

# 10個の数で作る力学グラフ

## — 日本数学協会の発足に際して —

蟹江幸博\*

### §1. はじめに：数の博物学の復権

日本数学協会が生まれます。プロとして数学をするのでなく、受験のために数学をするのでなく、教育をするためにと数学をいじるのでもなく、ただ数学が好きだというだけが目的の団体です。

参加する動機や目的も何でなければならぬというわけではない。ただ数学が好きで、数学することが楽しくて、分かったら嬉しくて人に話したくなる。聞いてくれる人いませんか。そういう人の思いが集まってできたのが日本数学協会です。

何をするといいかはこれから参加する人の活動が決めて行くのです。入ったら何がして貰えるのかと問うのでなく、数学（の文化）のために自分に何が出来るかを考えるところです。

参加する人が色々なことを提案し、色々なことをやってみて、色々な人が色々なことを話し合う。年に一度は集まってみる。雑誌があるから投稿してみる。ポツになったらまた挑戦。昔、算額でやったように問題を出し合ったり、面白いことが分かったら自慢し合ったり。地域で小さい集まりを持つのもよし、ホームページで意見を交換するのもよし、自分にできること、したいことを、何でもやったらいい。それを、協会としてサポートできるような形になればいいと思う。

世の中には数学が好きでない人が結構沢山います。教育の場ではそれが問題視されますが、たまには、何もすべての人が好きにならなくてもいいじゃないかと、開き直ってみることにしましょう。数学が好きだと言うと変人のように見られかねない世の中で、好きだぞ！と言って肩でも組めるような集まりがあるのはいいことだと思いませんか。それが出来れば嬉しいですね。

でも数学はなかなか楽しんで貰えない。他の学問なら、アマチュア愛好家がこんなに肩身の狭い思いをしてないような気がする。どうしてでしょうか。

---

\*三重大学教育学部数学

蝶やトンボやカブトムシを捕まえて標本にする．化石を拾い集めて標本にする．変わった奴だと言われても，世間の目には温かさがある．でも，数学だと妙に冷たい．ほらこんな綺麗なと言って見せようとしても，綺麗であることは普通の人には分からない．易しく丁寧に説明しようとするほど嫌われる．揚げ句に，貴方ほど頭が良くないのでわかりませんよ，と慇懃無礼が返ってくる．

数学が好きだという人の間でも，知識が少し違うだけで，言葉も通じない．数学が余りに進歩して，今や面白いことに行き合うには，沢山の勉強をしなければいけないような強迫観念じみた雰囲気がある．で，今や数学が好きだと言い難い．

大道芸を見せながら，数学行脚する強者もいるが，誰にもできることではない．それに，大道芸は数学芸なわけではない．数学文化が大衆化するわけでもない．数学文化は数学自体の文化でなければウソだ．そういう数学はあるだろうか．

数学でも標本集めのようなことは出来ないか，と考えてみた．理論化・体系化が進んだ数学に，今さら標本作りの面白さが残っているだろうか．数学的な何かを集めて，標本にして見せ合う．それだけで楽しい．そんな対象が残っているだろうか．スローガンとして言えば，数学に博物学をする余地が残っているだろうか，ということなのだ．

筆者はまた，長年教育学部で算数・数学の教師の予備軍を教えてきた．そして，その教え子たちが働く現場の状態が劣化して行き，それを自分たちの努力で克服できるだけの実力を付けてやることができなかつたことに心を痛めてきた．数学の勉強をあまりしていなくても教師になることができるように，基準を変えてしまった文部省を非難しても仕方がない．さらには，最大の被害者である子供たちのことも考えてきた．これまでのカリキュラムとは全く別に，教師や外からの評価とは関りなく，子供たちが自分自身の興味と価値観で，学習が続けられ，出来れば各自で発展させられる教材はないかとも考えてきた．近年，それに一応の解答が得られたのでは，と考えている．そして臨床数学教育という名で，他人の評価にも指導制度のスケジュールにも関りのない，学習者自身の状況に合わせた，自己教育としての数学教育を提唱することにした．そして，それが可能なように介助する役割を果たすためだけの「教師」のあり方を提唱した．この「教師」は父兄であっていいし，地域の年長者であっていいし，友だちでいいし，もちろん教師であっていい．そうした立場からの記述は，[1] や [5] にある．

臨床数学教育はまた，そのために使うことのできる教材を作ることと，その用い方が重要である．色々な教材が候補として考えられ，[1] に挙げてあるが，中でも一番有望なのが，力学グラフである．それはまた，数の博物学のフィールドになり得るものであると考えることができる．本稿では，博物学的観点を強調して，力学グラフ（理論）の一断面を切り取って見ることにしたい．

## §2. 博物学の候補：力学グラフ

力学グラフは小学生にも理解でき、数学嫌いで登校拒否を起している児童・生徒にも楽しいと思わせることが可能な内容を含んでいる。そのような提示の仕方もある。しかしそのためには、丁寧に、何度でも繰り返しをいとわない記述が必要となる。残念ながら、今回はそれほどのページ数が確保出来ない。本稿の数学部分が力学グラフの一断面であるとは言っても、それ自体ゆったり記述すれば優に一冊の本にもなるほどの内容を含んでいて、それをまた小出しにすれば力学グラフの妙味が伝わらない。仕方がないので、高度な数学を述べるような言葉遣いをアーカイブとして利用し、10分の一ほどのサイズに圧縮することにした。

そうは言うものの、じっくりと時間をかけ、自分で図を描きながら読み進んでいただければ、高校生くらいの数学の熟練度があれば、十分どなたにでも理解して頂けるように書いたつもりである。時間がなく、それでも理解したいと思われる方は、数学的言葉遣いや概念に慣れた人を探して、最初の部分だけでも翻訳して貰うことも、一つの方法かも知れない。このような（数学理解のための）最初の障害を取り除くということも、この協会の存在意義であるべきだと考えているのだが。

さて、これから先は、如何に易しいとはいえ数学である。紙とペンを持って読んで欲しい。

筆者は [5] で、臨床数学教育の教材例として力学グラフを挙げている。いわば、数学に興味を持たなくなった児童・生徒の心に、数学を育てる為の土壌を作るために考えたのが臨床数学教育なのである。きちんとした数学を勉強するためには、まず何より、数の計算が出来ることであり、それもある程度の速さで出来ることである。そのための計算練習も、それ自体面白いのだが、面白いと思えるようになる前に拒否反応を起こしている子供が多い。力学グラフは計算に付加価値を与えるものである。ある計算をするとあるグラフが出来る。別の計算をすると別のグラフが出来る。ほんの少しの違いでも、全く別のグラフになることもある。それを1つずつ採集し、分類する。分類の仕方に数学的センスが生きる。

[5] では加法グラフ  $A_k^a$  ( $k \leq 9$ ) と、 $A_{12}^a$  を中学生用に分かり易い表現を使ったものの図を紹介している。本稿では、頂点数が10個の場合に限って、力学グラフのアイデアと基本的な問題を、例を挙げながら説明してみることにする。力学グラフの標本というか図鑑を作ろうということでもある。

記号の意味は後で説明するが、グラフ自身は独立したページ（グラフのページ）に、加法グラフ  $A_{10}^a$ 、乗法グラフ  $M_{10}^a$  と2桁の反転差  $D_2$  とその加法変形  $(D_2 A_{100}^a)'$  と乗法変形  $(D_2 M_{100}^a)'$  を挙げておく。以下の記号や概念の説明は、その図を必ず参照し、できれば自身でも描いてみながら読んで欲しい。

挙げたグラフの分類に必要な最小限の言葉の準備をしよう．詳しくは [5], [4], [6] を参照のこと．また他のタイプの力学グラフについては, [5] でもざっと触れているが, 詳しくは [2], [4], [6] を参照されたい．

### §3. 力学グラフの基本用語：加法グラフと乗法グラフを例として

整数  $v > 0$  に対して,  $v$  個の自然数の集合  $I_v = \{i \in \mathbb{N} \mid 0 \leq i < v\}$  を考え, それを頂点集合とする有向グラフを考えるのである． $I_v$  の上の変換  $f: I_v \rightarrow I_v$  を考えることに,  $G(f) = (I_v, E(f))$  という力学グラフが得られる．

その説明をしよう (例は後で沢山出てくるので, グラフのページを参照しながら以下の説明を見てください.)

グラフは一般に, 頂点集合  $V$  と辺の集合  $E$  の対  $G = (V, E)$  として表わされる．有向辺は頂点を 2 つ並べた  $(i, j)$  で表わし,  $i$  を始点,  $j$  を終点と呼び, 平面の上に  $i$  から  $j$  への矢印で表わすのである．

今の場合, 頂点集合は  $V = I_v$  であり, 各  $i$  に対し  $(i, f(i))$  を有向辺としている．

すぐにわかることをいくつか述べておく (必ずグラフのページの図を見ながら読んでください.)

有限の  $v$  に対しては, どんな  $f$  に対しても  $G(f)$  は平面グラフになる．つまり, 辺同士が端点以外で交わらないように, 平面上に頂点と辺 (曲線で表わしてもよい) を配置することができる．そのときにすべての点が辺で結ばれているなら,  $G$  を連結であると言う．連結な部分グラフで極大なものを連結成分と言う．厳密に定義するのは結構面倒なので, 例で納得してもらおう．加法グラフのとき,  $A_{10}^1, A_{10}^3$  は連結グラフであり,  $A_{10}^2, A_{10}^4$  は連結でなく, 連結成分の数は 2 である． $A_{10}^5$  も連結でなく, 連結成分の数は 5 である．

また,  $A_{10}^1$  はすべての頂点が 1 つの輪のように結ばれている．このようなものをサイクルと言う． $A_{10}^2$  には 2 つのサイクルが,  $A_{10}^5$  には 5 つのサイクルがある． $A_{10}^0$  は乗法グラフ  $M_{10}^1$  と全く同じグラフで, 10 個のサイクルがある．

サイクルに属する頂点の数  $p$  は, 取りも直さず  $f^p(i) = i$  となる最小の自然数であり, サイクルの周期と言う．とくに, 周期 1 のサイクルは 1 点からなり, 不動点とも呼ばれる．

加法グラフ  $A_{10}^a$  の定義をしておこう． $A_{10}^a = G(f)$  となる写像  $\alpha^a = f$  を

$$\alpha^a(i) = i + a \pmod{10}$$

と与えればよい (グラフを見て確かめてください.)

加法グラフはサイクルだけからなることがわかる． $a$  をいろいろと変えても加法グラフは 10 種類しかないことも  $A_{10}^a = A_{10}^{a+10}$  であることからわかる．これはまた  $\alpha^a(i) = \alpha^{a+10}(i)$  からわかる．

頂点の名前だけが違っていても、グラフの形が全く同じのときに同形と言う（数学的に厳密な定義は今のところ [6] にしかないが、感覚的には図と以下の例示で納得してもらえらると思う．） $v = 10$  の加法グラフの同形類は 4 つで、代表系はたとえば、 $\{A_{10}^a \mid a = 0, 1, 2, 5\}$  と取れる．連結成分の数  $c$  はそれぞれ、 $c(A_{10}^0) = 10, c(A_{10}^1) = 1, c(A_{10}^2) = 2, c(A_{10}^5) = 5$  で、 $c$  の値だけで分類が済む．

乗法グラフ  $M_{10}^a$  の定義は、

$$\mu^a(i) = i \times a \pmod{10}$$

と与えて、 $M_{10}^a = G(\mu^a)$  とすればよい（グラフを見て確かめてください．）特に、 $\alpha^0(i) = \mu^1(i) = i$  であり、恒等写像に対応するので、 $A_{10}^0 = M_{10}^1$  を恒等グラフという．

$a$  をいろいろと変えても乗法グラフは 10 種類しかないことも  $M_{10}^a = M_{10}^{a+10}$  であることからわかる． $v = 10$  の乗法グラフの同形類は 8 つで、代表系はたとえば、 $\{M_{10}^a \mid a = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$  と取れる．

乗法グラフはサイクルだけからなるとは限らない．つまり、サイクルにサイクルの外から来る矢印がある．それを記述するために、次数を定義しよう．

力学グラフの定義から、各頂点  $i \in I_{10}$  に対し、 $i$  を始点とする（有向）辺はただ 1 つ  $(i, f(i))$  である．そこで、 $i$  を終点とする辺の個数を  $i$  の次数と呼び、 $\deg i$  と書く．加法グラフのように、全体がサイクルなら、すべての頂点の次数は 1 である．こういう場合、次数特性  $\mathbb{D}$  は  $1^{10}$  という．次数が 1 の頂点が 10 個あるという意味である．

しかしたとえば、 $M_{10}^2$  なら、 $\{2, 4, 6, 8\}$  は周期 4 のサイクル、 $\{0\}$  は不動点だが、それらの頂点の次数は 2 であり、それ以外の頂点の次数は 0 となっている．この場合の  $\mathbb{D}$  は  $(0^5, 2^5)$  と書く．

一般に ( $v = 10$  でないときも)

$$v = \sum_{i \in I_v} \deg(i)$$

となっている．

しかし、次数の様子を見なくても、乗法グラフだけなら分類できる．連結成分の数は  $c(M_{10}^0) = 1, c(M_{10}^1) = 10, c(M_{10}^2) = 2, c(M_{10}^3) = 4, c(M_{10}^4) = 3, c(M_{10}^5) = 2, c(M_{10}^6) = 5, c(M_{10}^9) = 6$  となり、1 対を除けば、 $c$  の値だけで分類が済む．例外は、 $M_{10}^2$  と  $M_{10}^5$  だが、グラフを見れば明らかに違う．その違いは、連結成分の

頂点数を並べたサイズ特性  $\mathbb{V}$  を比べれば,  $\mathbb{V}(M_{10}^2) = (2, 8)$  と  $\mathbb{V}(M_{10}^5) = (5, 5)$  となって, わかる.

加法グラフと乗法グラフを合せたものを分類するには, 次数を考えればよい. 加法グラフと乗法グラフの中で, 連結成分の数  $c$  とサイズ特性  $\mathbb{V}$  が同じものは, 恒等グラフを除いて次の3対である.

	$A_{10}^1$ と $M_{10}^0$	$A_{10}^2$ と $M_{10}^5$	$A_{10}^5$ と $M_{10}^6$
$c$	1	2	5
$\mathbb{V}$	10	(5, 5)	$2^5$

ここで,  $2^5$  は  $(2, 2, 2, 2, 2)$  のことを意味するとする (単に, 場所を節約するためで,  $2^5 = 32$  と計算してはいけません.)

上の注意から, 加法グラフに対しては,  $\mathbb{D}(A_{10}^a) = 1^{10}$  であるが, 乗法グラフに対しては,  $\mathbb{D}(M_{10}^0) = (0^9, 10^1)$ ,  $\mathbb{D}(M_{10}^5) = (0^8, 5^2)$ ,  $\mathbb{D}(M_{10}^6) = (0^5, 2^5)$  となっていて, 次数特性が異なるので, 同型でない.

しかしこれらは, 別のものでも区別できる (有限) 力学グラフでは, 各連結成分には必ず1つサイクルが存在し, 2つ以上のサイクルを含むことがないことがわかる. そこで, 各成分に含まれるサイクルの周期を並べた周期特性  $\mathbb{P}$  を考えることができる. 加法グラフのように, サイクルの直和になっていることは, 特性の言葉で  $\mathbb{V} = \mathbb{P}$  と表わすことができる.  $M_{10}^a$  ( $a = 0, 5, 6$ ) に対しては, この2つの特性が異なっているため, 上の3対はそれぞれ同型でないことがわかる.

$A_{10}^a$  と  $M_{10}^a$  の不変量の表をまとめておこう (グラフを見ながら確認してみてください.)  $M_{\mathbb{H}, \mathbb{L}}$  の意味は次節で説明する.

	$a$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$A_{10}^a$	$c$	10	1	2	1	2	5	2	1	2	1
	$\mathbb{V} = \mathbb{P}$	$1^{10}$	10	$5^2$	10	$5^2$	$2^5$	$5^2$	10	$5^2$	10

$\mathbb{D} = 1^{10}$ ,  $M_{\mathbb{H}} = 0^c$ ,  $\mathbb{L} = (0; 10)$

$a$	$c$	V	P	MH	D	L
0	1	(10)	(1)	1	$(0^9, 10^1)$	(9; 1)
1	10	$(1^{10})$	$(1^{10})$	$0^{10}$	$(1^{10})$	(0; 10)
2	2	(2, 8)	(1, 4)	$1^2$	$(0^5, 2^5)$	(5; 5)
3	4	$(1^2, 4^2)$	$(1^2, 4^2)$	$0^4$	$(1^{10})$	(0; 10)
$M_{10}^a$	4	$(2, 4^2)$	$(1, 2^2)$	$1^3$	$(0^5, 2^5)$	(5; 5)
	5	$(5^2)$	$(1^2)$	$1^2$	$(0^8, 5^2)$	(8; 2)
	6	$(2^5)$	$(1^5)$	$1^5$	$(0^5, 2^5)$	(5; 5)
	7	$(1^2, 4^2)$	$(1^2, 4^2)$	$0^4$	$(1^{10})$	(0; 10)
	8	(2, 8)	(1, 4)	$1^2$	$(0^5, 2^5)$	(5; 5)
	9	$(1^2, 2^4)$	$(1^2, 2^4)$	$0^6$	$(1^{10})$	(0; 10)

#### §4. 同型と変形：対称差の変形

加法グラフと乗法グラフだけでも，頂点数  $v$  を変えて行けば非常に多様なものが得られるし，異なる  $v$  のグラフを比較したり，変形したりすると，初等整数論の基礎的な部分は，グラフの言葉で述べることができ，証明というより納得の提示が可能になる．それはまた別の機会にすることにして，ここでは  $v = 10$  に限定して，もっと複雑な力学グラフを考えてみたい．

加法グラフや乗法グラフの場合，平面上での図の描き方を工夫すれば，多様な対称性を持っていることがわかる．このこともまた別の機会にしよう！「複雑」というのは，そういう対称性が少ないという意味でもある．そういう場合，不変量はもっと複雑なものが必要になってくるのである．

さて， $v = 10$  を一旦忘れよう．[4] では，反転差グラフを考えた．桁数  $k$  を固定して，高々  $k$  桁の数の上の力学グラフを考える．つまり， $V = I_{10^k}$  とする． $x \in V$  に対して， $x$  を  $k$  桁の数として反転させたもの  $\bar{x}$  を考え，大きい方から小さい方を引いたものを与えるという写像を考えるのである． $k = 1$  の場合には  $M_{10}^0$  が得られる．上記論文で，さらに  $k = 2, 3, 4$  の場合を調べている． $k = 4$  の場合が元々の興味の対象であり，それ以外はその考察の準備として扱ったものである，その論文を読んだ人には， $k = 2$  の場合は簡単過ぎて，面白いようにも思えないかも知れない．

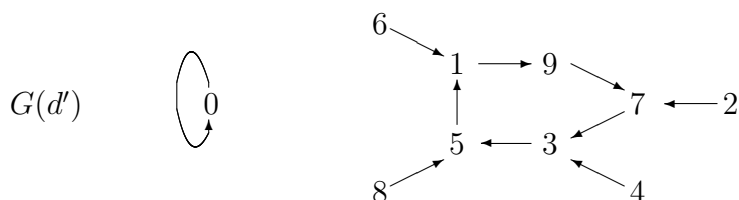
少し丁寧に見てみよう． $V = I_{100}$  で， $x \in V$  は  $x = 10a + b$  ( $0 \leq a, b \leq 9$ ) と表わされる．すると  $\bar{x} = 10b + a$  であり，問題の写像は

$$d(x) = |(10a + b) - (10b + a)| = 9|a - b| \quad (x = 10a + b \in V)$$

と表わされる． $D_2 = G(d)$  が 2 桁の対称差グラフである．ただ，頂点数が 100 個もあるグラフを扱うのは複雑過ぎるようにも思えるが，この場合には構造を簡略化することができる．

写像の形から， $d$  の像は  $V' = \{9i \mid 0 \leq i \leq 9\}$  であり， $d(V') \subset V'$  である．つまり，力学グラフ  $G(d)$  は単位時間後に  $V'$  上のグラフに縮小してしまうのである．このグラフをもとのグラフ  $G(d)$  の導グラフと呼び， $G'(d)$  と書く．本稿では頂点数  $v$  が 10 のときの力学グラフに制限しての標本づくりなので，この  $G'(d)$  を単に対称差グラフと呼ぼう．グラフのページに， $G'(d)$  の名前で挙げてあるものである．

$\varphi : I_{10} \ni i \mapsto 9i \in V'$  は明らかに全単射で， $d' = \varphi^{-1} \circ d \circ \varphi$  を考えると， $I_{10}$  上の力学グラフ



が得られる．これは一目見て， $I_{10}$  上の加法グラフでも乗法グラフでもないが，サイズ特性が  $\mathbb{V} = (1, 9)$  であることから分かる．平面上にどのように描いてみても，向きを保つ対称性は得られない．確かに対称性の度合は落ちているようだ．

ところで，一般に頂点集合  $V$  上の全単射  $\varphi$  が与えられたとき， $G(f)$  と  $G(\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi)$  とは，頂点の名前が変わるだけで，グラフの形は同じになり，同型であると言い， $G(f) \cong G(\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi)$  と書く．たとえば， $A_{10}^1 \cong A_{10}^3$  であることは， $\alpha_{10}^1 = (\mu_{10}^3)^{-1} \circ \alpha_{10}^3 \circ \mu_{10}^3$  であることからわかる． $\mu_{10}^3$  が全単射であることは， $M_{10}^3$  がサイクルの離散和であることから分かる．また， $A_{10}^a$  の 4 つの同型類のそれぞれの元の個数が 1, 1, 4, 4 であることは， $M_{10}^3$  の成分数が 4 で，サイズ特性が  $(1^2, 4^2)$  であることの反映であることも分かる．

ここで  $\varphi$  が全単射でないときのことを考えてみる．逆写像がないので， $f \circ \varphi$  を考えてみて，さて，それに意味があるのだろうか．意味を考える前に，名前をつけてしまおう．名前を付ければ，考えるのが楽になる．それも数学の大きな効用の 1 つである． $V$  上の変換  $f, g$  に対して，合成写像  $f \circ g$  が考えられる．そこで，力学グラフ  $G(f \circ g)$  を  $G(f)$  と  $G(g)$  の積と呼び， $G(f)G(g)$  と書く． $g$  を変数変換と思えば，写像  $f$  のある種の変形と考えられる．恒等グラフ  $A_v^0 = M_v^1$  は， $I_v$  上の力学グラフに対して，この積に関する単位元になっている．

加法グラフの加法グラフによる変形  $A_{10}^a A_{10}^b (= A_{10}^{a+b})$  (加法変形と呼ぼう)，加法グラフの乗法変形  $A_{10}^a M_{10}^b$ ，乗法グラフの加法変形  $M_{10}^a A_{10}^b$ ，乗法グラフの乗法



変形  $M_{10}^a M_{10}^b (= M_{10}^{ab})$  は元の 2 つのグラフだけを見て描いて行くことができ、それなりに面白いのだが、今回は読者に残しておくことにする。

ここでは、どうしても計算が必要で、変形がより意外なグラフを生んでくれる、対称差グラフ  $G'(d)$  の変形を考えてみたい。一旦  $V = I_{100}$  の中に戻してグラフの積

$$G(d)A_{100}^b = G(d \circ \alpha_{100}^b), \quad G(d)M_{100}^b = G(d \circ \mu_{100}^b)$$

を考える。

$$d_b = d \circ \alpha_{100}^b, \quad \tilde{d}_b = d \circ \mu_{100}^b$$

による  $I_{100}$  の像も  $V'$  であるから、それらの導グラフ  $G'(d_b)$  と  $G'(\tilde{d}_b)$  もまた頂点数が 10 の力学グラフになる。これをそれぞれ、対称差グラフ  $G'(d)$  の加法変形、乗法変形と呼ぼう。グラフのページに、 $b \leq 20$  まで挙げてあるが、その多様さに驚く。連結成分の数は変わる、サイクルの周期は変わる、次数の分布も変わる。なぜそうなるかも面白いが、ここでは単に変わることの面白さを楽しむことにしよう。

頂点数が 10 の力学グラフの収集という観点からは、 $\varphi$  を使って  $I_{10}$  上で表現した方がよいが、ここでは、計算のチェックが容易にできるようにこの形のままにしている。この形なら定義から、暗算でグラフのチェックも難しくない人も多いだろう。出来れば、すべてのグラフが定義から正しく得られていることを、各自確かめてみて欲しい。そうすれば、この簡単な計算で、このように複雑で多様な世界が浮かび上がってくる驚異を味わうことができる出来るだろう。

一目見る限りは、どれもこれも違うグラフに見えるが、順に見て行けば、確かに  $b \leq 10$  までは異なるものしか出て来ない。紙数の都合上  $b \leq 20$  までしか挙げていないが、原理的には  $b \leq 99$  までは異なるものが現れる可能性がある。さて、グラフのままでは何が異なり、何が同型かは矢張り分かりにくい。

注意：恒等グラフに関する上の注意から、 $G'(d) = G'(d_0) = G'(\tilde{d}_1)$  となっている。

そこで、前節で行ったように力学グラフの不変量を求めてみる。まず、 $b \leq 10$  までの表を書いて、その説明をすることにしよう。

$c, \mathbb{V}, \mathbb{P}, \mathbb{D}$  の説明は前節でしたが、加法変形  $G'(d_b)$ ,  $0 \leq b \leq 10$  は  $b = 2, 8$  以外は  $c, \mathbb{V}, \mathbb{P}$  の値だけで区別される。 $G'(d_2)$  と  $G'(d_8)$  はグラフを見れば確かに違うが、次数特性  $\mathbb{D}$  は同じである。そこで、最大高さ特性  $M_{\mathbb{H}}$  を考える。その説明をしよう。

どんな連結力学グラフ  $G(f)$  にも 1 つだけサイクル  $C$  があり、頂点  $v$  の高さを  $\min\{k \geq 0 \mid f^k(v) \in C\}$  とする (サイクルに属する頂点の高さは 0 であり、サイクルに属さない頂点については何回  $f$  で動いたらサイクルに落ち込むかという数を表わしている。) 連結力学グラフの最大高さを、頂点の高さの最大値とし、

一般の力学グラフに対しては，連結成分ごとの最大高さを並べたものとするのである．たとえば，加法グラフ  $M_{10}^a$  の場合はサイクルだけからなるので，0 を連結成分の数  $c$  だけ並べたものになり，それを  $0^c$  と表わすのである．

$G'(d_2)$  と  $G'(d_8)$  の最大高さ特性  $M_{\mathbb{H}}$  は異なっており，力学グラフとして異なっていることがわかる．

乗法変形  $G'(\tilde{d}_b)$ ,  $0 \leq b \leq 10$  はすべて  $c, \mathbb{V}, \mathbb{P}$  の値だけで区別される．また， $G'(d_b)$ ,  $G'(\tilde{d}_b)$ ,  $0 \leq b \leq 10$  の間では自明なもの以外は， $G'(d_4)$  と  $G'(\tilde{d}_6)$  以外は  $c, \mathbb{V}, \mathbb{P}$  の値だけで区別される．この対に対しては， $M_{\mathbb{H}}$  も一致しているが，次数特性  $\mathbb{D}$  が異なっていて区別できる．

$G'(d_b), G'(\tilde{d}_b)$ ,  $0 \leq b \leq 10$  は，ただ1つの例外を除いて，加法グラフや乗法グラフのどれとも同型ではない．その例外は  $G'(\tilde{d}_6)$  で， $\varphi$  によって  $M_{10}^9$  と同型になる．対称性の度合が変形によって上がる不思議さは，分かっただけで当たり前だが，今回は宿題にしておこう．

$b$	$c$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{P}$	$M_{\mathbb{H}}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{L}$
0	2	(1, 9)	(1, 5)	(0, 1)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4; 6)
1	2	(5, 5)	$(1^2)$	(3, 3)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(0; 10)
2	1	(10)	(1)	(6)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	$(4, 1^5; 1)$
3	2	(3, 7)	$(1^2)$	(2, 4)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	$(4, 2, 1, 1; 2)$
4	2	(1, 9)	$(1^2)$	(0, 4)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	$(4, 2, 1, 1; 2)$
5	2	(3, 7)	(1, 2)	(2, 2)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4, 3; 3)
6	2	(4, 6)	$(1^2)$	(3, 3)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4, 2, 2; 2)
7	2	(3, 7)	(1, 3)	(2, 2)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4, 2; 4)
8	1	(10)	(1)	(5)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	$(4, 2, 1^3; 1)$
9	3	$(2^2, 6)$	$(1^2, 3)$	(1, 1, 1)	$(0^5, 2^5)$	(5; 5)
10	1	(10)	(2)	(4)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	$(4, 2, 1, 1; 2)$

$b$	$c$	V	P	MH	D	L
0	1	(10)	(1)	(1)	$(0^9, 10^1)$	(9; 1)
1	2	(1, 9)	(1, 5)	(0, 1)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4; 6)
2	2	(3, 7)	(1, 3)	(2, 4)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4, 2, 1, 1; 2)
3	2	(1, 9)	(1, 3)	(0, 3)	$(0^3, 1^5, 2^1, 3^1)$	(3, 2, 1; 4)
4	1	(10)	(1)	(4)	$(0^5, 1^1, 2^4)$	(5, 2, 1, 1; 1)
5	4	$(1^2, 4^2)$	$(1^2, 4^2)$	$(0^4)$	$(1^{10})$	(0; 10)
6	2	(1, 9)	$(1^2)$	(0, 4)	$(0^3, 1^5, 2^2)$	(3, 2, 2, 1; 2)
7	2	(1, 9)	(1, 2)	(0, 2)	$(0^6, 1^1, 3^3)$	(6, 1; 3)
8	2	(5, 5)	(1, 3)	(2, 1)	$(0^5, 1^1, 2^3, 3^1)$	(4, 1, 1; 4)
9	4	$(1^2, 4^2)$	$(1^2, 2^2)$	$(0^2, 1^2)$	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4; 6)
10	6	$(1^2, 2^4)$	$(1^2, 2^4)$	$(0^{10})$	$(1^{10})$	(0; 10)

表の残りの  $\mathbb{L}$  は寿命特性と呼ぶもので、さらに細かい情報を反映するものである。頂点  $v$  に対し、ある  $n \in \mathbb{N}$  で、 $v \in f^a(V)$  ( $0 \leq a \leq n-1$ ) かつ  $v \notin f^n(V)$  を満たすものがあるとき、 $n$  を頂点  $v$  の寿命と言ひ、 $\ell(v) = n$  と書く。また、そのような  $n$  を持たない頂点の寿命は無限であると言ひ、 $\ell(v) = \infty$  と書く。

そこで、 $L_i = \#\{v \in V \mid \ell(v) = i\}$  ( $1 \leq i \leq \infty$ ) とおく。  $\mathbb{L}$  は  $(L_1, L_2, \dots; L_\infty)$  と並べて書いたものである。ただし、有限寿命を持つものは有限なので、 $L_i$  は十分大きな  $i (< \infty)$  に対しては 0 になるので、その分は省略して書いている。また、サイクルの和のように  $L_\infty = v$  のような場合は、有限寿命の頂点のないことを強調して  $(0; v)$  と書いている。

他にも不変量はあるが、今回扱うような力学グラフでは必要がないだろう。

$11 \leq b \leq 20$  について、不変量の表を以下に挙げておく。

$b$	$c$	V	P	MH	D	L
11	2	(1, 9)	(1, 5)	(0, 1)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4; 6)
12	2	(2, 8)	$(1^2)$	(1, 5)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4, 1, 1, 1, 1; 2)
13	2	(5, 5)	(1, 3)	(3, 1)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4, 1, 1, ; 4)
14	3	(3, 4, 3)	$(1^2, 2)$	(2, 2, 1)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4, 2; 4)
15	1	(10)	(1)	(5)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4, 2, 1, 1, 1; 2)
16	2	(3, 7)	(1, 2)	(2, 4)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4, 2, 1; 3)
17	2	(3, 7)	$(1^2)$	(2, 4)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4, 2, 1, 1; 2)
18	2	(4, 6)	(1, 3)	(3, 1)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4, 1, 1; 4)
19	1	(10)	(1)	(4)	$(0^5, 2^5)$	(5, 2, 1, 1; 1)
20	2	(2, 8)	(1, 3)	(1, 2)	$(0^5, 1, 2^2, 3)$	(5, 1; 4)

	$b$	$c$	V	P	MH	D	L
	11	1	(10)	(1)	(9)	$(0^1, 1^8, 2^1)$	$(1^9; 1)$
	12	2	(1, 9)	(1, 5)	(0, 1)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4; 6)
	13	2	(1, 9)	(1, 3)	(0, 3)	$(0^3, 1^5, 2^1, 3^1)$	$(3, 1, 1, 1; 4)$
	14	3	(1, 1, 8)	$(1^3)$	$(0^2, 3)$	$(0^4, 1^3, 2^2, 3^1)$	$(4, 2, 1; 3)$
$G'(\tilde{d}_b)$	15	4	(1, 1, 2, 6)	$(1^3, 3^1)$	$(0^2, 1^1, 2^1)$	$(0^3, 1^4, 2^3)$	$(3, 1; 6)$
	16	1	(10)	(1)	(4)	$(0^5, 1^1, 2^3, 3^1)$	$(5, 2, 1, 1; 1)$
	17	2	(2, 8)	(1, 2)	(1, 4)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	$(4, 1, 1, 1; 3)$
	18	3	(1, 4, 5)	$(1^3)$	(0, 2, 3)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	$(4, 2, 1; 3)$
	19	3	(2, 4, 4)	$(1^3)$	(1, 1, 2)	$(0^6, 2^3, 4^1)$	$(6, 1; 3)$
	20	2	(2, 8)	(1, 4)	(1, 1)	$(0^5, 2^5)$	(5; 5)

グラフを見て気がつくことを挙げておく． $G'(d) \cong G'(d_{11})$  だからといって，もう 11 足して  $G'(d_{22})$  としても同型にはならない．

$G'(d) \cong G'(\tilde{d}_{12})$  だからといって，もう 12 倍して  $G'(\tilde{d}_{24})$  としても同型にはならない． $G'(\tilde{d}_{24})$  には何と周期 7 のサイクルが現れる．

$G'(\tilde{d}_{20}) \cong M_{10}^8$  がわかる． $G'(\tilde{d}_{10}) \cong M_{10}^9$  を思い出せば， $G'(\tilde{d}_{30})$  を計算したくなり，それが  $M_{10}^7$  に同型であることを知れば， $G'(\tilde{d}_{10a}) \cong M_{10}^{10-a}$  と予想したくなる．さて，正しいでしょうか．これも宿題にしよう．

## §5. おわりに

加法グラフと乗法グラフは1桁の計算，対称差の変形は2桁の計算，それでこんなに複雑で面白い．数の世界には隠されている構造がどれほどあることか．

今の日本の教育政策の状況下では，このことから「だから3桁も計算をすれば十分なのだ」という本末転倒の議論が起こりかねない．

こんな簡単な作業でこんなに複雑で精細な構造がある．なら，次はどうなる？  
そう思って貰いたい．

実は，筆者は未熟のまま力学グラフを世に問うことを恐れていた．曲解されたり，捻じ曲げられたりすることが恐かったのだ．しかし，[5]と本稿を書くに至り，ようやく書くべき時期が来たような気がしている．いまだ未熟な状態ではあるが，大学生は言うに及ばず，中学生や高校生にも力学グラフを語ってきた経験も増えて，提示の方法にも工夫が出来るようになってきた．

本稿では記述をコンパクトにするために，随所に無理があり，数学にあまり慣れていない人には読みにくかったと思う．しかし，内容的には小学生にも理解できるものが大半である．ここで約束するというのもおかしなものだが，必ず誰でも理解でき，さらに自分で力学グラフの世界を広げて行くことができるような本を書くと言っておこう．

日本数学協会が目指すことは，日本数学協会などがなくともよいような，数学文化が日本に根づくことである，と筆者は考えている．

## 参考文献

- [1] 蟹江幸博「臨床数学教育を目指して」三重大学教育学部紀要、第52巻、教育科学(2001), 101-105.
- [2] ——「数の構造ゲームⅠ— 数学嫌いの癒しに向けて —」三重大学教育学部紀要、第52巻、教育科学(2001), 107-118.
- [3] ——「力学グラフと戦略ゲーム— 臨床数学教育における教材の役割」三重大学教育学部紀要、第53巻、教育科学(2002), 73-83.
- [4] Yuhhiro Kanie, *Games of Number Structures II (Reversed Difference)*, 三重大学教育学部紀要、第53巻、自然科学(2002), p.7-26.
- [5] ——「臨床数学教育のすすめ」数学セミナー増刊『数学の教育を作ろう』(2002.10.30), 147-163.
- [6] ——『力学グラフ: グラフ的算数入門のための数学的理論』(*Dynamical Graphs: A Mathematical Theory of Graphical Illustration to Arithmetics*), in prep.

## 目次

§1. はじめに：数の博物学の復権	1
§2. 博物学の候補：力学グラフ	3
§3. 力学グラフの基本用語：加法グラフと乗法グラフを例として	4
§4. 同型と変形：対称差の変形	7
§5. おわりに	13
§6. 見開きページに掲載する図	15
§6..1 加法グラフ $A_{10}^a$ . . . . .	15
§6..2 乗法グラフ $M_{10}^a$ . . . . .	15
§6..3 2桁の対称差の加法変形 . . . . .	17
§6..4 2桁の対称差の乗法変形 . . . . .	21

English Title

Dynamical Graphs on Ten Verteces.

編集者へ：

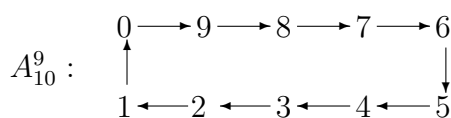
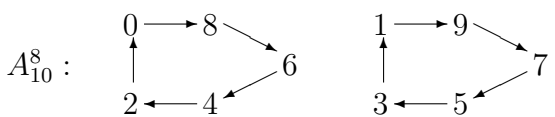
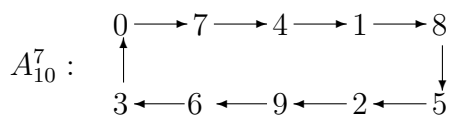
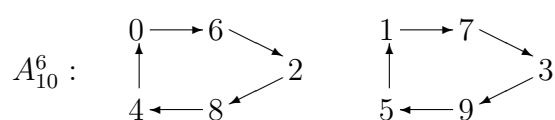
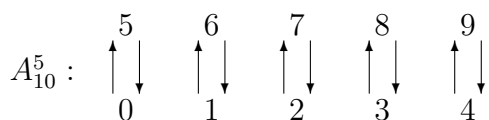
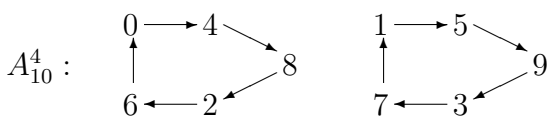
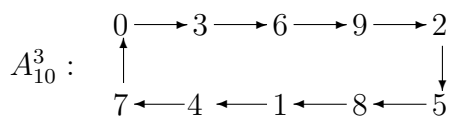
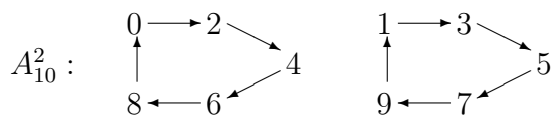
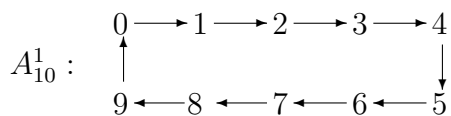
§4の最初の2つの表は（書いてある場所から前の方に）適当に場所を選んで動かして構いません．

残りの2つの表は（書いてある場所から後の方に）適当に場所を選んで動かして構いません．

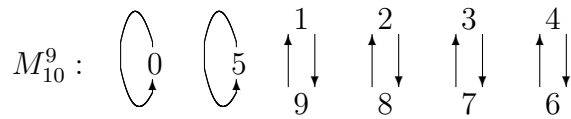
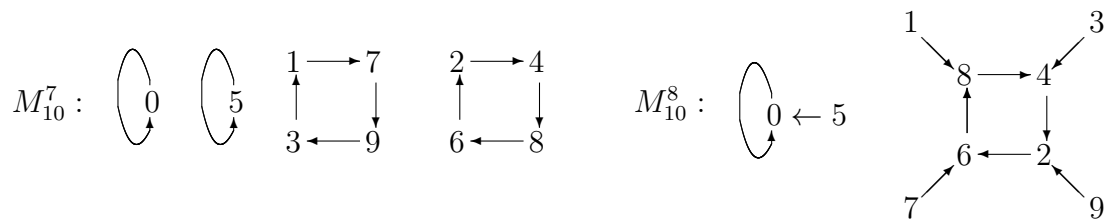
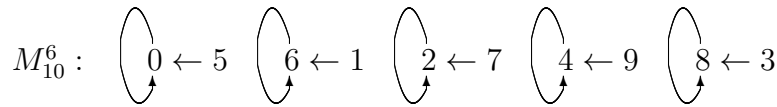
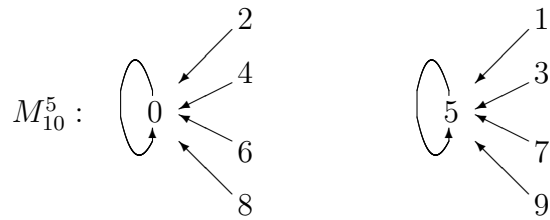
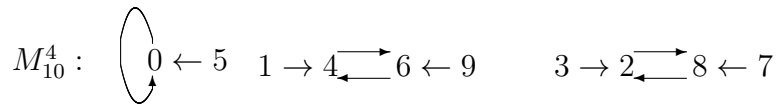
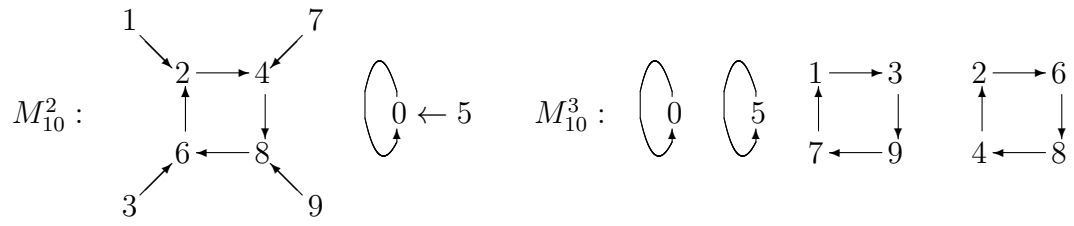
## §6. 見開きページに掲載する図

以下の節の名前は、図のキャプションとする。

### §6..1 加法グラフ $A_{10}^a$

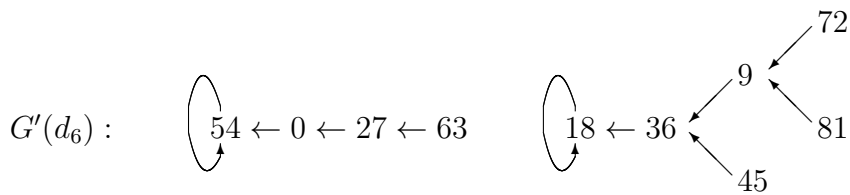
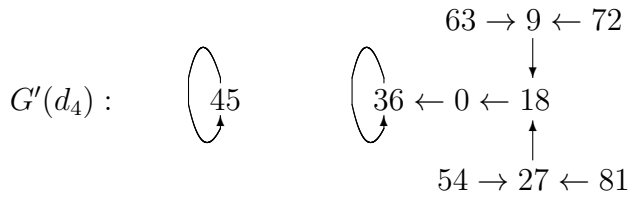
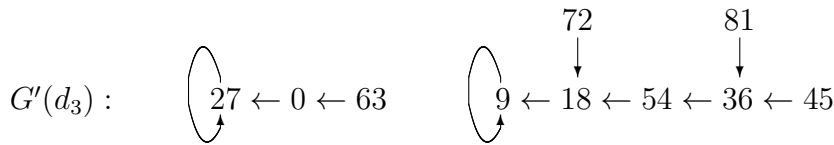
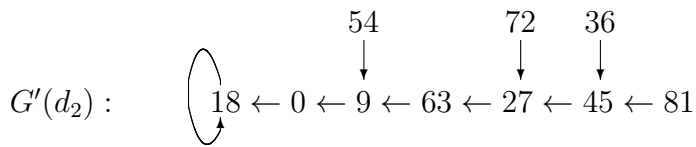
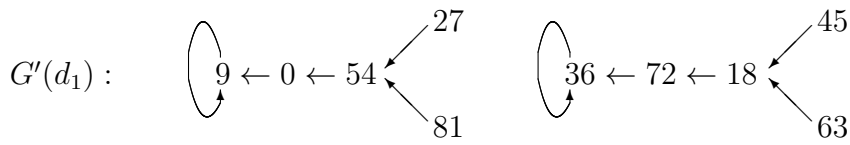
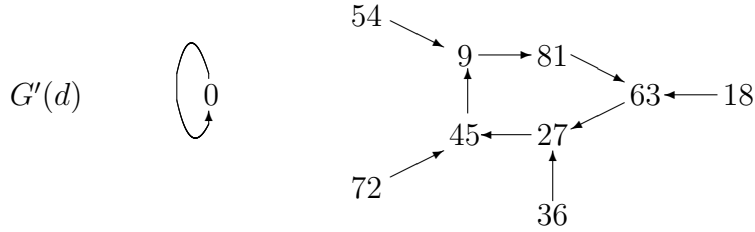


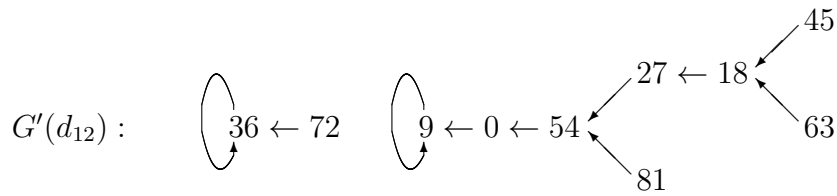
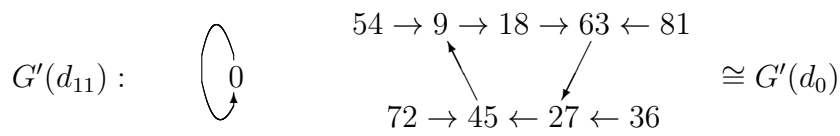
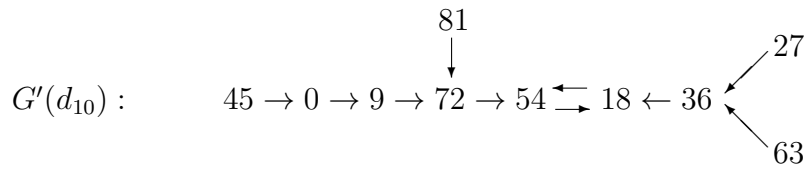
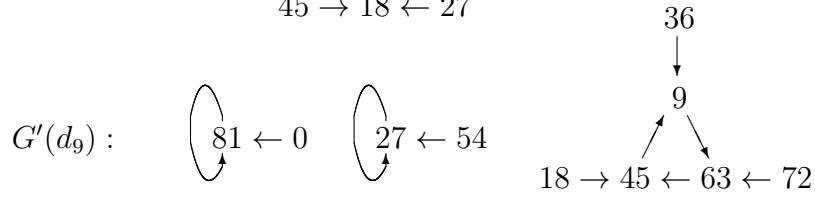
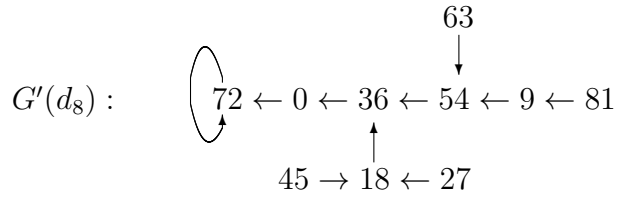
### §6..2 乗法グラフ $M_{10}^a$

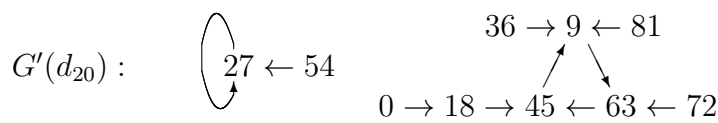
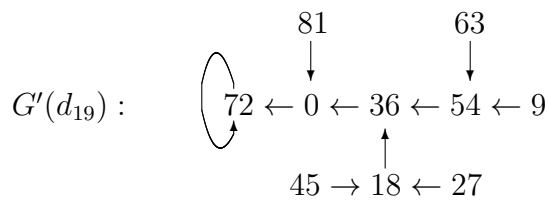
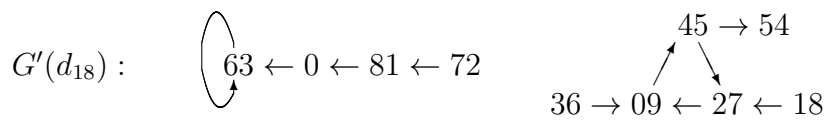
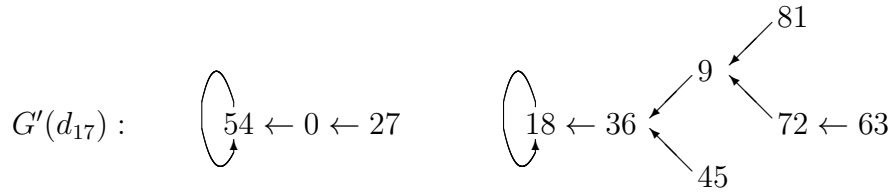
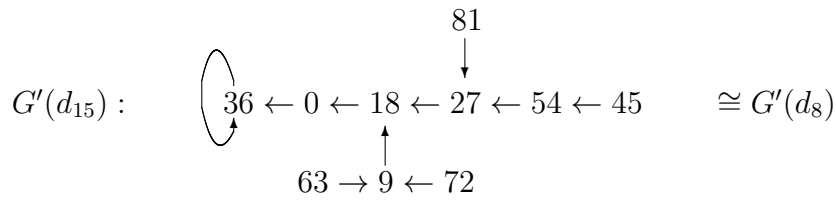
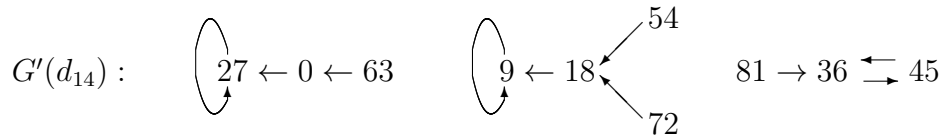
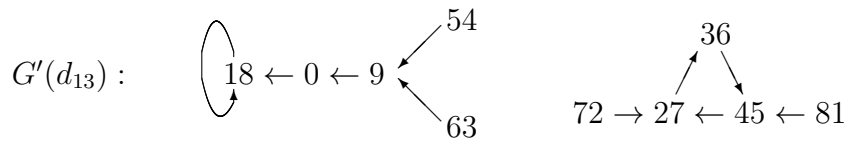




### §6.3 2桁の対称差の加法変形





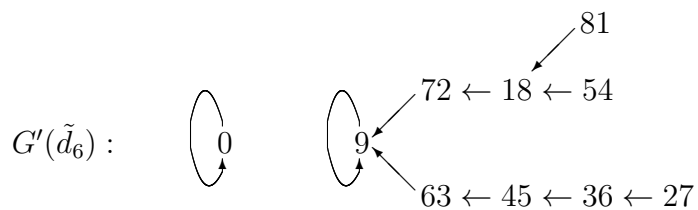
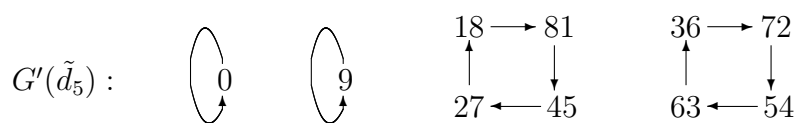
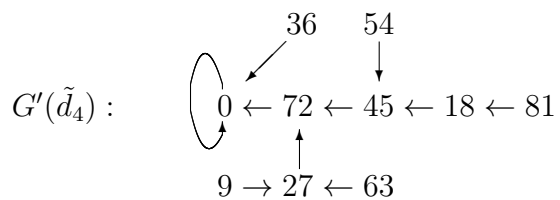
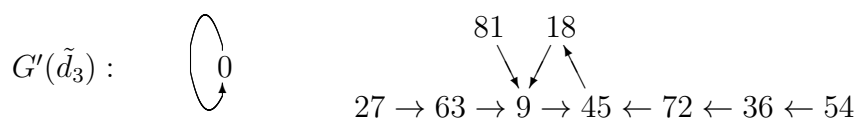
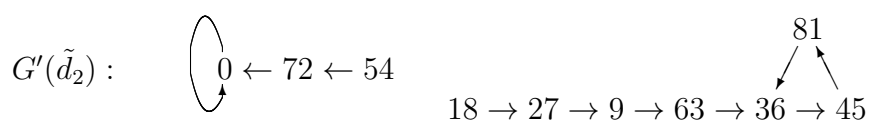
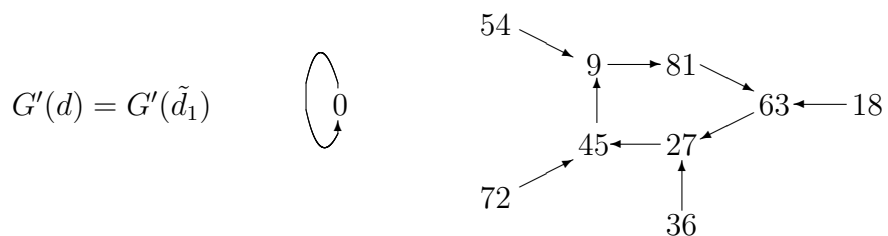


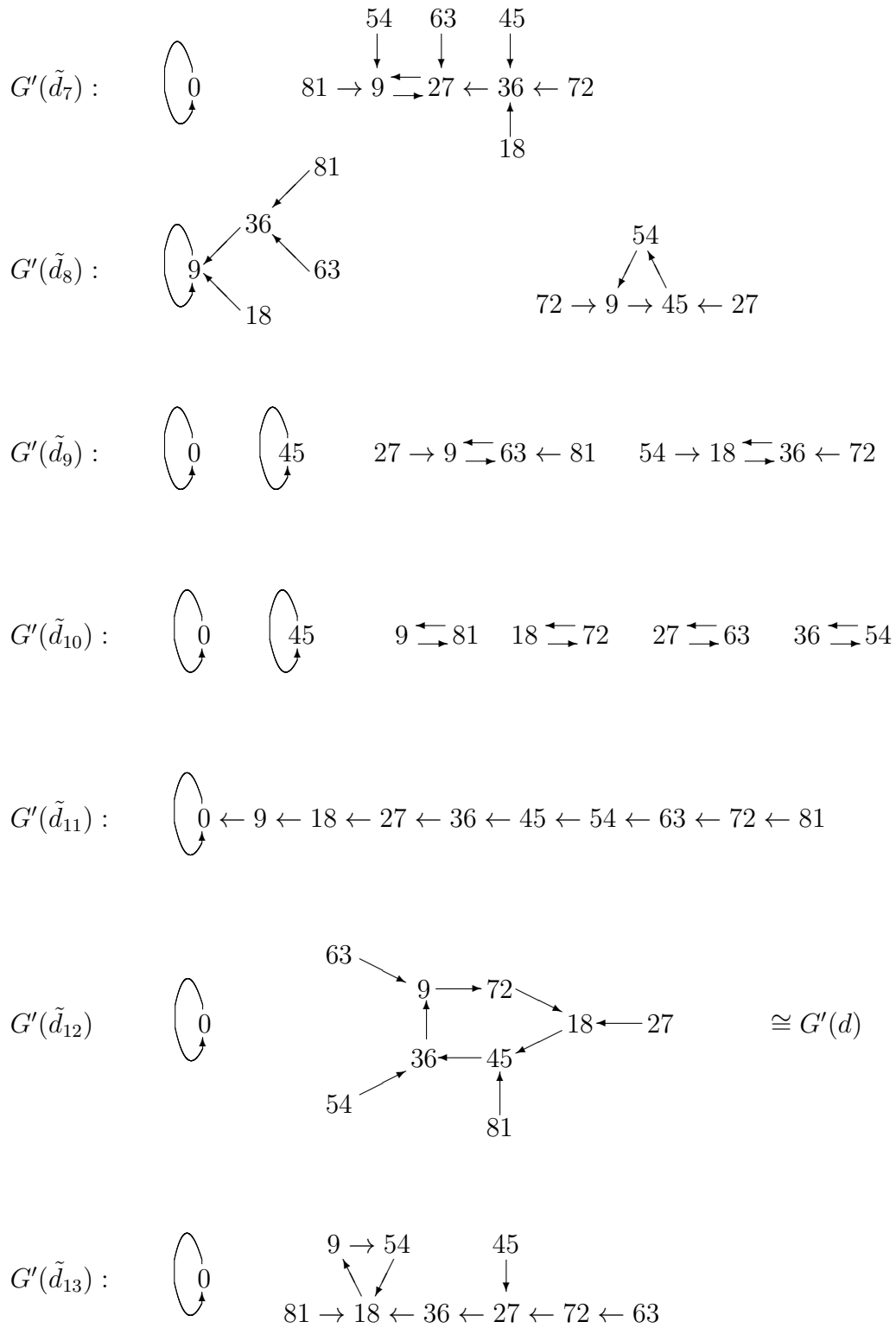
$G'(d_a)$  の特性値 .

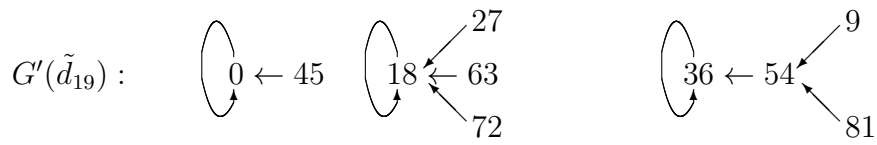
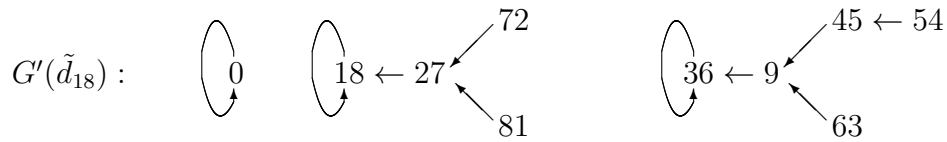
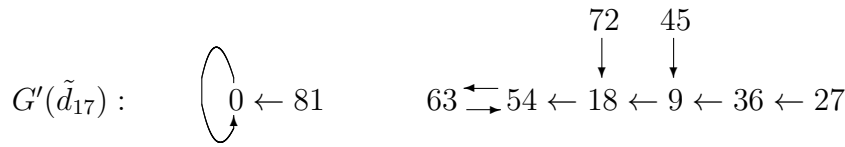
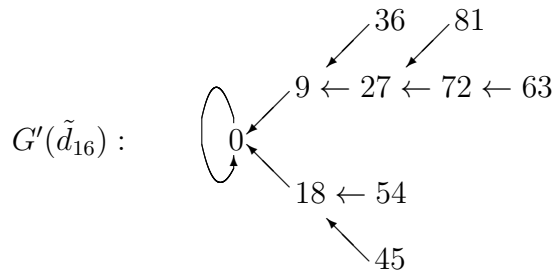
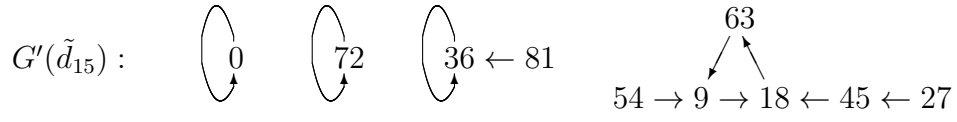
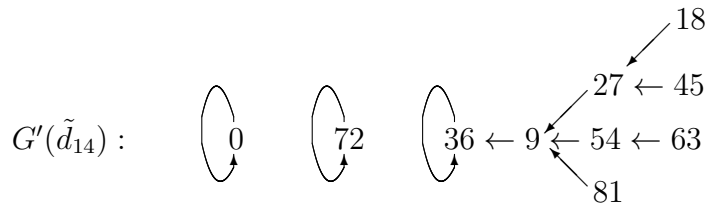
頂点数は 10 .

$a$	$c$	V	P	MH	D	L
0	2	(1, 9)	(1, 5)	(0, 1)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4; 6)
1	2	(5, 5)	$(1^2)$	(3, 3)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(0; 10)
2	1	(10)	(1)	(6)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4, 1, 1, 1, 1, 1; 1)
3	2	(3, 7)	$(1^2)$	(2, 4)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4, 2, 1, 1; 2)
4	2	(1, 9)	$(1^2)$	(0, 4)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4, 2, 1, 1; 2)
5	2	(3, 7)	(1, 2)	(2, 2)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4, 3; 3)
6	2	(4, 6)	$(1^2)$	(3, 3)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4, 2, 2; 2)
7	2	(3, 7)	(1, 3)	(2, 2)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4, 2; 4)
8	1	(10)	(1)	(5)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4, 2, $1^3$ ; 1)
9	3	$(2^2, 6)$	$(1^2, 3)$	(1, 1, 1)	$(0^5, 2^5)$	(5; 5)
10	1	(10)	(2)	(4)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4, 2, 1, 1; 2)
11	2	(1, 9)	(1, 5)	(0, 1)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4; 6)
12	2	(2, 8)	$(1^2)$	(1, 5)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4, 1, 1, 1, 1; 2)
13	2	(5, 5)	(1, 3)	(3, 1)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4, 1, 1, ; 4)
14	3	(3, 4, 3)	$(1^2, 2)$	(2, 2, 1)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4, 2; 4)
15	1	(10)	(1)	(5)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4, 2, 1, 1, 1; 2)
16	2	(3, 7)	(1, 2)	(2, 4)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4, 2, 1; 3)
17	2	(3, 7)	$(1^2)$	(2, 4)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4, 2, 1, 1; 2)
18	2	(4, 6)	(1, 3)	(3, 1)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4, 1, 1; 4)
19	1	(10)	(1)	(4)	$(0^5, 2^5)$	(5, 2, 1, 1; 1)
20	2	(2, 8)	(1, 3)	(1, 2)	$(0^5, 1, 2^2, 3)$	(5, 1; 4)

### §6.4 2桁の対称差の乗法変形







$$G'(\tilde{d}_{20}) : \begin{array}{c} \begin{array}{c} \circlearrowleft 0 \\ \uparrow \\ 0 \end{array} \leftarrow 45 \quad \begin{array}{ccccc} 81 & \rightarrow & 18 & \rightarrow & 54 & \leftarrow & 63 \\ & & \uparrow & & \downarrow & & \\ 27 & \rightarrow & 36 & \leftarrow & 72 & \leftarrow & 9 \end{array} \end{array} \cong M_{10}^8$$

$G'(\tilde{d}_a)$  の特性値 .  
頂点数は 10 .

$a$	$c$	V	P	$M_{\mathbb{H}}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{L}$
0	1	(10)	(1)	(1)	$(0^9, 10^1)$	(9; 1)
1	2	(1, 9)	(1, 5)	(0, 1)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4; 6)
2	2	(3, 7)	(1, 3)	(2, 4)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4, 2, 1, 1; 2)
3	2	(1, 9)	(1, 3)	(0, 3)	$(0^3, 1^5, 2^1, 3^1)$	(3, 2, 1; 4)
4	1	(10)	(1)	(4)	$(0^5, 1^1, 2^4)$	(5, 2, 1, 1; 1)
5	4	$(1^2, 4^2)$	$(1^2, 4^2)$	$(0^4)$	$(1^{10})$	(0; 10)
6	2	(1, 9)	$(1^2)$	(0, 4)	$(0^3, 1^5, 2^2)$	(3, 2, 2, 1; 2)
7	2	(1, 9)	(1, 2)	(0, 2)	$(0^6, 1^1, 3^3)$	(6, 1; 3)
8	2	(5, 5)	(1, 3)	(2, 1)	$(0^5, 1^1, 2^3, 3^1)$	(4, 1, 1; 4)
9	4	$(1^2, 4^2)$	$(1^2, 2^2)$	$(0^2, 1^2)$	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4; 6)
10	6	$(1^2, 2^4)$	$(1^2, 2^4)$	$(0^{10})$	$(1^{10})$	(0; 10)
11	1	(10)	(1)	(9)	$(0^1, 1^8, 2^1)$	$(1^9; 1)$
12	2	(1, 9)	(1, 5)	(0, 1)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4; 6)
13	2	(1, 9)	(1, 3)	(0, 3)	$(0^3, 1^5, 2^1, 3^1)$	(3, 1, 1, 1; 4)
14	3	(1, 1, 8)	$(1^3)$	$(0^2, 3)$	$(0^4, 1^3, 2^2, 3^1)$	(4, 2, 1; 3)
15	4	(1, 1, 2, 6)	$(1^3, 3^1)$	$(0^2, 1^1, 2^1)$	$(0^3, 1^4, 2^3)$	(3, 1; 6)
16	1	(10)	(1)	(4)	$(0^5, 1^1, 2^3, 3^1)$	(5, 2, 1, 1; 1)
17	2	(2, 8)	(1, 2)	(1, 4)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4, 1, 1, 1; 3)
18	3	(1, 4, 5)	$(1^3)$	(0, 2, 3)	$(0^4, 1^2, 2^4)$	(4, 2, 1; 3)
19	3	(2, 4, 4)	$(1^3)$	(1, 1, 2)	$(0^6, 2^3, 4^1)$	(6, 1; 3)
20	2	(2, 8)	(1, 4)	(1, 1)	$(0^5, 2^5)$	(5; 5)