツ帝国誕生の翌年の秋のことであった。

ドイツ帝国を形成する地域の独立性はかなり強固なものであった。アカデミーや私立の研究所で行われていたヨーロッパの先進地域と異なり、伝統的に大学の中で行われていたドイツの学問研究には、多様な地域性があったことを忘れてはいけない ([1] p.212)。

学問的な意味で問題となる「数学」も、おおむね、中等・高等教育機関においてのみ存在し得たと言ってよい。

クラインの時代のドイツの中等・高等教育機関の状況は、統一以前の各邦ごとの事情の違い、特に邦国がプロテスタント系かカトリック系かという相違などがあり、かなり複雑な様相を呈しているのだが、本節では、教育機関との関わりを中心にして、「数学」について次節以降の記述に必要な大枠だけを述べる。

1.1 ドイツの大学の近代化

中世に発達したヨーロッパの大学は、神学・法学・医学の専門学部と、準備教育を担当する教養部からなっていた。

17 世紀までのドイツの大学教育における「数学」は、教養部の教育課程に、いわゆる自由四科として含まれていたが、内容的には、ユークリッド原論の最初の何章かと、ボエティウスの数論の断章がせいぜいであり、数学を専門とする教師もおらず、専門学部に含まれるような「自律的な学問分野」とはみなされていなかった。

そして、中世から近世へと移行するうちに、大学の準備教育を中等教育機関が担うようになり、「数学」の属する教養部は衰退していった。

ドイツの大学の近代化は、ライプツィヒ大学を追放されたクリスティアン・トマジウスが、ブランデンブルク選帝侯（後のプロイセン王フリードリヒ 1 世）によって設立を命じられたハレ大学の成立（1694 年）をもって始まったというのが通説になっている。

「ここ（ハレ大学）では、啓蒙主義の理念が本気で取り上げられ、講義は初めてドイツ語で行われ、初めから歴史、地理、実験自然科学、自然法が教えられ、「研究と教授の自由（リベルタス・ピロソパンディ）」という原則が推進された。ハレでは、確実な真理を伝授ないし解釈するのではなく、『真理を探究することと、そうした探求の準備をすること』（設立趣意書より）が重要視された。」（[1] p.143）

このような大学改革は、ライプニッツの弟子で哲学者兼数学者のヴォルフ（Christian Wolff、1679–1754）らによって提唱された合理主義哲学によって推進され、その結果、教養部は、哲学部として蘇生することになる。

後にクラインが教授として籍を置くことになるゲッティンゲン大学は 1737 年に、また、エアランゲン大学は 1743 年に、ハレ大学に範をとって設立されている。

「数学」については、教育課程における重要性が強調されるようになった。

「あらゆる教育家が同意見であった。人間たるものは、なかんずく、数学をおおいに学ぶべきである。何故ならば、その知識は、実際上の生活において、大いに直接的な益をもたらすのであるから。」（[7] p.75）

この時期の数学教育の改革については、上述のヴォルフが重要な役割を果たした。

ヴォルフは、時代の風潮であった数学の実用性にも目配りはしたが、一方で、知性（Verstand）を鋭敏にするという一般的な目的のために数学を学ぶこと、つまり、形式陶冶の面についても、同様に強調した。学校教育に厳密な証明を求める傾向が起きたのは、このときからであるという。

ヴォルフの著わした四巻本の『全数学的科学の基礎入門 (*Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften*)』（1710）は、18 世紀中頃まで大学の教科書として用いられることになる。内容的には、数の計算（Arithemetik）、幾何学、三角法（対数を含む）から始まり、各種の応用、文字計算、方程式論、曲線の解析幾何学、そして微積分学へと、当時の数学の最先端にまで至るものであった。

また、「初学者、特に学校における使用の便に供するよう」この著作の抜粋を集めて作成された教科書『摘要・全数学的科学の基礎入門』(1713) は、数の計算、幾何学、三角法、応用を少しばかり、そして、代数学の分野については、文字計算、2 次方程式までの方程式論の簡単な事項に限ったものであった。ヴォルフが扱った題材がその後の学校数学において標準と見なされるようになり、さらにはこの範囲以外は扱わないという制限として機能してしまう。

次項で扱う 19 世紀初頭の新人文主義者による大学改革に先立ち、18 世紀後半、新人文主義の先駆であるゲスネル (Gesner) やエルネスティ (Ernesti) たちの手で、「数学」の改革が断行された。

ゲスネルやエルネスティは、数学の価値はおおいに称揚した。しかし、基本的な考えにおいて、実用性を重んじる応用への志向は後退し、知性の練磨に一般的な価値をおく形式陶冶主義が重視されることになる。

先述したヴォルフの教科書は、エルネスティの『立体図形教説入門（*Initia doctrinae solidioris*）』(1736) や、ケストネルの『数学の基礎入門（*Mathematischen Anfangsgründe*）』(1756) に取って代わられるようになる。

純粋数学と応用数学の分離と、応用数学を学校教育から排除するという図式が完成したのも、おおよそこの時期である。（[7] p.77）

1.2　新人文主義思想にもとづく大学改革

大学制度の次の大きな変革は、19 世紀初頭、ナポレオン支配下のドイツにあって、「物質的に失ったものを、精神の領域で取りもど」そうとする動きの中で行われた（[1] p.178）。

この改革を主導したのはいわゆる新人文主義者たちであるが、学問的教養は「個のあらゆる能力の推進の可能性」を高めるものであり、「同時に人間の内的外的自然の支配」であると考えていた彼らにとって、学問的営為は、「人間の内的外的自然の支配を完全にすること」であった。

彼らは、学問の純粋理念に則った全人的人間形成の教育（一般教育）と、職業と結びつく実践的専門教育との間に、根本的な差異をみる。そして、学問の純粋理念にもとづく一般教育が専門教育に優先されるべきであって、その担い手たる哲学が大学のすべて学問分野の頂点に立つべきであるとの指針を掲げて、新しい大学を構想した。

新人文主義者の理念が、リベラルな改革派官僚が大きな力を有していたプロイセンで、妥協を重ねながらも開花したのが、1810 年に開校したベルリン大学である。この新構想の大学は、かつてハレ大学がそうだったように、その後の大学改革の模範とされていく。

こうして、「全人的教育」に仕える哲学部が、従来の神学部にかわって、大学における主導的な地位に就くことになった。

「数学」にとって重要なことは、この時期の一連の

改革によって、それまで神学部に属していた「中等教育機関の教員養成」の権能が、国家が媒介する形で、哲学部に移管されたことである。

その結果、哲学部に「卒業生が学んだことを専門的に活かせる定職」が用意されることなり、かつてはカリキュラム上の科目に過ぎなかった諸分野が、「自律的（つまり、研究-教育-雇用の安定的なサイクルを有する）学問分野」として確立されていくことになった。

近代ドイツ型の、大学の学部・学科・講座等の制度によりかかった学問分野としての「数学」は、このようにして初めて誕生したのであり、「(ギムナジウム等の中等教育機関を中心とする）数学の教員養成」こそ、学問理念といったものとは別の次元で、「数学」という学問が自律していくための、大きな要因であったのである。

それはまた、特にプロイセン流の統制化された教育行政の下では、教員資格試験の内容を規定する規則が、実質的に、教員養成機関である大学の教育内容をも規定してしまうことを意味していた（中等教員の資格制度については、[13] 第 3 章を参照のこと)。

数学研究の世界においては、新構想のベルリン大学に拠った、クンマー (Ernst Eduard Kummer)、クロネッカー (Leopord Kronecker)、ワイエルシュトラス (Karl Weierstrass) の 3 巨頭を代表とする、いわゆる第 2 次ベルリン学派が、19 世紀半ば、数学の応用を二次的なものとして排し、数学の純粋性を鼓舞し、特にドイツの数学界では圧倒的な勢威を振るうことになる。

原則としてドイツの制度を受け入れた日本では、近代におけるそれ以前の高等教育機関における「数学」の状況が、フランスのエコール・ポリテクニクがその典型であるように、軍事技術や科学技術と密接に結びついたものであったことを忘れがちであることを注意しておこう。

1.3　ゼミナールと演習

19 世紀初頭の大学改革時に導入され、その後のドイツの学問の発展に大きく寄与したものに、「研究室（ゼミナール）、研究所（インスティトゥート）、付属病院（クリーニク）、実験室（ラボラトリー）」([1] p.213）があった。

いずれも、大きくみれば、ある目的を満たすために機能が限定された、しかるべき設備を備えた固定的な「部屋（建物)」を意味する。

元来、大学とは学ぶ者と教える者からなる共同体のことであり、教師と学生のいる場所が大学であったから、固定された建物としての「教室」も「教員室」も前提されてはいなかった。したがって、「機能を限定した固定的な建物」が大学に付属すること自体が、ひとつの革命であった。

なお、「ゼミナール」については、時代の経過と共に、「建物」としての意味が薄らいでいった。

ベルリン大学における「ゼミナール」は、1812 年に開設された古典文献学ゼミナールと神学ゼミナールをもって嚆矢とするという（[22]p.22)。

その機能は、「大学は、教師と学生が、共に研究に従事することで高めあう学びの場である」という新人文主義的な理念を具象化したもので、具体的には、

> ゼミナールとは、『学生を研究させながら教育する』ために設計された特別の空間である。具体的にいえば、図書室と教室を一体化した空間である。歴史学を例にとれば... この図書室に蓄積された史料、文献を使いながら、教授も研究をするが、学生もまた研究をする。そしてこのような研究活動から生み出された研究成果を、その図書室兼ゼミナール室で発表し合う。議論の途中で疑問点が出てくれば、すぐ出典に当たり、参考文献に当たりながら、その場その場で知識を確定してゆく。それが「研究と教育の統一」の具体的な姿である。([22] p.24)

数学の場合、ベルリン大学在学中に古典文献学ゼミナールに参加した経験を持つヤコビ（Carl Jacobi）が、そこで学んだシステムを、ケーニヒスベルク大学で教鞭をとる際に導入したものが早かったようである（[10] p.109)。

ゼミナールが人文系の学問のものであるなら、自然科学系の学問でそれに対するのが「実験室」である。これは、もちろん、種々の実験装置を備え、学生が指導者と共に実験を実施できるよう設備が整えられた、「部屋（建物)」のことである。

「ドイツで最初の実験室が作られたのは、ベルリン大学ではなく、ドイツの地方都市ギーセンでのことであった。1826 年後世に名を残すことになるリービヒは二名の助手とともに、薬剤師を養成するための実験室を作った」([22] p.30）とされる。

この著名な化学者リービヒは、「実験室での教育」というシステムを、留学先のフランスで身につけてきたといわれる。

自然科学系におけるこの種の教育システムは、エコール・ポリテクニク流の教育を源流とするというのが通説である（[3] を参照のこと)。

数学の場合、「実験室（実験)」に対応するものとして、「演習室（演習)」がある。この言葉も、後には広

義に用いられるようになったが、本来の文脈でいえば、モンジュによって確立された画法幾何学を学ぶためのシステムを指すものであったらしい。

製図装置やら種々の立体図形の模型やらを備え、学生が作業をすることの出来る設備を有した建物を意味していたと思えばよい。

次節で紹介するクラインのアントリッツレーデに現れる「ゼミナール」と「演習（室）」は、多少時代は下がるものの、まだ、創始の精神を色濃く残した状況にあったものと思われる。

1.4 近代産業化社会と工科系高等教育機関の発達

19 世紀後半、ドイツでは、近代的な産業化社会への急激な転換が行われた。

その結果、技術と科学の重要性も急速に増大したが、前近代的な産業資本の蓄積に乏しいドイツにあっては、人材養成や基礎研究への要求が、「国家の施設」としての高等教育機関に求めらることになる。

こうした期待に応えたのは、まずは大学であったが、それとは別にフランスのエコール・ポリテクニクに範を仰ぐ工科系高等教育機関（Technische Hochschule）があった。

（Technische Hochschule を「工科大学」と訳出することも少なくないが、 ここでは、この種の高等教育機関と大学との制度上の差異を問題としているので、テヒニシェ・ホーホシューレと音訳することにした。）

テヒニシェ・ホーホシューレの前身である各種の技術系学校は、元来、大学とは全く異なる系統の教育機関であった。例えば、前者の学校は、年少の生徒への準備教育を含んでおり、また、綿密に組み立てられた課程に則って講義が行われ、月毎に到達度評価を行うなど、大学流の「教授と修学の自由」とは無縁な機関であった。また、管轄する政府の省部も異なっていた。

しかし、テヒニシェ・ホーホシューレの場合は、その嚆矢とされる 1806 年開校のプラハや 1815 年開校のウィーンの学校が、学生の年齢を 17 歳以上と定め、また、「教授と修学の自由」を謳うなど、当初から大学を意識したものであった。

その後産業の近代化が進み、高等教育を受けた技術者の需要が高まると共に、テヒニシェ・ホーホシューレの拡充が質量ともに進むことになる。結果として、1830 年代に入る頃には、テヒニシェ・ホーホシューレはそれなりに安定した社会的評価を受けるようになった。そしてそうなると、テヒニシェ・ホーホシューレ側から大学と同等に扱われることが要求されるようになる。独立した職業集団を形成した各分野の卒業生たちが、大学卒業生と同等の扱いを望み、圧力団体を結集して、大学昇格の運動を展開するようになった。

対する大学側は、工科系学校の昇格問題には反対の姿勢をとり、激しい論争が繰り返された。理念的な論争と言うより、そこで実質的な障害であったのは、学位授与権や教員養成の権限などの、大学の既得権に関わるものであった。

1860 年代に入ると、工科系学校が大学規約を採用することが認められるようになる。しかし、これは多分に形式的なものであり、テヒニシェ・ホーホシューレに学位授与権が勅令で認められたのは、ようやく 1899 年のことであった。教員養成の課題については、20 世紀に持ち越されることになる。

急激な産業化に伴う私企業（この時代主に化学工業）や、軍事目的の国家的な需要からの科学や技術の知識を持つ人材育成への対応が求められたのは、工科系学校ばかりではなく、当然大学に対しても求められるようになる。そして大学が期待された役割に十分に応えられなかったために、工科系学校の一層の発展が促進されていくという面もあった。

しかし、新人文主義的な哲学にもとづく全人教育の理念から出発した新構想の大学（ウニウェルシタス・リテラールム (Universitas literarum)、文芸による大学）にとって、実践的な職業教育という社会的要請は理念と相容れないものであって、苦悶の歩みともいうべき姿を呈するようになる。

1.5 「数学」をめぐる対立

数学に関して言えば、大学とテヒニシェ・ホーホシューレの対立は、さらに深刻な事態をもたらした。

テヒニシェ・ホーホシューレが急増したため、科学的な教育を受けた教員の必要性が高まり、大学卒業生の大量の雇用が生まれた。

大学の哲学部にとっては、一種のビジネス・チャンスであっただろう。

ところが、大学出身の若手数学者の多くは、テヒニシェ・ホーホシューレの教員となっても、厳密な理論構成を良しとする「純粋精神」に則った数学を教えるだけで、自分たちを雇用している学校の必要を満たすことには無理解であり、怠惰でもあった（[19]p.181）。

技術者たちの間に、「自分たちの教育に「数学」は不要だ」ということが公然と叫ばれるという、いわば「反数学運動」が生まれるまでに状況は悪化した。さらに 20 世紀冒頭には、この反数学運動が数学の授業時間数減を実現させるまでの力をもつことになる。

数学者の多数はこうした状況には無頓着であったが、後年のクラインはこの問題の解決に積極的に取り組むことになる（補足 §4.2 を参照のこと）。

現在の日本でも工学部の数学の教育に関して似たような状況がなくはない。工学系からの反対者は卒業生や産業からと言うより、教員からという形を取る。大学の全人教育という理念は薄まって、実際上はなくなったといってもよいほどであるのに、工学系の教育に対して数学者側からの姿勢は変わっているようには見えない。数学的知識の需要は益々高まっているが、それを工学系の教育の中で実現しようとするとき大きな困難があって進んではいない。それが可能な数学教授者を育成することが何よりも急務だが、それが進まないのは数学者側の怠慢ばかりでもない。多様なニーズのうち何を主にして考えればよいのかが分からない。表面上異なる多様なニーズが数学的にはコンパクトにまとまることも少なくない。そういう部分に着目した教程を作り上げていくことが必要だろう。そのためには数学者側の努力だけでなく、工学の方からの協力も欠くことができないだろう。

ともあれ、100 年以上も前に同じ種類の状況にあったドイツの数学界にあって、クラインが何を思い何をなしたかを知ることがこれらのことに重要な示唆を与えてくれる可能性がある。

§2.　アントリッツレーデ

本節ではクラインのエアランゲン大学教授就任講演（アントリッツレーデ）成立の経緯と背景、そして概要について述べる。

2.1　エアランゲン大学教授就任までのクライン

フェリックス・クラインは、1849 年 4 月 25 日、デュッセルドルフに生まれた。1857 年にデュッセルドルフのギムナジウムに入学し、1865 年にボン大学に入学する。

当時のボン大学は、科学系教育に関しては先進的な学校で、物理学、化学、地質学、植物学、動物学といった自然科学全般にわたり、ゼミナールを含めた組織的な教育が行われていた。クラインは、すべての分野のゼミナールに参加し、どの分野でもその将来を嘱望されたという。

1867/68 年の冬学期以降、クラインは数学に専心するようになった。プリュッカーの解析幾何の他に、リプシッツの解析幾何や数論、力学、静力学、微分方程式、変分法の講義も受けている。

当初、物理学を専攻することを望んでいたクラインは、幾何学者兼実験物理学者であったプリュッカー (Julius Plücker) の下で物理学の助手を務めるようになった。

1868 年 5 月、プリュッカーが急逝すると、その遺稿の出版準備をしたクラインは、出版の責任者となったギーセン大学のクレプシュ (Alfred Clebsch) と親しく接するようになり、以降クレプシュに師事したのだが、クレプシュはゲッティンゲン大学の教授となって去ってしまう。

1868 年 12 月にボン大学で学位を得たクラインは、翌 1 月からクレプシュを追ってゲッティンゲンに行き、クレプシュ学派の一員となる。1869 年 8 月までクレプシュの下で学んだクラインは、その後、クレプシュの助言にも拘わらずベルリンに赴き、1870 年 4 月まで過ごす。

ベルリン時代に、クラインは、ソフォス・リー (Sophus Lie) と親交を結び、1870 年の春には二人でパリに遊学する。普仏戦争の勃発によりドイツにもどったクラインは、医療部隊で兵役を務めるが、チフスに罹患して故郷に送還されることになる。

療養中に大学教授資格（Habilitation）の準備をし、1871 年 1 月に資格取得、そして、ゲッティンゲンで私講師（Privatdozent）となった。

1872 年 10 月、若干 23 歳のクラインは、クレプシュの推挙により、エアランゲン大学の正教授の職につく。そのわずか 1 ヵ月後、クレプシュが急逝した。そして、なぜかクレプシュ学派最年少のクラインが、師の学派を継承することになったようだ。

2.2　ベルリン学派との対立

クラインより 15 歳ばかり年長であったクレプシュは、ヤコビのケーニヒスベルク学派の流れを汲む多才な数学者であり、天性の教師であった。

幾何学に代数的・解析的方法を導入して数々の成功をおさめる傍ら、ギーセン時代には、大学初の数学ゼミナールを開設し、ゴルダン（Paul Gordan）、ブリル（Alexander Brill）、ネーター（Max Noether）、リンデマン（Ferdinand von Lindemann）らを擁して、代数幾何や不変式論を中心テーマとする新しい学派を形成した。

1868 年、リーマンの跡を襲ってゲッティンゲンの教授となったクレプシュは、自らの学派の成果を世に問うための雑誌の創刊を計画し、翌年には『数学年報 (*Die Mathematische Annalen*)』の創刊号を出版する。

さらに、クレプシュは、ドイツのすべての数学者を糾合すべく、ドイツ数学会を創設する準備を行った。しかし、彼の早逝により、この企画は陽の目を見ないことになる。

彼の死は、ドイツの数学界のありかたを変えたと評されるほどであり（[14] p.168）、少なくとも、ドイツ数学会の創立は 30 年も遅れることとなった。

若きクレプシュが自らの学派を形成し始めた頃、ド

イツの数学界で大きな影響力を有していたのは、いわゆるベルリン学派であった。

いまだベルリンには、クンマー、クロネッカー、ワイエルシュトラスの 3 巨頭が健在で、ドイツ全土に散った彼らの弟子たちが、数学の純粋性と厳密性を鼓舞していたのである。

直観を重視し物理学に深い関心を寄せるクレプシュ学派と、純粋数学の牙城であるベルリン学派とは、相容れる余地もなく、さまざまな場面で対峙することとなる。

「1872 年にクレプシュが突然亡くなると、彼の指導を受けた我々は、必然的に、他の多くの数学者たちとの激しい個人的対立に巻き込まれた。我々に対する不信感が非常に広まったので『数学年報』は村八分にされて、クレプシュの弟子や支持者だけの小さいグループで維持されることになった」([10] p.297)というクラインの回想からも、事情の片鱗を窺うことができる。

ちなみにエアランゲンはプロイセンではなく、バイエルンに属していた。

2.3 アントリッツレーデの重要性

1872 年の秋、エアランゲン大学の教授に就任したクラインは、12 月 7 日に同僚に向けて自分を紹介するための講演(アントリッツレーデ)に臨む。

クラインの後年の活動の原点として、このエアランゲン・アントリッツレーデを重視する立場の議論は少なくない([12],[15])。

その根拠としてしばしば取り上げられるのが、クライン自身が、最晩年に自らの職業人としての生涯を回顧した文章である。

その中で、クラインは、自身のエアランゲン・アントリッツレーデについて、次のように述べている([9] p.18。[16] に引用されているものを引用した。ゴチックによる強調は、訳者によるもの)。

> 12 月のアントリッツレーデでは、私の教育活動のプログラムを詳しく説明し、専門化された研究のために、あらゆる学識の統一と完全なる教育という理念が軽視されるべきではないと主張した。つまり、こうである。人文系の教育と数学・科学系の教育は共にあるもので、互いに反対の位置に置くべきではない。他方、物理学や工学といった隣接する学問分野との関連性を保つためには、純粋数学と同様に応用数学を盛んにすることが必要である。さらに、論理的な能力を発達させると共に、それと同じだけ、直観(より一般には創造的な独創性を生む源である数学的な想像力)を育成する必要がある。大学は、学校[*2] での準備教育に注意を払うべきであり、 学校教員の教育には特に重点を置くべきである。その際、工科系高等学校の設備を調査し、多くの点で我々の範となすべきである。
>
> 以上の考察に基づいて、次のような具体的な提案を行った。定期的に繰り返される初等的な講義と、科学を専攻する真面目な学生のための少人数の特別講義が開設されること。そして、両者とも、演習とゼミナール活動によって支援されるべきこと。製図の力を伸ばすため、画法幾何学の講義が設けられること。さらに、読書室と開架式図書館を設置して、学生が公刊された文献で学べるようにすること。そして、広範な模型を収集して、学生が数学的直観を発達させる援けとすること。
>
> **以上の観点や具体策は、私の遊学の日々から生まれたものだったが、その後の活動においても、本質的には導きの手(*wesentliche Richtlinie*)であり続けた。**実際のところ、初等的な講義を、学生に要求する程度によって、初心者用と中級者用に分けるといった、少しばかりの変更をしただけである。

上の文章については、2 段落中の「具体的な提案」が現存の講演草稿には出て来ないことをもって、信頼性に疑念を投げかける論者もいる。([17]p.124.)。

しかし、最晩年のクラインが、このエアランゲン・アントリッツレーデを自らの職業人生の重大事として考えていたことは、否定できない事実とみてよかろう。

2.4 アントリッツレーデの概要

ここでは、エアランゲン・アントリッツレーデの内容をまとめておく。なお、付番は、段落を示す。

また、講演の全文については、付録を参照のこと。

1. 非専門家が聴衆のこの講演では、数学的知識が前提と出来ないため、自身の数学上の研究内容を話題にすることはしない。が、非専門家の数学的知識の欠如の問題は、(本来の大学教育の目的である)全人的教育の観点に立つと、憂うべきものである。
2. 数学的知識の欠如の問題は、人文系教育と科学系教育の分裂という、より深刻な問題のひとつの兆候である。
3. こうした分裂は、単に、自然科学の発展が最近のものであるという偶発的な事情に起因すると思

[*2] 初等・中等教育機関のこと

われる。近い将来、人文系と科学系教育の対立を解消し、統合された教育の実現を期したい。

4. 統合された観点から学問分野を概観すると、数学は、理論力学、物理学と天文学のいくつかの分科といった精密科学に隣接する系列の端に位置することになる。
5. この講演で話題とするのは、上述のような一般論ではなく、**数学教育というものの、 全般的な目的、および、大学で実施することが望まれる形について**である。
6. (i) 数学は、幾何学の真理が一本の補助線によって明らかになるような、論理的洞察を通じて得られる受身の喜びにみられるように、無味乾燥なものではない。しかし、数学の研究では生産するという、より深い喜びが得られる。

   (ii) 数学の生産活動は演繹的な活動ではない。最初は帰納的であり、しばしば類推に支えられ、何らかの関係性の正しさを予言することになる。そして、そうであると確信した後で、その結論がたどり直されることになる。
7. 数学という学問分野の最近の生産的な活動は、全体的なもので、かつ、 他の学問分野には見られないような速さで発展している。
8. 独立した生産活動の喜びを享受し得るのは、少数者のみであるかもしれない。しかし、音楽の比喩を用いるならば、数学同様、音楽的に創造的な人間は一握りだが、ほとんどの人間を音楽の完成品が理解できるように育てることは可能であり、音楽的感覚のまったくない者はきわめて限定される。数学についても、同様である。
9. 数学の存在意義は、自分自身のためだけにあるのではない。他の諸科学の役に立つためでもあり、その勉学のもつ「形式陶冶的価値（formale Bildungswert）」のためでもある。

   （注記）「形式陶冶」という訳語については、補足 §4.1 を参照のこと。
10. この場で私が述べる数学の「応用（Anwendung）」とは、通常の意味合いとは異なる。通常の「応用」というのは、天文学の予報計算のように、自身の専門分野の学問的な見解の何がしかが、他の分野で有益であり重要であることを示すといった類のもののこと。確かに、後者の「応用」は、一般的な人間生活という面から見れば、最も高度で広範な意義をもっている。しかし、それは、この講演において自分の意図するところではない。
11. 私の考える「応用」とは、数学が他の諸科学の発展において果たす、より理論的な役割、つまり、数学の勉学がもつ形式陶冶的価値のこと。

    以下、物理学への数学的概念の応用を具体例にあげて説明するが、同様な考察は、数学の応用というもの全般、とりわけ自然科学への応用について、当てはまる。
12. 「数理物理学（mathematische Physik）」 には、様々な分野があるが、多くの場合、 アプリオリな仮定に基づいて演繹されたすべての現象を、実験的に確かめることに成功している。

    「光の理論」において、光学現象の本質を弾性体の性質を持つ媒体の振動を当てはめることで説明するのが、著名な実例。
13. 物理的な研究の中には、同様に数理物理学の名前を冠されてはいても、「一連の経験的な命題を提示し、 そこに数学を用いて、結果を引き出す」といったふうな、別の方向性を持つものがある。「光の理論」でいえば、光線の概念と観察から得た反射および屈折の法則から始まる幾何光学がその例。
14. こうした研究分野において数学が果たす役割は常に等しく、厳密に定式化された基礎からさらなる結論を引き出すことである。その基礎が、仮設であるか、観測された事実であるかは、数学的立場からは、どちらでもよい。
15. (i) より一般的な場合でも、数学研究の果たす役割は、単に、厳密に与えられた仮定から 結論を引き出すことだけである。

    (ii) 数学の本質は公式にはない。式の形に表現することが、数学において、ある意味で本質的な役割を果たすということは否定できないが、公式というものは、観念の結合を厳密に記号化したものにすぎない。

    (iii) 公式化することで、数学の仕事は終了したと目されたのは昔のことで、今日では、公式が発達していく様を、最初から最後まで自明であると見なせるまでに、内側から理解することが望まれている。
16. (i) この観点に立てば、抽象的な数学的思考を、感覚的（sinnlich）（直観的（anschaulich）といった方が良いかもしれない）な領域に適用するという意味において、数理物理学は、 幾何学と違わないことになる. 両者とも、最初に研究全体の基礎となる命題（物理学の場合は法則、幾何学の場合は公理と呼ぶ）が提示される。こうした命題から従う結論を追い求めることだけが、数学者の仕事になる。

    (ii) このことは、「数学の研究が、いずれかの時

点で、感覚的直観から切り離されるべきだ」ということを意味するわけではない。純粋幾何学が良い例を与えるように、両者が互いに手を携えて進んでいくものである。

17. (i) 数学自身にとって、直観的な学問分野とのこうした結びつきは、最高に重要なものである。前世紀の数学の基本的な進展の大部分は、そうした学問分野としての天文学からの要請によるものであり、今世紀では、数理物理学と幾何学が同様な役を果たしている。
(ii) こうした要請に導かれた数学の研究は、一定の流れに沿って進むうちに、問題を解決するための直接的 な必要性を越えてしまい、ついには純粋数学のひとつの分科として展開されることになる。
(iii) その結果、不適切ではあるが、元の分野名に応用の言葉が冠されることになる。そのような研究は、より適切な別の範疇、「物理学の要請から生じ、物理学の用語を用いるのがふさわしい、数学の一分科としての物理数学」、に分類されるべきである。

18. (i) 最初の話に戻る。我々の主張は、「数学の価値は、応用を通じて得られた知識にあるのではなく(これも過小評価する必要はないが)、純粋数学に取り組むことによる『知性の訓練(Schulung des Geistes)』の方にこそ 価値がある」というものであった。
(ii) 各々の学問分野において精密研究が広がりつつある現状に鑑みれば、この意味において数学を学ぶ ことは、科学者一般にとって、かつてなく必要になってきている。したがって、自然科学系の学生にとり、最初の学期に数学の講義に出席することは、それだけの価値があること。形式陶冶の効を得ることが問題であるから、どの講義かは関係しない。

19. (i) 医学部の学生は、負担が過多で、数学の勉学に割く時間を見つけることは不可能かもしれない。数学の講義から益を得るためには、自分自身で、着実に、かつ、熱意をこめて、勉強する必要があるからである。

20. この難問を解決するには、現今の教育機関の教育課程を、誰しもが数学的な考え方に接することが出来るようなものにするべき、ということになる。そして、そのために、ギムナジウムにおいて、もっと数学に興味を感じさせるいきいきとした授業を、そして、もっと才気あふれる扱いで教材を、教えることが必要である。

21. ここには、我々、大学の数学教員にとって、広大で、大いに得るところの期待できる活動領域がある。上述の意味において、将来の教員候補である学生(späteren Schulamts-Kandidaten)に対する数学教育の水準を、長年にわたって見られなかった高みにまで、引き上げる仕事である。我々が良き教師を育てれば、数学教育は自ずから良くなっていき、近い将来、ギムナジウムの数学教育に本質的な改革が生じることが期待される。

22. (i) 以上の理由から、学生諸君には、諸君の勉学を完成させるだけでなく、将来の教師たる者は、自分が教える題材の「上に」立つ[*3]ことができるよう、何が学校[*4]で教えられるべきであるかも知っておくことを望む。
(ii) そのため、学生諸君に、少なくとも一度は独立した研究に従事することを望む。そうした研究を完成させたことのある者は、異なる種類であっても、確実な判断力やいきいきとした着想を我が物としているはずであるから。

23. (i) この高度な課題のためには、大学の教育の改良も必要である。
(ii) 最近、数学的な演習(Einrichtung mathematischer Uebungen)と学生諸君が参加するゼミナール (Selbstbeschaeftigung der Studirenden in Seminaren)が、注目を集めているが、こうした種類の教育が、大学教育の将来の発展のための要である。
(iii) ゼミナールの必要性は、講義を聴いて理解できることと、同じ内容であっても、それを、まだその分野に慣れていない他の者たちが同様に理解するまで講義できるということが、まったく異なるところにある。訓練が必要なのは、題材を論理的に提示するような講義の技巧ではなく、本質的なものとそうでないものとを仕分ける能力である。
(iv) 製図や模型作成の演習の時間の必要性は、自然科学の学生にとって「実験実習」が必要なことと同様であろう。

24. 大学とポリテクニク系学校(Polytechnikum)を比較をしてみる。ポリテクニク系学校では、実用的な演習が高度に発達しており、また、中心的な内容が、講義等々で順序だてて繰り返される。数学の学生には、少なくとも数学的な理由だけで決定するのであれば、最初の二年間は大学よりポリテクニク系学校で 教育を受けるよう助言をする

[*3] *über* seinem Stoffe steht
[*4] Schule おおむね初等・中等学校を指す。

しかない状況である。

25. 大学が提供すべき数学教育として、喫緊の課題は、講義の練習のためと独立した研究のための数学のゼミナール、 そして、授業で実際に役立つような演習を構成するためのゼミナールの設置である。

§3. アントリッツレーデにみるクラインの数学観

この節ではまず、アントリッツレーデの文章としての構造を分析し、彼の数学観が色濃く反映している部分を取り出す。そして、そこで彼が主張している重要なテーマを幾つかしぼり、それらを順に分かりやすい形に構成し直すことを試みた。最後の項でそれらをまとめて述べている。

3.1 文章としての構造

クラインがエアランゲン・アントリッツレーデで主張している事柄を、構造的に分かりやすくまとめてみよう。（以下、付録の訳文中の位置を [第 1 段落]、[第 1 段落・第 1 文] などと書くことにする。）

1. [第 1 段落から第 9 段落]
   全大学人に対し、大学教育が人文系と数学・科学系に分裂しているのは、大学における全人的教育のあるべき姿ではないから、 統合することが必要であるという、世に多く行われている主張に対する対策として、数学教育の重要性を訴えている。それは、新人文主義による全人的教育としての理念的なもの以外の理由として、数学には形式陶冶的な効用が高いことの主張でもある。
   数学的才能を持たない人に数学を教えることの是非論があるが、人文系の学生であっても、音楽を楽しむのと同種の理解は可能であるという注意もしている。
2. [第 10 段落から第 17 段落]
   「数学という学問の、応用という概念を通じてのありよう」の説明がある。
3. [第 18 段落から第 20 段落]
   科学・医学系の人に対して、基礎・道具としての数学の必要性がますます増加しているが、数学学習に必要な労力を勘案すれば、大学教育から前倒しできるよう、準備教育である中等教育機関の数学教育を充実・変革する必要があると主張している。
4. [第 21 段落から第 22 段落]
   中等教育の改良のためには、優秀な教員を養成することが必須であり急務であるという認識のもとに、これが（中等教員養成機関である）大学哲学部にとっての新しい活動領域であり、中等学校教育を意識した大学教育が必要であると提言している。
5. [第 23 段落から第 25 段落]
   その教育は、組織立ったカリキュラムや演習の重視などの点で、工科系学校に見倣うべき点が多く、各種のゼミナールの導入が喫緊の課題である。これも提言である。

ここで注視したいのが、2 番目の、「数学という学問の、応用という概念を通じてのありよう」 の説明をしている、第 10 段落から第 17 段落の部分である。

第 18 段落の冒頭で、クライン自身、「どうも純粋数学の考察に深入りしすぎたよう」と述べているが、主として非専門家からなる大学人相手の講演としては、不釣合いに長尺（全体の 3 分の 1 を超える）の上に、物理学からの例示はかなり高度であり、非専門家に理解できたとは考えづらい。

つまり、クラインは、「数学教育というものの、全般的な目的、および、大学で実施することが望まれる形（第 5 段落）」 を主題とするこの講演の内側に、「本意ではございません（第 18 段落・第 1 文）」という言葉とはうらはらに、自身の考える「数学のありよう」についての見解を挿入したと推量しても良いであろう。

この講演は、「大学哲学部での数学教育」を主題とする表層的な流れの内部に、クライン自身の数学観を表明した部分を含むという、重層的構成をもつと言うことができる。

以下では、この「クラインの数学観」を示すと推量される部分について検討してみたい。

3.2 「数学観」段落の構造

アントリッツレーデの第 10 段落から第 17 段落の部分は、次のような構造になっている。

A. 数学の「応用」としては、自分がここで用いる意味が、通常の意味とは異なっていることを言明している [第 10 段落・第 1 文]。（以下、本稿では、「クラインの意味での応用」と「通常の意味での応用」とを区別する。）

B. 「通常の意味での応用」の説明を、天文学と測地学を例にして示している。[第 10 段落]

C. 「クラインの意味での応用」についての説明をしている [第 11 段落から第 14 段落]。（この部分は、以下のように 2 つに分岐している。）
⟨**C-1.**⟩ 「クラインの意味での応用」とは、「厳密に定式化された基礎（Grundlage) から、さらなる結論 (Schluss) を引き出すこと」であると

規定している [第 14 段落・第 4 文]。また、[第 15 段落・第 1 文] では、「厳密に定式化された基礎（Grundlage)」を「厳密に与えられた仮定（Voraussetzung)」に代えて述べている。

結論というのは何かしら有用な主張・命題・結果のことであるが、その有用性は数学の関知するところではないとも述べている。

⟨**C-2.**⟩ 数理物理学における「クラインの意味での応用」には、その仮定または基礎の在り方によって 2 種類ある。

⟨**C-2-1.**⟩ 一方は、「定式化された基礎」が「アプリオリな仮設 (Hypothese)」であるものを、弾性体の振動論を適用する光の理論と、星系の理論を適用する分子の理論を例示している [第 12 段落]。

⟨**C-2-2.**⟩ 他方は、「定式化された基礎」が「経験的な命題（Satz)」 であるものを、幾何光学、熱伝導論、ポテンシャル論で例示している [第 13 段落]。

＜ **C-3.** ＞ 前提が「アプリオリな仮設」か「観測された事実 (Tatsache)」かは、数学的には無関係であると言明している [第 14 段落]。

D.「数学の本質は公式にはない」、ことの説明をしている [第 15 段落]。

E.「抽象的な数学的思考を感覚（直観）的な領域に適用する」という観点からは、数理物理学と幾何学は同種とみなしてよいことを述べている [第 16 段落前半部]。

F「数学の研究は、いずれかの時点で、感覚的直観から切り離すべき」ではなく、純粋幾何学の例のように、両者が手を携えて進んでいくと述べている [第 16 段落後半部]。

G. 数学にとって、上述のような直観的学問分野との関係が、最高の重要度をもつと述べている [第 17 段落・第 1 文]。

⟨**G-1.**⟩ 理由として、そうした分野との関わりから新しい純粋数学の分野が生れることの例示 [第 17 段落・第 2 文] と、そのメカニズムの説明をしている [第 17 段落・第 3 文]。

⟨**G-2.**⟩ 上記の観点から見るとき、通例数理物理学に分類されている分野のうちには、物理数学と呼ぶべき純粋数学の一分科の中に分類されるべきものが多いと述べる [第 17 段落・第 5-7 文] 。

上記の部分から、クラインの数学観を探るにあたっての鍵となる概念として、「クラインの意味での数学の応用」と「数学の新分野生成のメカニズム」 の二つを探ることができる。

「クラインの意味での数学の応用」に関連するのは **C**、**E**、**F** の部分であり、「数学の新分野生成のメカニズム」は **G-1** の部分である。

以下に、項をかえて、両者に対するクラインの説明の再構成を試みる。

3.3　クラインの意味での「数学の応用」

「クラインの意味での数学の応用」とは、次のようなものである。

1. 「数学の応用」とは、「厳密に定式化された基礎から、結論を引き出すこと」である。
2. 数理物理学の例でいえば、「定式化された基礎」は、弾性体の振動論を適用した光の理論や、星系の理論を適用した分子の理論のように、「アプリオリな仮設」である場合と、幾何光学、熱伝導論、ポテンシャル論のように、「観測された事実」 である場合がある。
3. 「定式化された基礎」が「アプリオリな仮設」であるか「観測された事実」かは、数学的には無関係である。
   引き出された結論が現実と一致しなくとも数学の責任ではないし、一致した場合に功績を認められないのも同様。結果の正しさは仮定の正しさに拠るが、仮定の正しさは数学の関心事ではない。
4. 「抽象的な数学的思考を感覚（直観）的な領域に適用する」という観点からすれば、数理物理学と幾何学は同種とみなしてよい。研究全体の基礎となる仮定は、前者では法則、後者では公理と呼ばれる。
   数学的には、この仮定がどのようにして得られたか（実験によるのか、直接的な直観によるのか）は、重要ではない。数学の仕事は、単に、仮定から従う結論を追い求めることだけである。
5. 以上のことは、「数学の研究は、いずれかの時点で、感覚的直観から切り離されるべきである」ことを含意するわけではない。純粋幾何学がその例であるように、その両者が手を携えて進んでいくことになる。

クラインは明示していないが、4 番目の項目で幾何学と等置されている数理物理学の分野は、2 番目の項目に挙げられている後者（観測された事実を基礎とするもの）を意味しているものと思われる。

3.4　新分野生成のメカニズム

上述の意味での「数学の応用」から、純粋数学の新しい分野が生成されることになる。数学の新分野生成のメカニズムは、次の通りである。

1. 物理学などのしかるべき分野で、「数学の応用」を必要とするような状況が生じる。数学者*5は、この要請に導かれ、「仮定から結論を得る」ための「数学の研究」を行う。
2. 研究は、一定の流れに沿って進む。
   この時期の研究は、元の分科名に「応用」を冠しておいて「数理物理学の分野」として扱う習慣であるが、本来は、「物理学の要請から生じ、物理学の用語を用いるのがふさわしい、数学の一分科としての、物理数学」に含まれていると考えるべきである。
3. 研究は、ある時点で、「問題を解決するための直接的な必要性」を越える。
   この時点で、純粋数学の新しい分野が誕生したことになる。

また、講演の第 6 段落の後半部分の言明を、「数学の生産活動は、帰納的に行うことから始まり、すべてが自明に感じられる段階にいたって完成する」と整理するなら、これは、誕生した数学の新分野が成熟していく様子を説明したものと解釈することもできる。

3.5　数学教育

アントリッツレーデは、確かに、数学教育を主題とした講演ではあるものの、あくまで「大学哲学部における数学教育」が対象であり、「数学という自律的な学問分野との関連における教育」という意味での「数学教育」については、採りあげるべき言明はほとんど含まれていない。

しかし、上述の「数学観」段落の議論に基づいて、大学における数学教育に対しても述べていて、特に精密科学を専攻する学生に対して数学の講義を聴講することを薦める件（第 18 段落）から、次の言明を挙げておく。

1. 数学の価値は、応用を通じて得られた知識にあるのではなく、純粋数学に取り組むことによる『知性の訓練（Schulung des Geistes）』の方に価値がある。
2. 各々の学問分野において精密研究が広がりつつある現状に鑑みれば、この意味において数学を学ぶ ことは、科学者一般にとって、かつてなく必要になってきている。

§3.4 で見たように、クラインにとって、精密科学の諸分野は、いわば、数学の新しい分野が生まれ出る土壌である。したがって、精密科学に従事する学徒が、数学的思考法に親しむことは、その土壌を肥やすことを含意する。

あるいは、こう言った方が適当であるかもしれない。

数学にとってみれば、数学が根を張ることができるまでに、土地を耕してくれる人々を養成する必要があるのだ、と。

さらに言えば、他人のために数学教育の労をとるのではなく、実は、自分自身のためであるのだ、と。

ここまで主張するのは、あるいはクラインの意図を超えることになるかも知れない。

今は、クラインは「土壌を肥やす」ところに数学教育の意味を見出していた、ということだけを述べておこう。

なお、関連事項として、補足 §4.4 を参照のこと。

3.6　数学観

以上の議論を総括し、本稿の主題についての主張を提示する。

『エアランゲン・アントリッツレーデにみるクラインの数学観』は、以下の通りである。

1. 「数学」という学問は、生成発展する諸分野の統合体として、動的に把握すべきものである。
2. 「純粋数学における新しい分野」は、「抽象的な数学的思考を直観的な領域に適用する」ことから生じる。
   つまり、「（クラインの意味での）数学の応用」から誕生する。
3. 数学の新しい分野は、帰納的な探求から始まり、すべてが自明に感じられる段階にむかって成長する。
4. 成熟した数学の分野は、その成果を、教育を通じて、直観的な領域を対象とする学問分野の探求に還元する。

ピエンソン（[18] p.281）に倣って、樹の比喩を用いるのなら、むしろ

> 「数学」という樹は、「応用」という土壌から養分を得て、「純粋数学」という幹を育み、その果実が「教育」を通じて再び土壌へと還元されていく.

という、循環的な数学観がふさわしいのではなかろうか。

§4.　補　足

前章での議論は、エアランゲン・アントリッツレーデのテキストにのみ基づいたものである。本節では

*5 役割的な意味であって、実際には物理学者であるかもしれないし、そういった区分が意味をもたない人物・学派であるかもしれない

テキストに対する他の論者の説の紹介とそれに対する反駁や、この先に展開すべき議論の萌芽となるような話題について簡単にまとめてみた。

4.1　「形式陶冶」という術語について

本稿では、クラインのエアランゲン・アントリッツレーデの鍵となる概念のひとつである“formalen Bildung” を、「形式陶冶」と訳した。

後年、この術語をめぐって教育心理学的な論争が起こった。その結果、この術語に本来持っていなかったニュアンスが付随するようになった。教育の問題を論ずるときそういうニュアンスを感じる人も多く、この場合には不適切な印象を与える恐れがあるので、この術語の使用を避けようとも考えた。しかし、クラインの講演当時の聴衆は、素直に新人文主義的な響きの中でこの語を聴いた筈であり、敢えて「形式陶冶」という術語を使うことにした。

また、この言葉を使ったことを主な理由として、エアランゲン時代のクラインが新人文主義の思想圏内にいるとする論者は多い（[17] p.127、[19] p.183 など)。また、クライン流の「応用数学」観は、カント哲学からの借り物であるといった論もある ([19] p.193)。

しかし、我々はこうした見解に同意することはできない。

講演の内容は、出来合いの思想にもとづくものではなく、ドイツ各地で各種のゼミナールに参加し、フランスの数学研究者のコミュニティに親しんだクラインの、実体験や実感に拠るものと考えたい。

したがって、クラインの“formalen Bildung”という言葉の用法も、「ある題材の数学的な扱い方を修得した者は、同種の題材を同様に扱うことができる」といった程度の常識的なものに過ぎず、新人文主義的な含意は、存在するにしても、決して大きくはなかったであろう。

4.2　応用数学振興と数学教育改造の運動

19 世紀末から 20 世紀初頭にかけ、クラインは、「応用数学の振興」と「数学教育改造」の運動に邁進している。

応用数学の振興のための産業界との連携（窓口としてのゲッティンゲン協会の設立。これは、民間資本の有効利用のための仕組みである、後のカイザー協会の先駆をなす)、ドイツ数学会における応用数学および数学教育関連部門の強化、数学教育改造のための中等教員団体等関係諸団体との連携、等々が主要な活動である。

こうしたクラインの活動の動機に、§1.5 で紹介した「数学をめぐる、大学とテヒニシェ・ホーホシューレの対立」を見る説がある（[19])。

それが間違いだと言うつもりはないが、それは外在的な動機に過ぎず、むしろそれとは別に内在的な動機があり、それが、§3 で述べたクラインの数学観にあったと考えたいのである。

4.3　クライン関係の一次資料について

エアランゲン・アントリッツレーデは、一般向けの短い時間の講演であるから、具体例に乏しく、そのため、理解が曖昧にならざるを得ない箇所がある。したがって、理解のための補助的な手段として、後年のクラインの講演・著作類を利用することは、不可欠の作業となる。

ただ、エアランゲン・アントリッツレーデに限らず、一般に、クラインの抱いていた思想なり信条なりといった内面に関わる論議では、論者によって見解が甚だしく相違している。

その直接的な原因としては、クラインが自らの思想信条等を明示的に述べた文書類が少ないということがある。しかし、より根本的な原因として、クラインが、「学界の政治家（Fachpolitiker)」と称されたように、政治的な色彩の濃厚な人物であり、しばしば彼の言動から、その時点の背景にある状況への（比喩的な意味、あるいは、文字通りの)「政治的配慮」が感じられるという点が挙げられる。

例えば、同じアントリッツレーデであっても、エアランゲンの八年後に行ったライプチィヒ大学の場合は、当時活性化しつつあった「技術者による反数学的な傾向をもった運動」に対する反論といった面があることが指摘されている（[20]p.228)。

クラインという人物は、本物の政治家と同様に、言葉を通じてではなく、自らの行動をもって思想を語ったのだと、理解すべきなのかもしれない。

エアランゲン・アントリッツレーデで語られたクラインの数学観を論ずるに当たり、具体例を求めて参照にした資料は、主として、『19 世紀の数学の発展に関する講義録』（[10]）である。

この著作は、クラインが最晩年に、近しい弟子を相手に自宅で行った講義が元になっている。クラインの生前には決定稿に至らず、死後、弟子によって編集された上で出版されたものである。

この著作の内容を、クライン最初期の発言の考察に援用するのは、あるいは、アナクロニズムの過を犯すものであるかもしれない。

ただ、アントリッツレーデに表明されたエアランゲンの当時のクラインの数学観は、原点としての単純さはあるにしても、数学というものを把握する原理的な枠組みとしては、最晩年に至るまで不変であったと、我々は考えている。

これは論証を必要とする主張ではあるが、本稿においては作業仮設として認めることとしておきたい。

4.4　数学の教育について

§3.5 で述べたように、クラインにとっての「数学教育」について考察するには、エアランゲン・アントリッツレーデは十分な題材を含んではいなかった。

ここでは、エアランゲン時代に拘泥せず、クラインの数学観において「数学教育」が占める位置について取り上げてみる。

クラインは、『19 世紀の数学の発展に関する講義録』において、「高まる**一般大衆への教育活動**（*Lehrtägtigkeit*）、指向性を有する学派の育成、あらゆる国の学者との活発な交流（[10] p.62、ゴチックによる強調は筆者。）」を 19 世紀の数学の特徴として挙げる。

クラインにとっての「数学教育」は、学校に限定されたものではない。

ここでは、仮に、「数学の教育」を、「（学生とは限らない）初学者に数学の理解を与えることを目的とする組織的営み」といったふうに広義に捉え、その上で、「クラインの数学観における数学の教育の位置づけ」という観点を設定してみたい。

この観点からみて重要なクラインの見解は、『19 世紀の数学の発展に関する講義集』中の、ガウスの『数論研究 (Disquisitiones Arithmeticae)』をめぐるディリクレの業績に関する部分である（[10] p.97）。

> ディリクレは『数論研究』を理解した初めての読者だった。彼は、移動に際しても、常にこの書物を身につけており、何度も、何度も学んだ。そして、簡易化した叙述 (vereinfachte Darstellung) を与えることによって、より広い集団に対して有効なものとした。彼の精神（Geist）からは、独自の創造物が生れたが、その中にはきわめて重要なものがある。
>
> …
>
> 算術的な問題に解析関数を応用したことで、数論が総合的に進むべき道を示したのは、ディリクレの偉大な業績であった。

解析数論という数学の分野を生み出したのは、ガウスの数論を（初学者に）理解できるよう簡易化を試みたディリクレの精神（Geist）にあったと言っているのである。

つまり、§3 における「クラインの意味での応用」と同様、「（広義の）数学の教育」にも、新しい数学の分野を生み出すメカニズムが備わっていると、クラインが考えていた可能性がある。

こうした例からも、エアランゲン時代以降の、より成熟したクラインの数学観における「数学の教育」についての検討が必要となる。が、それはまた他日を期したい。

おわりに

クラインには毀誉褒貶、さまざまな評価が下されている。

ベルリン学派に集う数学者たちにとって、クラインは「本物の功績をもたない偽せ者」、「眼くらましの食わせ者」、「他人の結果の編集者」であった（[5] p.224）。

周辺に集う若手数学者たちにとって、クラインは、自分たちの経歴を自在にあやつる、神のごとき存在であった。ゲッティンゲンに、数学的諸科学にたずさわる者たちの楽園を創りあげたと賞賛もされる。

幾何学統一の夢を逐う快活な青年数学者クラインは、いつ、思慮深い学者の顔と冷徹な政治家の顔をあわせもつヤヌスのごとき人物に変化したのか。

それは、1872 年 11 月 7 日、師クレプシュが亡くなったときではないだろうか。

生れたばかりのクレプシュ学派で教授職にあったのは、自分以外には 7 歳年長のブリルだけであり、ブリルは大学ではなくテヒニシェ・ホーホシューレの教授であった。クラインは学派で最年少であり、彼より年長の有能な先輩たちが犇（ひしめ）いていた。クレプシュが令名を馳せただけ、反動を覚悟しなければなるまい。

学派存廃の重責を担った自分は何をなすべきか、クラインは悩んだに違いない。

1921 年、自身の全集編纂時に付した覚書で、次のように回顧している（[8] p.411）。

> エアランゲンには、新しく任用された教授に、自身のことを同僚諸氏に紹介するための講演があり...... この慣習は、関係諸氏の不便をさしおいても、たいへん値打ちのあるものであった。というのも、新任教授に、自分が重要だと感じている事柄について同僚に講演するという、普通ではありえない機会を与えてくれるだけでなく、**そうした関心事についての自身の考えを明確にすることを強いてくれる**からでもあった。
> （ゴチックによる強調は引用者。）

アントリッツレーデを準備していたとき、彼は自分のことだけではなく、クレプシュ学派の全体、さらにドイツの数学全体に思いを馳せていただろう。

師の庇護の下で過ごした幸福な日々は終わりを告げた。逆風の中、学派を率いて闘っていかねばならな

い。自分で歩き出す前の足固めに何が必要であるだろうか。

今まで自分の中に育ててきた数学という学問への想いに、未来への展望に、この機会に形を与えてみよう。

師を悼む想いのなかで、クラインが書き上げた就任講演（アントリッツレーデ）の草稿が本論の対象である。そこに、自立した、自立しようとしたクラインという人物のすべてが籠められている。そう感じたことが、我々が本論を起草した発端であった。

参考文献

[1] ハンス＝ヴェルナー・プラール『大学制度の社会史』（山本尤訳）法政大学出版局 (1988)

[2] ヒルベルト／クライン 『幾何学の基礎／エルランゲン・プログラム』（寺阪英孝，大西正男訳）共立出版株式会社 （1970）

[3] 堀内達夫『フランス技術教育成立史の研究 – エコール・ポリテクニクと技術者養成 –』 多賀出版 (1997)

[4] 細坪護挙，伊藤 裕子，桑原 輝隆 『忘れられた科学－数学　－主要国の数学研究を取り巻く状況及びわが国の科学における数学の必要性－』文部科学省科学技術政策研究所　Policy Study No.12 (2006/ 5).

[5] James I. : *Remarkable Mathematicians, from Euler to von Neumann*, Cambridge University Press (2002).（日本語訳） ジェイムズ『数学者列伝 II』（蟹江幸博訳）シュプリンガー・ジャパン (2007)

[6] Klein, F. : *Lectures on Mathematics. The Evanston Colloquium*, New York: Macmillan (1894).

[7] —— , Schimmack, R. : *Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. Teil I. Von der Organisation des mathematischen Unterrichts*, Leipzig (1907).（日本語訳）クライン『独逸に於ける数学教育』（林鶴一，武邊松衛訳） 大日本図書 (1921,1922) （部分訳）ペリー／クライン 『数学教育改革論』（丸山哲郎訳）明治図書出版株式会社 (1972)

[8] —— :*Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, (Bd.I, R.Fricke and A.Ostrowski, Eds.) Springer (1921).

[9] —— :*Göttinger Professoren.* Lebensbilder von eigener Hand. Mitteilungen Universitätsbund Göttingen 5, 11-36 (1923).

[10] —— :*Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert.* Teil I, Springer (1926).（日本語訳）クライン 『19 世紀の数学』（石井省吾，渡辺弘 訳) 共立出版株式会社 (1995)

[11] —— : *Handschriftlicher Nachlass*, K. Jacobs. ed. Erlangen (1977).

[12] Manegold, K. :*Universität, Technische Hochschule, und Industrie. Ein Beitrag zur Emanzipation der Technik im 19. Jahrhundert unter besonderer Berücksichtigung der Bestrebungen Felix Klein*, Dunker & Humblot (1970).

[13] 望田幸男編 『近代ドイツ＝「資格社会」の制度と機能』 名古屋大学出版会 (1995)

[14] Parshall, K.H., Rowe, D.E. : *The Emergence of the American Mathematical Research Community 1876-1900: J.J. Sylvester, Felix Klein, and E.H. Moore*, American Mathematical Society, 1994.

[15] Pyenson, L. : *Neohumanism and the persistence of pure mathematics in Wilhelmian Germany*, Memoirs of the American Philosophical Society, Vol.150. Philadelphia : Amer.Philos. Soc. (1983).

[16] Rowe D.E., :*Note: A Forgotten Chapter in the History of Felix Klein's Erlanger Programm*, Historia Mathematica, 10, (1983) 448-457.

[17] —— : *Felix Klein's "Erlanger Antrittsrede", a Transcription with English Translation and Commentary*, Historia Mathematica, 12, (1985) 123-141.

[18] —— : *Essay Review: Felix Klein (Renate Tobies with Fritz Konig; Karl-Heinz Manegold; Lewis Pyenson)* , Historia Mathematica, 12, (1985) 278-291.

[19] Schubring, G. :*Pure and Applied Mathematics in Divergent Institutional Settings in Germany: the Role and Impact of Felix Klein*, The History of Modern Mathematics. Volume II: Institutions and Applications eds. David Rowe, John McCleary, Boston: Academic Press, (1989) 171-220.

[20] Tobies, R.:*On the Contribution of Mathematical Societies To Promoting Applications of Mathematics in Germany, The History of Modern Mathematics*, Volume II: Institutions and Applications eds. David Rowe, John McCleary, Boston: Academic Press, (1989) 223-248.

[21] 上垣　渉 『数学教育改革運動の日本的受容』 三重大学教育学部紀要、 第 49 巻、 教育科学 (1998), 49-72.

[22] 潮木守一 『フンボルト理念の終焉？ 現代大学の新次元』東信堂 (2008)

付　　録

クラインの『エアランゲン・アントリッツレーデ』日本語仮訳

副学長閣下！
同僚諸氏！　学生諸君！
親愛なる御列席の各位！

1 [*6]．新しくこの職に就いた者は、自分の専門分野の、最近の業績の概要を説明するなり、発展の各段階をたどって現況の概観を示すなりするのが慣例となっていますが、私の専門分野の親しみ難い性格のことを考えますと、今日のこの講演は、少しばかり異なる方面をとりあげたほうが良いだろうと思います。実際のところ、数学的な考え方に不慣れな場合に特有な困難さというものがあり、聴衆がそれぞれの分野の専門家であったとしても、数学の講演というものは、いともたやすく、理解し難いものになってしまいます。本日のような場であっても、おそらくそうなってしまうことでしょう。ささやかな数学の知識でさえ広くは知られていないということは、まったくその通りでして、ということは、一般には、最も簡単な数学の概念さえ既知と仮定はできないということなのです。数学自身にとって、このことは、絶対的な損失というわけでもありません。と言いますのも、その結果として秘教的な性格を維持することになりますから、他の諸分野で悩みの種となっている迷惑な素人談義から、比較的自由でいることができます。しかし、全人的観点に立ちますと、広汎な数学的知識の欠如は悲しむべきことです。そうした知識は、実用上の利益をもたらすだけではありません。より重要な意義として、豊穣で高尚な愉楽の源泉となり、数多の科学的領域への参入の前提条件ともなるからです。

2．さらに、広汎な数学的知識の欠如は、より深刻で、重大な問題のひとつの兆候でもあります。つまり、我々の教育のあり方から導かれる必然的な分裂の兆候であり、この分裂は、多方面から原則的には承認を受けているわけです。そう、ここで申し上げているのは、人文系の教育と科学系の教育の間にある分裂のことです。数学と数学に関連のある分野は自然科学に属し、また、自然科学にとって数学は不可欠であると、まさにそう考えられているわけです。一方、内容的に見れば、数学はどちらの範疇にも属しておりません。

3．この場では、一般的な観点について説明するということは、許されているばかりか、望まれてもいるようですから、数学者の立場から、とりわけ私の個人的立場から、この分裂に対する異議の申し立てを行いたいと思います。私の見るところ、この分裂の原因は、ほんの一時的で偶然の事情、すなわち、自然科学というものがつい最近に発展したものであり、したがって、古くからの人文主義的指針にはこうした新しい教育的要素を取りあげるべき場がなかった、という事情に拠っているのです。他方、この新しい研究分野の専門家たちは、他の方面に注意を払うことで手一杯なのです。出来得れば、このような対立は、再度、さほど遠くない将来に、解消をはかるようにして、現在の二極化した諸要素を調和するようまとめあげる、統合された教育を実現したいものです。ご参集の各位に今申し上げたことは、確かに、どこでも述べられたことのない新しい主張であるわけではありません。しかしながら、そのような主張が十分には明確に述べられることが少ないのであります。

4．この統合された観点から様々な学問分野を概観してみますと、数学が一方の端に位置しており、理論力学、物理学と天文学のいくつかの分科といった精密な自然科学の諸分野がその隣に来ていることが見て取れます。こうした分野は、科学的方法の正確さと精密さによって、他のすべての分野から区別されるわけですが、喜んだり悲しんだりというような感情をもった人間の数が本質的であるような場合には、あまり重要な役割を果たすことができません。その際には、しかるべき社会科学が主導的な役割を果たすことになるでしょう。

5．もっとも、こういった問題を、ここで、一般的な形で追求することを望んでいるわけではありません。いずれにしろ、こうした課題は、どこかで十分に考察されていることでしょうから。その代わりに、もちろんこの一般的観点に拠りながらですが、より私自身の関心に近く、皆さんにも興味をもって頂けるような、そういう特別な話題を取り上げさせて頂きたいと思います。お聴き願いたいのは、**数学教育というものの全般的な目的と、大学で実施することが望まれる数学教育の形について**であります。

6．数学は、どんな科学でも同様でしょうが、まず第一に自分自身のために仕事をいたします。その動機は、数学の研究が与えてくれる学識です。あるいは、研究の結果として得られる喜びと言った方が良いかもしれません。この点を、強調しておきます。と申すのも、数学というのは、無味乾燥、退屈な科目で、

[*6] 段落を示す数字は引用の便宜のために付したもので、手稿にはない。

ある種の必要悪だ、などという見解をしばしば耳にしますので、そうではないということを申し上げておきたいのであります。数学的な探求によって生じた相互に絡み合う洞察[*7]の魔力をたとえ一度でも知った者は、二度とそのような言辞を繰り返すことはないでしょう。一本の補助線を引くことで、驚くべき幾何学の真理が突然明らかになるあの喜びを、思い出して欲しいのです。あるいはまた、難解に見える問題が補助方程式を考えることで単純で易しいものに姿を変えた際に、初学者が感じたあの驚きを思い出して下さい。そのような、論理的洞察を通じて得られる受身の喜びの先には、この学問分野で独立した仕事に従事する中での、生産[*8]という比べものにならぬ深い喜びが待っているのです。数学の生産活動が単なる演繹的な活動であるという印象を持ってはいけません。むしろ反対に、最初に必要なことは、常に、帰納的に行うことであり、しばしば類推のみに支えられ、そして、何らかの関係性の正しさを**予言**することなのです。このようにして、そうであると確信した後で、その結論をたどり直さなければなりません。— 徐々に、実際の証明に必要な要素を集め始めることになります。しばしば、すべてが完成した後では、なぜ最初からすぐに全部わからなかったのだろうかとか、どうしてこんなに懸命に考える必要があったのだろうか、などと不思議に思うものなのです。この時点まで来ると、数学的には事が終わりとなり、かくて、ヤコビの有名な言明「数学とは、自身について、自身の内で理解可能な学問である[*9]」が適用されることになるわけです。

７．さて、このあたりで、とても周知とは言えないあることを強調させて頂きたいと思います。我々の学問分野の最近の生産的な活動は、特殊化した研究に限定されているわけではありません。むしろ、全体的に進歩し、他の学問分野が達成していないほどの発展の速さで前進しているのです。現在の数学は、百年前の数学とはまったく似ても似つかぬものになっています。この事実は、数学においては各々の世代が前世代の達成の上に建設することと、一方他の分野ではしばしば新しい建物を建てる前に古い建物を取り壊してしまうことを考えるならば、より意義深いものとなります。ちょうど百年前にラグランジュが基礎を築いた偏微分方程式論は、今日では、解析力学を分科として包含する広範な学問分野となっています。射影幾何が、我々の幾何学の概念を完全に変えてしまう分野へと発展を始めてから、五十年が経ちました。現代的な意味での数論、関数論、いわゆる数理物理学、すべては、同時期に成し遂げられたものです。この場で詳細に立ち入る必要がございますか？　ここで主張したいことは、単に、我々の学問分野は、閉じてもおらず、終わってもおらず、むしろ、他と同様、力強く発展しているということなのです。

８．もちろん、独立した生産活動の喜びは、常に少数者のみが享受し得るものでしょう。少なくとも、私の経験するところでは、誰にでも与えられているわけではないような、特別な素質を必要とします。さて、ここでお許しを願って、数学の能力を、はっきりと非常に異なる何か別の才能、例えば音楽の才能と比べてみたいと思います。数学についてと同様、音楽的に創造的な人間はほんの一握りですが、それでもほとんどの人間は、多かれ少なかれ、完成された音楽を理解できるような教育を受けています。音楽的なセンスがまったくない人というのは、ごく僅かしかいません。同じように、数学的な頭脳を絶対的に持たず、最も簡単な数学的な議論にもまったくついていけない、そして他の点では標準的な能力を持つような人々は、やはり多くはありません。

９．ところで、数学は、自分自身のためだけに存在しているわけではありません。他の諸科学の役に立つためでもあり、その勉学のもつ**形式陶冶的価値**[*10]のためでもあります。

１０．この場で私が数学の応用[*11]と言うとき、あまり通常の意味合いでの応用のことを考えてはいません。自分の専門分野が有益であり重要であることを示すために、学問的な見解の何がしかを他のいろいろな分野の面前へ引き出してみせる、といった意味での応用のことは、ということです。その種の例としまして、数学に関係するものに限って申せば、天文学の予報計算を挙げる者もいるでしょうし、測地学的な測量の精密さを賞賛する者も、工学技術での業績を称える者もいるでしょう。今挙げたような応用について、さらに何か申し上げるつもりは、毛頭ありません。確かに、一般的な人間の生活といった面から申せば、そのような応用は、それを可能とした成果に鑑みて、最も高度で広範な意義をもっていることでしょう。しかしそれは、私が本日の話で考察を進める上で意図してはいないのです。

*7 zusammenhängenden Einsicht
*8 Produktion
*9 原文の die Mathematik die Wissenschaft von den Dingen sei, die sich von selbest verstehen. はドイツ語訳であり、元はヤコビが 1831 年のケーニヒスベルク大学教授就任講演の中で述べたラテン語の Mathesis est scientia earum quae per se clara sunt. である。
*10 formale Bildungswert
*11 Anwendung

１１．「応用」という言葉で私が考えますのは、数学が他の諸科学の発展において果たす、もっと理論的な役割のことです。つまり、数学の勉学がもつ形式陶冶的価値、について考えているのです。この点について、少々お時間を頂き、具体例をあげて、詳しく説明させて頂きたいと思います。取りあげますのは、私自身の受けた教育からとりわけ近しく感じられる、**物理学**への数学的概念の応用であります。同様な考察は、私の知る限り、数学の応用というもの全般に、そして、とりわけ自然科学への応用について、当てはまるものです。

１２．「数理物理学」という言葉は、日常会話で様々な使い方をしているので、混同を起こし易い言葉であります。この言葉は、字義通りには、数学的な思考過程を意識的に用いる物理的な考察を意味しますが、今日では、慣習としてもっぱら、最も広く数学的手法を用いる専門化された物理的考察のことを指しています。様々な分野がありますが、多くの場合、アプリオリな仮定*12に基づいて演繹されたあらゆる種類の現象を、実験的に確かめることに成功しています。その中に含まれている著名な実例として、**光の理論**を思い起こしてみましょう。これは、光学現象の本質を、弾性体の性質を持つ媒体の振動を当てはめることによって説明するものです。それでは、**分子の理論**はいかがでしょう。物体の挙動の根本的な原因を、その物体を星団のように互いに力を及ぼし合う質点の集団とみなすことに見出したのです。

１３．ところで、物理的な研究の中には、同じように数理物理学の名前を冠されはするものの、別な方向性を持つものがあります。一連の経験的な命題*13 を提示し、そこに数学を用いることで、さらなる結果を引き出すといったふうなものです。いわゆる幾何光学などが、こうした研究に含まれます。この分野は、光線の概念と観察から得た反射および屈折の法則から始まり、任意に曲がった鏡や任意形状のレンズの理論へと展開されることになります。こちらの側には、熱伝導の理論やポテンシャル論などが含まれます。

１４．けれど、ここでは詳細に立ち入るつもりはございません。単に、こうした研究分野において数学が引き受けている役割を指摘しておきたいだけなのです。この役割は、常に同じです。その為すべきことは、厳密に定式化された基礎から、さらなる結論*14を引き出すということだけなのです。数学的な立場からは、この基礎というものが、仮設であるのか観測された事実であるのかは、どちらでもよいことなのです。ということは、引き出された結論に現実と一致しないことがあったとしても、それは数学の責任ではありません。一致した場合に功績を認められるのが数学ではないのと、まったく同じことです。いずれの場合も、結果は仮定が正しいか正しくないかに拠るのであって、その正しさを決めることは数学の関心事ではないのです。

１５．こうした場合や、さらに一般的な場合に、数学研究の果たす役割は、単に、**厳密に**与えられた仮定から結論を粛々と引き出すことなのです。数学の本質が公式にあると考えるべきではありません。公式というものは、観念の結合を厳密に記号化したものにすぎないのです。確かに、式の形に表現することが、数学において、ある意味で本質的な役割を果たすということは否定できません。と言いますのも、数学が装いとしている形式であることそのものの純粋科学性が、もう一度さかのぼって多様な示唆を与えてくれることになるのです。しかし、時が過ぎ、背景の思想が忘れ去られ、公式が独裁者と化しますと、数学の仕事としては、計算が容易に出来る限りですが、終わりを告げたものと見なされて参りました。今はそのようなことはありません。我々は、公式が発達していく様を内側から理解したいと望んでいますし、数学的な結果というものは、最初から最後まで自明であると見なせる場合にのみ、完全であると考えられています。

１６．この観点に立てば、数理物理学は、あくまで数学的な側面に注目する限りということですが、幾何学とそうは違わないということになります。そこでは、抽象的な数学的思考を、感覚的*15（直観的*16といった方が良いかもしれません）な領域に適用するわけです。もちろん、数理物理学の方が空間研究より大きな多様性を示しているのは確かなことですが。いずれの場合も、まず手始めに、研究全体の基礎となるいくつかの命題を提示いたします。前者の場合、この仮設のことを法則と呼び、後者の場合は公理と呼びます。数学的にどう展開するかということに限りますと、こうした命題がどのようにして得られたか、つまり実験によるのか、直接的な直観によるのかといったことは、重要ではありません。数学者の仕事は、単に、こうした命題から従う結論を追い求めることだけなのです。仮に、このようにして得られた新しい真理が感覚的直観の領域に戻って適用されたとしましても、はっきり申せば、それはやはり数学の仕事ではないのです。今申し上げたことは、数学の研究は、いず

*12 Annahme
*13 Sätz
*14 Schluss
*15 sinnlich
*16 anschaulich

れかの時点で、感覚的直観から切り離されなければならないということだなどと、お受け取りにならないように願います。むしろこの両者は、いわゆる純粋幾何学がその良い例を与えてくれますように、互いに手を携えて進んでいくものなのです。

１７．これは申し上げておくべきだと思いますが、数学自身にとって、直観的な学問分野とのこうした結びつきは、最高に重要なものなのです。数学の基本的な進展のうち、前世紀になされたものの大部分は、そうした学問分野のひとつである天文学からの要請によるものですし、今世紀の場合は、数理物理学と幾何学が同様な役を演じております。こうした要請に導かれた数学の研究は、最初、一定の流れに沿って進んでいきますが、そのうちに、問題を解決するための直接的な必要性を越えることになり、ついには純粋数学のひとつの分科として展開されることになります。そうなりますと、あまり適切とは言えないのですが、元の名前に応用の文字が冠されることになるわけです。数理物理学の研究と称するものの多くは、実際には、物理学の要素からなる純粋数学の研究であり、いきいきとした感覚的な見解は消え失せてしまっています。そのような研究は、別の範疇に置いた方がよりふさわしいことでしょう。その範疇とは、物理学の要請から生まれ、物理学の用語を使うほうがふさわしい、数学の一分科としての、物理数学*17です。

１８．どうも純粋数学の考察に深入りしすぎたようですが、本意ではございませんでした。最初の頃の話に戻ることにしましょう。物理学者にとっての数学の価値は、応用を通じて得られた知識にあるのではなく、とは申しても、これはこれで過小に評価することもないのですが、それよりはむしろ、純粋数学に取り組むことによる**精神の訓練***18の方にこそ価値があるということでした。この意味では、数学を学ぶことは、ずっと以前からそう認められて来たことでもありますが、科学者一般にとって、かつてなく必要になってきております。ことに、精密研究が、それぞれの学問分野において、ますます広がりつつある以上は。**形式陶冶の具としての数学***19、これこそ、自然科学や医学の学徒が意に留めておくべきことなのです。そう、自然科学系の学生にとって、最初の学期に数学の講義の一つ、二つに出席することは、それだけの価値があることだとおわかりでしょう。どの講義かは、関係ありません。形式陶冶の効を得ることが問題なのですから。結果として精密科学的な見方が強化されることで、時間をかけた埋め合わせは十分にとれると思います。

１９．この提案には異議が出るかもしれません。殊に医学部の学生はすでに負担過多ぎみで、他の多くの活動に加えて数学の勉学のために割く時間を見つけることは不可能かもしれないことには、私も同意せざるを得ません。実際上、この状況はさらに難しい問題を孕んでおります。数学の講義から益を得るためには、単に聴いていれば良いというわけではないのです。自分自身で、着実に、そして、熱意をこめて、勉強しなければなりません。数学的な思考が、一時的に高められるということは起こり得ないのです。何より実践しないといけないわけです。今申し上げていることは、他の場面においても強く感じている、非常に難しい問題なのです。

２０．したがって、我々が強く求めなければならないことは、現今の教育機関における教育課程では誰しもが数学的な考え方に接することが出来るようなものであるべきだということであり、さらに**ギムナジウム**では、数学を、ほんの少数の賞賛に値する例外はあるのですが、今よりももっと熱意をもって教えるべきだということなのです。要求していることは、週当たりの数学の授業時間数を増やすことではなく、教える内容を多くするということでもなく、本質的な修正をしようというものでもありません。望まれるものは、数学に対するより多くの興味であり、授業に対するより豊かな生命であり、そしてその取扱いに対するより多くの心なのです！ 学校関係者の間でしばしば囁かれ、かなり広まっている見解に、数学などさほど大事なものではない、というものがあります。とても困ったことに、しばしば実際上の教育的要素を少しも持たないような数学の授業が行われるために、この意見が正当化されてしまうことが多いことなのです。数学の計算に特有な感覚を発達させたり、いきいきとした、直観的な幾何学を自分のものにするのを支援するかわりに、授業時間を、頭を使わない形ばかりの学習や、原理原則のない浅薄な手練手管の練習でつぶしたりするのです。学ぶのは、何の意味も持たない技巧的でやたらと長い式を簡単にすることや、ちょっとした秘訣を知らなければ手をつけることすら出来ないような人為的に作られた方程式を解くための不断の努力になってしまっています。この種の鍛錬を受けた学生が、自前の着想を発展させることや、不慣れな問題を解くことを要求されたとしても、そもそも、こうした学生は、自分なりの第一歩を見つけるための術すら欠いていることでしょう。

２１．我々、大学の数学教員にとって、大いに得る

*17 physicalischen Mathematik
*18 Schulung des Geistes
*19 Mathematik als formales Bildungsmittel

ことが期待できる広大な活動領域が、ここにあるのです。つまり、今述べた通りの意味において、将来の教員候補である学生[*20]に対する数学教育の水準を、長年にわたって見られなかった高みにまで、引き上げるという仕事です。我々が良き教師を育てれば、数学教育は自ずから良くなっていきます。古くにあてがわれた型枠が、新たに賦活された中身で満たされるように、そうなっていくのです！ 近年、こうした方面で活動する若手教員はけっして少数ではありませんから、状況はすでに多くの面で改良されてきています。こうして、志を同じくする我々としては、そう遠くない将来に、**ギムナジウム**の数学教育に本質的な改革がなされるものと期待しているのです。

２２．以上の理由をもって、我々、大学教員は、学生諸君に自らの勉学を完成させるだけでなく、何が学校[*21]で教えられるべきであるかを知ることも、望みたいと思います。将来の教師たる者は、自分が教える題材の**上**に立って[*22]欲しいのです。専攻分野の学識の現状を了解し、全体として将来の発展に置いていかれないだけの力を身につけて欲しいのです。それゆえ、学生諸君には、十分に深くまで進んでおくため、少なくとも一度は独立した研究に従事するということを望みます。後で科学研究に携わる者など十人に一人もいないでしょうが、一度でもそうした研究を完成させたことのある者なら、異なる種類であっても、確実な判断力やいきいきとした着想を我が物としているはずなのです。

２３．もちろん、この高度な課題のためには、大学の教育の改良も必要です。一定の学識全体を究明しつくすというよりも、自由で流暢な講義をして、ある方向に活気を与えるという流儀が、今に変わらぬものでした。けれども、最近では、数学的な演習室[*23]と学生諸君が参加するゼミナール [*24]が、大いに注目を集めています。こうした種類の教育方法が、今、大学教育の将来の発展のための要となるべき点なのです。**これこそ、必要なのです。**まあまあ講義についていくことができ、疑問を感じないで内容を理解できたと思うことと、同じ内容であっても、それを、まだその分野に慣れていない他の者たちが同様に理解するまでに講義できるということとは、まったく違ったことなのです。訓練が必要なのは、題材を論理的に提示するような講義の技巧ではなく、本質的なものとそうでないものとを仕分ける能力なのです。他には、幾何学的な製図や模型作成の演習の時間も欲しいところです。空間認知力はこの種の補助を必要としないということを、ときおり耳にしますが、それは、製図と模型の実習によってすでにこの認知力を身につけてしまった者についてのみ、言えることなのです。私の専門分野の学生にとって、この種の学習が必要なことは、ほんの短い間であってもですが、自然科学の学生にとって「実験実習」が必要なことと、まったく同じに思えます。

２４．この点に関しまして、あまり良い比較ではないかもしれませんが、大学とポリテクニク系学校[*25]を比べてみたいと思います。工科系学校[*26]では、数学の講座の数が大学よりも多いわけですから、学生は授業の選択肢がより豊富に得られます。ひとつの町に大学とポリテクニク系学校の両方がある場合、通常、大学の教育課程に大きく欠けているところを後者が埋めているというのは、よくあることです。とりわけ、ポリテクニク系学校では、実用的な演習が高度に発達してきております。その上、中心的な内容は、講義等々で順序だてて繰り返すのです。状況はまさに、少なくとも数学的な理由だけで決定するのであれば、最初の二年間はポリテクニク系学校で教育を受けるよう、数学の学生には助言をするしかないでしょう。その後、大学に入学し、教員と個人的に接触して独立した研究をすることができるのです。

２５．さしあたり、以上が大学が提供可能な数学教育に関する状況です。もっとも、ずっとそうなることを望んで参ったような**ウニウェルシタス・リテラールム**[*27]なるものを堅持しようとされる限り、これは望み得ないことでありましょう。講義の練習のためと独立した研究のための数学のゼミナール、そして次に、実際に授業で役立つような建設的な演習のためのゼミナール、その設置こそが喫緊の課題なのであります。

[*20] späteren Schulamts-Kandidaten 。正確には、教育省の資格試験の受験者の意。
[*21] Schule おおむね初等・中等学校を指す。
[*22] *über* seinem Stoffe steht
[*23] die Einrichtung mathematischer Übungen
[*24] die Selbstbeschaeftigung der Studirenden in Seminaren
[*25] Polytechnikum
[*26] technische Lehranstalt
[*27] Universitas literarum（文芸による大学）、新人文主義者の構想した全人教育を謳う大学（教育）のこと。

[27] 三重大学教育学部研究紀要　第 60 巻　教育科学 (2009)　215-236 頁