RIMS研究集会予稿

数学の多様性と普遍性

── 教育数学の試み ──

蟹江 幸博

目 次

付　録 **22**

筆者は，ここ数年来，“教育数学”と呼ぶ営みの必要性を提唱してきた．本稿では，何故このような営みが必要なのか，そして，教育数学とはどのような営みであるのかについて，簡単にまとめてみたい．

1　なぜ教育数学が必要なのか

1.1　数学教育で何を学ぶのか — 個人的側面を中心に

数学の教育について提示される諸々の見解には，大きな多様性が見られる．そのため，数学教育を主題とする論議は，しばしば，擦れ違いや紛糾といった状態に陥りやすい．そうした論議の混乱は,「数学」という言葉と「教育」という言葉のもつ多義性に対して十分な注意が払われていないことに由来するものも多いように感じている．

数学教育に関する議論がより有効なものになるよう「教育」や「数学」の多義性を秩序だったものに整理することは,“教育数学”の重要な役割のひとつだと考えている[1]．本節では,「教育」という言葉の多義性から始めて，本稿で仮に“数学教育の個人的側面”と呼ぶものについて，そこにどういう課題が潜んでいるのかについて瞥見してみたい．

1.1.1　「教える」と「学ぶ」の非対称性

「教育」を,“個々の人間の営み”という観点から眺めてみよう．このとき,「教育」には「学ぶ」と「教える」という双つの方向性があることが，すぐに見て取れる．教育とは「学ぶ」ことなのか〔学習者の立場〕,「教える」ことなのか〔教授者の立場〕，それとも，両者が融合した“特殊”な過程（プロセス）なのだろうか．

この「学ぶ」と「教える」を意識しながら,“教育”を含意する状況を，日常生活からいくつか取り上げてみよう．

[1]筆者は，このことを,「数学教育に関する議論のためのプラットフォームを構築する」と表現している．

1. 学校教育

   (a) 講　義

   教室で，多人数の学習者と一人の教師が対面で行う「教育」.

   (b) 演　習

   実験実習やゼミナール等を通じた「教育」.

   (c) 宿　題（ホームワーク）

   予習，復習，レポート作成等を通じた「教育」.

2. 現任訓練 (On the Job Training)

   職業的な仕事の現場で，業務に必要な知識や技術を,「研修における訓練」を通じて習得させる「教育」.

3. 徒弟教育

   職業的な実務の場で，未熟練者が，熟練者との協働作業に従事することを通じて，業務に必要な知識や技術を「学ぶ（“ 盗む ”）」という形態の「教育」.

4. 独　学

   学習者が “ 出版物（電子的なものを含む）” 等で「学ぶ」ことによる「教育」.

1-(a) と 2 番目は，学習者が「学ぶ」行為と教授者が「教える」行為が融合された状況において「教育」が成立している.

3 番目では，学習者が「その人物から学ぶ」という意味での「教授者」は存在するだろうが，その人物自身に「教える」という意図があるか，あるいは，あるとしてもその在り方が 1-(a) や 2 番目の例と同種のものと認定して良いかについては，疑問がある.

4 番目においては，学習者との “ 直接的接触 ” をもつという意味での「教授者」は存在しない．しかし，視（聴）覚媒体化された「作成者の意図」を想定するなら，この「意図」が「教える」というものであるかどうかについて，11-(a) や 2 番目の例と 3 番目の例の区別と同様な事情が成立するだろう.

なお，1-(a) 以外の学校教育の要素について，上述のような見方をするなら，(b) の「演習」は 2 番目ないし 3 番目の例との，(c) の 宿　題（ホームワーク） は 4 番

目の例との，それぞれ類似が見て取れる．また，1-(a) と２番目の例の差異を明らかにするためには,「教える」と「学ぶ」についてのより精密な議論が必要となるが，本稿では扱わない．

以上の簡単な予備的考察から見て取れることは,「学ぶ」と「教える」の，ある種の非対称性である．つまり,「A から B が学ぶ $\Leftrightarrow$ B が A に教える」といった単純な“ 対称性 ”は成立しない．例えば，上の３番目の例のような場合，日常的な言葉の用法では,「教えてもらわないが，学んでいる」ということになるだろう．

このように，少なくとも（比喩的ではない）慣用的な意味では,「教えても学ばない」こともあれば,「教えなくても学ぶ」こともあることになる．

もちろん,「教える」と「学ぶ」が独立しているわけはない.「教える」を,「学習者に“ 学ばせる ”ことを目的とした意図的活動」と考えてみよう[2]．このとき,「教えても学ばない」のは，単に「教える」という行為の失敗に過ぎないということになるだろう．結局のところ，“ 論理的 ”には,「教える」は「学ぶ」に従属する概念ということになる．

本稿では，次項以降で「数学教育で何を学ぶのか」ということについて検討を行いたいのだが,“ 意図的活動 ”としての「教える」という行為は，このことを明らかにする上で，重要な役割を担うことになる．

なお,「学ぶ」についても，意図的なものとそうでないものを区別することが有効なことがあるが，それは，そうした区別が必要となる場面で述べることとしたい．

1.1.2　数学教育で何を学ぶのか

ここで,「数学の教育によって学習者は何を学ぶのか」ということについて考えてみよう．検討作業の叩き台として，数学教育の成果として期待されることを，非常に単純化して，“ 知識 ”と“ 技能 ”に二分する．

まずは，数学の教育で「学ぶ」べき“ 知識 ”と“ 技能 ”を，次のように規定することから始めたい．

1. 知　識

[2]「教える」についてのこの“ 定義 ”は，3 番目の例には適合しないかもしれない．もし，3 番目の状況についても「教える」という言葉を適用するのであれば,「教える」ことを「その結果として学習者が“ 何がしか ”を学ぶ活動」とでもすることになるかもしれない．

数学的な概念や定型化された技法を“言語化[3]”したもので，記憶や記録の対象となるもの．

2. 技　能

   (a) 課題解決型

   “所与の状況（コンテクスト）の下で，所与の課題を，解決する”もので，次の二種に類別される．

      i. 知識適用型
      既存の「数学的知識」を利用して解決するもの．
      さらに，状況（コンテクスト），課題，解決の方法が，それぞれ，言語化されているか， あるいは，定型化されているかといった観点から，下位の種別に分類できる．

      ii. 技法開発型
      既存の「数学的知識」ではなく，新たな技法や概念の開発を伴うもの．

   (b) 知識創出型

   (a)-ii) において創出された概念や技法を，定型化・言語化することで，新たな“知識”を創出するもの[4]．

学校数学〔初等中等教育における数学〕を例にとってみよう．

学校教育で供給される数学教育の特徴は，原則として，“（脚注３の意味で）言語化された数学の世界”を対象としていることである．そこで学ぶのは，（１）数学的概念と定式化された技法という“知識”と，（２）定式化された状況（コンテクスト）と課題において（１）の知識を適応する技能，が基本である．これは，現代日本の学校数学に特有なものではなく，古代メソポタミアの書記数学をはじめ，数学史で知られる種々の数学の教育に共通なものである．

---

[3] 声音という聴覚媒体を用いる通常の意味での言語だけでなく，視覚媒体等の使用も含む“一般的な言語（プリエートの意味でのインストゥルメント）”を想定している．

[4] 技能は，一般に，知識適用型課題解決 ⇒ 技法開発型課題解決 ⇒ 知識創出，という順に“発達”する．こうして，“知識”と“技能”は独立したものではなく，既存の知識を利用した技能から新たな知識が産出され…という，一種の“弁証法的”な関係が成立していることになる．

難易度の高い入学試験で験されるのは，（あくまで言語化された学校数学世界の中で）未定型的な状況（コンテクスト）において既習の知識を適用して課題を解決することになる．そうした状況や解法が新たに“知識化”されることによって，学校数学は時間発展をしていくとみなすことができる．

ところで，学校数学で扱われる技能が“定型化”されたものであることを問題視する趣旨の見解が，しばしば主張されることがある．その是非をここで論じることはしないが，現実社会の実務で必要とされる数学的技能の圧倒的多数が定型的なものであることには注意を促しておきたい．

次に，“数学の教育”を受けた結果として達成されるべき状態を表わす日常的な表現を，上述の“知識と技能”の枠組みで位置づけてみよう．

「数学を知っている」や「数学がわかる」と言われるのは，おおむね，“知識”を，「数学ができる」や「数学を使える」は“技能”を，それぞれ想定していると見なすことが，少なくとも日常的には，自然だろう．しかし，数学教育の関係者は，「知識（用語や公式）」を“暗記”しているだけの状態を「数学がわかる」とは見なさず，そうした知識を“課題解決”に適用できること，つまり「知識活用型課題解決技能」を身につけていることを想定している傾向が強いと思われる．ここには，数学のもつ“道具性”という性格が色濃く反映していると言って良いかもしれない．

なお，「文化としての数学」という言い方があるが，“文化”に道具性を認めないのなら“知識”に入るだろうし，「伝統芸」といったものを“文化”と思うのなら“技能”も入るかもしれない．つまりは，“文化”の定義に依存する二次的なものということになる．

最後に，“数学的に考える”ことについて考えてみよう．「数学的に考えること」や「数学的な考え方を知る」という表現も，“数学教育で学ぶもの”として広く人口に膾炙したものである．

素直に考えれば，前者は“技能”であり，後者は“知識”のように思える．しかし，両者が同一の状態を表わしているのであれば，後者の表現は，“技能”を知ることができるのか，という疑問を引き起こす．この疑問をより鮮明に捉えるため，第 1.1.1 節で述べた「教える」という観点を取り上げてみよう．つまり，“知識”や“技能”を「教える」ということは，どういうことを意味しているのかを検討してみる．

まず，“知識”について考えてみよう．先に“知識”を「記憶や記録」が可能なものと規定したから，「数学的知識を“教える”とは，学習者に

そうした知識を記憶もしくは記録させること[5]」とすれば良いだろう．この場合，教授の結果の検証〔試験〕も，既習の知識を「覚えている」ことの確認という形態で，比較的容易に実行できるだろう．

それでは，“技能”についてはどうだろう．定型化かつ言語化されたものであれば，課題の提示も解法の検証も容易かもしれないが，それが“言語化された解答の記憶”，なのか，それとも，学習者の主体的な行為としての“技能”によるものなのか，その判定は必ずしも容易ではないのではないか．まして，定型化されていない場合について，何を，どう“教え”れば良いのだろうか．

1.1.3 「数学的に考える」ことをどうやって教えるか

現代の数学教育に大きな影響を与えた数学研究者の一人であるハンス・フロイデンタールは，数学の教育の世界の探求を，この「考えることをどう教えるか」という疑問に取り組むことから出発した．この疑問が数学教育にもたらしたものを，フロイデンタール自身の回想を交えながら，瞥見しておこう（[1] を参照）．

第 2 次世界大戦中，ナチスのオランダ占領によって大学を追われたフロイデンタールは，その余暇に自身の子供の教育にかかわる中で，数学を教えることへの関心を深めていった．1945 年 8 月に開催された数学教育関係の会合において，フロイデンタールは，戦時中の思索を振り返ってこう述べている．

> 考えるということを教える教育（Education in thinking） — 実に美しい響きと魅力的な言葉の組み合せではないか．何という魅惑的な課題だろう．··· 仕事のできない何年間かを過ごした後，私は，今，この課題へと立ち返ることになった．この課題について，私は，もうこれで良しと感じたことは一度もない．読むこと，書くこと，算術やフランス語，数学，体育であれ，何であれ，何かを教える者は，誰であっても，それをどう教えればよいかは正確には知らなくとも，教えているものが何であるかは知っている．考えるということは，技法（skill） ではない．私は，しばしば，長時間にわたり，私

[5]例えば，学習者に「ノートを取らせること」を,「教える」の様態の一つとみなすということ．

> が教えたい，そして教えるべきだと思う，この奇妙な「考えるということ」について，思索にふけった．しかし,「考えるということ（thinking)」についての思索は，堂々めぐりを繰り返すばかりだった．徐々に，私は,「考えるということを教える」という問題は，理論的な方法ではなく，むしろ，もっと実践的な方法で扱うべきだということを学んだ.

こうして，教育の実践の場に立って試行錯誤を重ねた後，フロイデンタールが到達した結論は，次のようなものであった.

> 数学とは，公式の集まりや公理系で記述される集合といった「静的な体系」ではなく，人間が営む動的な知的活動の一種，詳しくは，ある種の対象を数学化するという過程を繰り返す不断の営みである.
>
> そして，数学を学ぶということは，学習者が，数学的に考えること，すなわち，数学化の過程を，指導者に誘導されながら追体験し，かつ，その追体験の過程を内観することで，内在化することに他ならない.

ここに,“ 誘導された追体験（guided reinvention）”という概念が登場する．本稿における先の文脈にもどれば,「数学を教える」ということは「学習者の“ 数学化の過程の追体験 ”を誘導すること」になるのだろう．もちろん，真に問題となるのは，このフロイデンタールが述べる“ 数学化 ”の内実であろうが，本稿ではこの先には立ち入らない.

いずれにしろ,「数学的に考える」ことを“ 教える ”ということが何を意味するかは，容易に答えられる問題ではなく,「数学とは何か」という大きな主題と向き合うことを必要とするものであることを確認しておくことにしたい.

1.1.4　数学は言語か

第 1.1.2 節で提示した，数学の“ 知識 ”と“ 技能 ”の話題にもどろう.

そこで，数学的な“ 知識 ”は，記憶や記録が可能なように“ 言語化 ”されたものであった．また,“ 技能 ”についても，学校数学が典型であるように，その過程の多くの部分は“ 言語化 ”されている．“ 言語化 ”されたものは“ 言語 ”の一部だと考えるなら,「数学で学ぶことの多くは，実は,

言語である」ということになるのではないか．確かに,「数学は言語である」と，しばしば表現される．これは，比喩なのか，それとも，数学は言語の一部なのだろうか.

いずれにしろ,「教える」という人間の営みは，通常，“言語”を手段として実行される．数学と言語の関係について明らかにすることは，数学の教育を考察するに際して，避けることのできない段階のひとつであろう．ここでは，この“数学と言語の関係性”について，予備的な考察を試みておきたい.

数学は言語である

まず,「数学は言語である」という主張を取り上げよう．この主張の典型として，ガリレオ・ガリレイの著名な文章[6]を引用しておく.

> 哲学〔philosophy〕は，この（宇宙〔universe〕という）偉大な書物に記され，我々の眼前に広げられたままなのです．しかし，まずは，その言語を理解し，それが書かれている文字を読み解くことを習わないと，理解することができません．この書物は，数学語〔lingua matematica〕で書かれており，三角形や円や，諸々の幾何図形が文字なのですから，この言語の助けなくしては一言たりとも理解などできないのです．それなくして，人は，暗黒の迷宮で彷徨うしかなくなってしまうのです.

この主張の“言語”は，我々が日常で用いている“言語”と同じものなのか，それとも，単なる比喩なのかは，もちろん，言語の定義によるだろう．その議論は後述することにして，次に，反対の立場を採る主張を眺めてみたい.

---

[6] [原文] La filosofia è scritta in questo grandissimo libro, che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere, se prima non s'impara a intender la lingua e conoscer i caratteri nei quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile intenderne umanamente parola ; questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto. （Galilei, Galileo,“Il Saggiatore”, Opere, volume II, Milano, 1832, p.13.）

数学は言語ではない

今，日本で用いられている「数学」という言葉は，大雑把に述べれば，明治初頭の西洋文明摂取期に，“ mathematics ”の訳語として選び出されたものである．この“ mathematics ”（及び対応する主要な西欧諸語）がギリシア語の“ manthanō (学ぶ) ”に由来し，そこに“数 (number) ”の含意がないことは周知であろう．

この“ mathematics ”という語の由来について，ラオディケアの司教アナトリウスによるという伝承を取り上げてみよう[7]．

> なぜ，数学（マテマティケー）〔mathēmatikē〕はこういう名で呼ばれたのか?
>
> 逍遥学派は説く．修辞〔rētorikēs〕や詩文〔poiētikēs〕や民衆音楽〔dēmōdous mousikēs 〕は教え〔mathonta〕を受けることなく理解が可能である．しかし，この数学（マテマティケー）という特別な名で呼ばれる学的領域〔mathēmata〕 は，教育〔mathēsei〕を通ぜずしては何人も修得能わざるものであると．かかる由来により，こうした学的領域の講究が数学（マテマティケー）と呼ばれることとなった．幾何学（ゲオメトリア）〔geōmetria〕と整数学（アリトメティケー）〔arithmētikē〕のみに数学（マテマティケー）という特別な名称を与えたのは，ピュタゴラス派の者どもであるという．それ以前は，各々は別々の名で呼ばれており，両者に共通の名はなかった

ここに見られるのは，修辞や詩文といった「言語」に関係する学と,「数学」と呼ばれる学が,「教育」との関係性において分別されるという図式である．つまり，そこに表明されているのは，習得に“ 教えを受けること ”の必要性の有無で,「数学」と「言語」を峻別する立場であるといっても良いだろう．

「言語」の定義を仮設する

数学と言語の関係性について論じたいのだが，両者が共に曖昧なままでは，論を進めることが難しい．そこで，まず,「言語」の定義を仮設することで，議論の道筋を明らかにすることを試みよう．

ここで採用する「言語」の定義は，近代言語学の祖とされるフェルディナン・ソシュールの系統で機能派の代表であるアンドレ・マルティネによるものである．

[7] ヘロンの『定義集』より．[7] p.2 .

> 言語とは，コミュニケーションの道具で，それによって人間の経験が，意味内容と音表現とを備えた単位，すなわち記号素に，共同体ごとに違うやりかたで，おのずから分析されるものである．この音表現が，こんどは弁別的かつ継起的な単位，すなわち音素に分節され，音素は言語ごとに数が一定していて，その性質と相互連関も一つの言語ともう一つの言語では違う[8]．

「言語」をこのように定義すれば，逍遥学派の修辞や詩文・民衆音楽をこの「言語」に関する学とすることに問題はないだろう．

他方，ガリレイの「言語」の方は，大きく二つの問題が含む．ひとつは，“コミュニケーション”を人と人の間の成立する相互作用と解すれば，“宇宙との交信”はコミュニケーションとは見なされないこと．もう一点は，ガリレイの「言語」が“音表現”によるものと考えることの妥当性，である．したがって，少なくとも，ガリレイ的な「言語」は，脚注 3 で述べたような“一般的な言語”と解する必要があるだろう．

1.1.5　教育からみた「数学」と「言語」

前節で，習得方法の差異にもとづいて「数学」と「言語」の区分をする立場を紹介した．ここにも,「教育」という言葉の — 特に「学ぶ」という言葉の — 多義性を見ることができる．

今，筆者は,「習得」という言葉を用いた．これは,「言語を“習得する (acquire)”—“学ぶ (learn)”のではなく—」という言い方に倣ったものである．

言語習得理論では，言語の習得方法として，“自然習得 (natural acquisition)”と“教室習得 (classroom acquisition)”を区別することがある．第一言語（母語）の習得方法が典型的な“自然習得”であり，第二言語については“自然習得”と“教室習得”— あくまでその名称を典型とするような種類の方法のことだが — の二種類の習得方法が存在するとされる．

[8] [2, 日本語訳] pp.23–24. ［原文］Une langue est un instrument de communication selon lequel l'expérience humaine s'analyse, différemment dans chaque communauté, en unités douées d'un contenu sémantique et d'une expression phonique, les monèmes ; cette expression phonique s'articule à son tour en unités distinctives et successives, les phonèmes, en nombre déterminé dans chaque langue, dont la nature et les rapports mutuels diffèrent eux aussi d'une langue à une autre.

ところで,「学ぶ」という言葉と，この“ 自然習得 ”も含意する「習得」という言葉を同一視して良いのだろうか．筆者の個人的な語感としては,「学ぶ」という言葉には，赤ん坊が言葉を覚えることよりも，もう少し学習者の意志を伴う主体性とでもいうべきものの存在を感じてしまう．

もちろん，それも「学ぶ」という言葉の多義性の顕われであろうが，数学の教育について論じるとき，この多義性を放置したままでは，重大な論点を看過することになる．実際，先述の「言語」と「数学」の区分は,「言語は“ 自然習得 ”が可能だが，数学は“ 教室習得（もちろん本当に教室という意味ではなく）”によってしか習得できない」と言い直すことができるだろう．

はたして「数学」は，習得しようという“ 意図をもった学び ”でしか身につかないのか，それとも，子供が遊びながら言葉を覚えるように習得することが可能なのだろうか[9]．

1.2 制度的教育と数学 — 社会的側面を中心に

本節では，学校教育の教科目としての「数学」を素材に，数学教育の“ 社会的側面 ”について検討してみたい．

1.2.1 数学教育と社会

現在の「日本における数学の教育」が様々な問題を抱えていることについては，多くの人が同意するところであろう．そうした問題を解決するために多様なアプローチが試みられているが，その多くは，教材や教授法の改善を目指すものといっても良いのではないだろうか．しかし，日本の数学の教育が抱える諸問題は，教材や教授法，あるいは，教育課程や評価方法の工夫だけで解決できるようなものなのだろうか？

[9]この問いを,“ 心理的な発達過程と教育内容との関連性 ”と捉えれば，教育心理学の課題となるだろう．しかし，筆者の考える“ 教育数学 ”では，この問題をそうしたふうに課題化するのではなく,“ 数学と教育 ”というきわめて複合的な事象を把握するために設ける種々の観点のひとつとして課題化する．なお,“ 観点を課題化 ”するための方法論として，マックス・ヴェーバー的な“ 理念型 ”を採用している．

私見であるが，日本の数学教育が抱える困難の底流には，数学を学ぼうとする“ 動機 ”の希薄化という現象が横たわっているように感じている．仮にこの見立てが正しいのであれば,「馬に水を飲ませる」譬えではないが,「数学を学びたい」という意欲の喚起が第一に優先されるべきことになるだろう．

この“ 数学を学ぶ動機 ”については，次の二種を，大きく，区別する必要があると考えている．ひとつは,「子供〔社会の正規構成員の候補者〕が数学を学びたい」という意味での動機であり，他方は,「大人〔社会の正規構成員〕が子供に数学を学ばせたい」という意味での動機である．前者を「個人的動機」，後者を「社会的動機」と呼ぶことにしよう．もちろん，一般に，個人的動機と社会的動機は独立したものではない．個々の学習者が「学びたい」と思う“ 個人的 ”動機の構成要素には,“ 内容に対する興味 ”や“ わかることの喜び ”といった本来の意味での個人的なもの以外に，学習によって得られる“ 効用 ”といったものもあるだろう．後者は，社会的動機と大きな相関をもつことになる．

学校の現場における教育課程や教授法の工夫は，本質的には,「個人的動機」の改善を目標とするものであり，直接的に「社会的動機」に影響を与えることは難しいのではないか．しばしば教育の現場で与えられる「こんなに社会で役に立つ」という動機強化策は，それが，その時代のその社会における“ 社会的動機 ”と適合的でなければ，十分な効果をもつことは期待できないだろう[10]．

「教育」について，個々の人間の内面の変容を引き起こす“ 個的機能 (individual faculty) ”と，共同体の構成員を生産する“ 共有的機能 (communal faculty) ”の二種類の機能を区別することができる．近代以降の学校教育は，本質的には，後者の機能の制度化に他ならない．したがって，少なくとも制度的教育を問題とする限り，上述の“ 社会的動機 ”は，その在り方に重要な影響を与えることになる．

数学の教育について論じる際にも，その基層にある“ 社会的 ”なものへの眼差しを忘れてはならないだろう．

1.2.2 “ 社会的期待 ”と制度的教育

“ 社会的動機 ”が制度的教育に与える影響には，きわめて大きなものがある．例えば,「コミュニケーション能力重視の英語教育」なるものが

[10]「世のため人のためになる」という動機よりは,「進学に必要」という動機の方が効果的であるかもしれない．

小学校の教育課程にまで拡げられていく最近の傾向は，1970 年代の数学教育の現代化運動を髣髴とさせるが，こうした潮流の源には，ある種の“社会的期待”が存在していると見るべきだろう．結局のところ，現実の教育問題への関与は，社会的動機の背後に存在する“社会的期待”に向き合うことなくして，十分な実効性をもつことはできないのではないだろうか.

もちろん,「学ぶことへの動機」の希薄化，ひいては「学ぶことへの意欲」の低下は，数学に限ったことではないという意見もあるだろう．ここで例に引いた英語教育も，関連する各種産業の振興という“社会的効果”は確かにあるだろうが，個々の子供の個人的動機に内在化されている程度については定かではない．しかし,「学ぶことへの意欲」の低下が生じる領域が社会的期待の重心移動に伴って変化し得るものとみなせば,少なくとも相対的には,「数学」においてそれを問題視することは十分に意味をもつだろう.

なお，公的な学校教育全般における「学ぶ意欲の低下」が認められるとしても，それが社会全体におけるものを意味しているとは限らない．国民の多数が科学技術立国というイメージを共有し“総中流社会”とも称された高度成長期の日本社会と，成長の方向性を見失い“格差社会”と呼ばれる近年の日本社会とでは，公教育の社会的機能に相違があると見ることは当然であろう．教育について論じる際には，そうした社会構造の変化を射程に入れることが必要となる.

1.2.3 “社会的期待”の制御

先に述べた「コミュニケーション重視の英語」なるものは，数学教育の現代化における「現代数学」も同様だが，その内実は必ずしも明快なものではない．それにもかかわらず（あるいは，むしろ，それゆえ）“言葉(シンボル)のもつイメージ喚起力”のために，より広範な社会的影響力を“一時的”に獲得しているかのように感じられる．そもそも，日本の国家のような,さまざまな部分社会を多層的に含む巨大な規模の社会にあっては，社会の構成員の全体が共有し得る“イメージ”が，いわゆる“共同幻想”以外にあり得るのかという問いすら成り立つかもしれない.

しかし，少なくとも“公教育”において，そうした“雰囲気(ムード)”に基づいて[11]，税金その他の貴重な社会的資本を費やし，重要な社会的基盤である

[11] もちろん，“曖昧な言葉のもつイメージの喚起力”だけでなく，非常に現実的な各種の利益集団の関与もあるだろうが.

教育制度を改変してしまうことは，かなりの危険性を孕む行為といえるのではないだろうか．“公教育”を社会（国家と言った方が良いかもしれない）において正当化された意思決定のシステムの下にある教育制度と解すれば，それは，そうした“社会的意思”によって制御（コントロール）されたものであるべきだろう．つまり，制度的教育の背景にある“社会的期待”は，“政策[12]”によって制御されるべきだということになる．

教育のもつこうした意味での社会的側面へのアプローチなしに，今の日本の数学教育の抱える困難の本質的な解決を図ることは可能なのだろうか．これが，筆者の基本的な問題意識である．そして，こうした課題の解決に資することも，“教育数学”のもつ可能性のひとつであるべきだろうと考えている[13]．

1.2.4 数学と社会との関係性

数学の教育についての議論にもどることにしよう．

一般的な傾向として，数学の教育に関する議論は，学習者〔今教育を受けつつある者〕と教授者〔学習者に教育を施している者〕の立場からなされているものが多いように思われる．しかし，前述の“社会的動機”や“社会的期待”についての考察に必要なものは，学習者の視点ではなく，むしろ，“既習者〔既に学習を終えた者〕”の視点であろう．

そもそも“教育”というものがもつ“社会的”な性格を考慮に入れるなら，数学の教育について論じるとき，個々の学習者の学習の現場だけに焦点を合わるのでは不十分であり，その前提として，数学と社会との関係についての，根本的な検討が必要になる．この課題に答えるための営みが必要であり，その責を負うのが“教育数学”であるいうのが，筆者の考えである．

[12]“社会における正当化された意思決定のシステム”は，狭義には政治的なものであるが，一般には，各種メディアの活動を含むより広範なものであろう．したがって，ここでいう“政策”も，広義に解すべきものである．

[13]ここで論じた意味での“社会的側面”にアプローチするといっても，政策決定に直接的な影響を与えるための政治活動を行おうというのでない．政策目的を実現するための選択肢の提示や，選択された内容を表現するための教科目の設計（デザイン）といった面での活動が念頭にある．なお，学問的営みが“政策決定”といった種類の過程において果たし得る役割については，本稿の付録○に掲げたマックス・ヴェーバーの見解を参照のこと．

1.2.5　社会的期待の零点 — 数学不要論

“社会的期待”と制度的教育の関係性の基本は，前者なくしては後者が存在しえないということであろう．これは，数学に限ったことではない．いずれの学科目であっても，社会的動機が存在しなければ制度的教育の対象となることはなく，あるいは，社会的動機が消滅すればそうした教育の対象ではなくなるというのが自然であろう．

それでは，数学に対する“社会的期待”について，社会的に制度化された教育の典型である“学校教育”を取り上げて，もう少し具体的な検討を行ってみたい．つまり「学校で教えられる数学に何が期待されるか」という問いについて考えたいのだが，ここでは，その最も“極端な”解答である,「何も期待しない」，つまり「学校で教える数学は不要である」という論を取り上げてみよう．

こうした論を「無意味」と切り捨ててもしかたがない．先述したように，我々が相手をする必要があるのは，必ずしも論理的な主張ではなく，ある種の漠然とした“社会的雰囲気”ですらあり得るのだから．したがって，また，この種の数学不要論に対抗するには,「あなたの役には立たないかもしれないが，他の人の役に立っている」といった型の言説では不十分であろうし,「文化としての数学」論も，多様な文化的営み — 茶道でも華道でも良いが — の中からなぜ「数学」がカルチャースクールではなく公教育で取り上げられるのかという問いの前には無力であろう．

1.2.6　二種類の数学不要論

日本の現状として，確かに,「学校で教える数学は不要である」という主張が，学校教育の“既習者”の口から語られることがある．筆者が身近に見聞したこうした主張は，大きく，次の二種類の数学不要論としてまとめることができる．

1. 日常型の「数学」不要論

   「学校で習う数学は，社会へ出てから／日常生活では，必要ない」といった類の言説に代表される主張．“小学校の算数で習う一部の内容”は，除外されることもある．

2. 専門型の「数学」不要論

「大学の共通教育で数学者が教える数学は，我々の専門分野では不要である」といった言説に代表される主張．

1番目は，より広範な“学校教育不要論”の一変種といっても良いかもしれない．そういう意味では，“初等的な数学”が除外される分については，まだ微温的な不要論といえるかもしれない．

本研究集会の主題に照らして重要なのは，2番目の型の「数学不要論」である．これは,「数学自体が不要である」という論ではなく，学校教育で“標準的に”教えられている“特定”の「数学」が，既習者の社会的期待を満たしていないと主張するものである．言語の比喩で述べれば,「現代の日本で生活するのに，源氏物語を読むための日本語は必要ない」であるとか,「大阪でビジネスをするのに，標準語を勉強しても時間の無駄」といった言説と同種の主張と見なすことができるだろう．ここに,「数学」の多様性と「規格」の問題が含意されていることに留意してもらいたい．

1.2.7 “数学不要論”出現の歴史的背景

こうした「数学不要論」は，近代西欧的な“学校”というものの発達と深く関係していることを注意しておこう．

歴史的に見れば,“数学”的な知識や技法は，土木や建築，作暦，交易等々の職能集団において開発・保持されており，その“教育”についても，各々の職能集団の内部で，職能に適合した形態で継承されるのが基本的な姿であった．そうした状況下にあっては,「数学」を学ぶことへの疑念は，少なくとも職能を有した構成員として生きていくことが選択されている限り，生じようもなかったであろうことが想像される．もちろん，このことは,「数学」が独立した体系であるという意識の希薄さと表裏一体であったのだろうが[14]．ところが，近代西欧的な“学校”が，こうした職能集団からの独立性の高い“組織体”[15]として形成されるにつれ，

[14] 何をもって「数学」を独立した体系と見るかについては，多様な立場がありうるだろう．例えば，いわゆる「純粋数学」と呼ばれる学問分野の形成に，近代における中等学校の教員養成を生業とする職能集団（近代西欧的な高等教育機関の源流のひとつ）の成立との相関関係を見る立場があるが，本研究集会の主題の背景として興味深い見方であろう．(文献 [1] を参照されたい.)

[15] ここでいう“学校という組織体”は，学習者と教授者だけでなく,“卒業者”も包含するものとして捉えた方が良い．もちろん，教授者の職能集団とは，構成員が包含されてはいるものの，区別すべきものである．

「専門型の数学不要論」が出現することになる[16].

また,「日常型の数学不要論」の方は，初等的な“（職能と直接的な関係をもたない）普通教育”の拡がりを背景としている．前節でも述べたが，この型の主張は，より一般的な「学校教育不要論」において,「数学」が不要な教科目に含まれる特殊な場合と捉えた方が良い．こうした“初等普通教育で必要な教科目”をめぐる多様な主張については，ヨーロッパより,“機会の平等性”に対する意識の高い社会であるアメリカの方が参考になる（例えば，文献 [5] を参照のこと）.

1.3 数学の多様性と普遍性

○一次的なものと二次的なものを選り分けること.

1.3.1 数学教育の個人的側面と社会的側面

[16] 20 世紀初頭のいわゆる“数学教育改造運動”に例をとれば，ジョン・ペリーの運動も，フェリックス・クラインの運動も，エンジニア集団の要求する数学教育と一般的な学校教育との相克に由来するものである．ペリーの運動が「エンジニアのための新しい数学教育」を学校教育全体へ広めようとする方向性をもっていたのに対して，クラインの運動は「従前の学校数学教育」をエンジニア教育への適合性の高いものに再編することを志向するものとして出発した.

2　教育数学とはどのような営みなのか

参考文献

[1] 蟹江幸博，佐波学 『エアランゲン就任講演にみるクラインの数学観について – 試論 – 』 三重大学教育学部紀要， 第 60 巻， 教育科学 (2009), 219-236.

[2] Martinet, A. : *Éléments de Linguistique Général*, Armand Colin, Paris, (1970).

[日本語訳] アンドレ・マルティネ : 『一般言語学要理』(三宅徳嘉 訳), 岩波書店, (1972).

[3] Piaget, J. : *L'épistémologie Génétique*, Presses Universitaires de France, Paris (1970).

[日本語訳] ジャン・ピアジェ 『発生論的認識論』（滝沢武久 訳）白水社, (1972).

[4] Prieto, L, J. : *Pertinence et Pratique*, Minuit (1975).

[日本語訳] L. プリエート : 『実践の記号学』（丸山・加賀野井 訳), 岩波書店, (1984).

[5] Ravitch, D. : *LEFT BACK : A Century of Battles Over School Reform*, Simon & Schuster (2000).

[日本語訳] ダイアン・ラヴィッチ 『学校改革抗争の 100 年 — 20 世紀アメリカ教育史』（末藤・宮本・佐藤 訳）東信堂, (2008).

[6] Saussure,F.:*Cours de linguistique générale*, (edition critique preparee par Mauro,T.D.), Paris : Payot (1972).

[日本語訳] デ・マウロ 『「ソシュール一般言語学講義」校注』（山内貴美夫 訳), 而立書房, (1976).

[7] Thomas, I.(tr.):*Greek Mathematical Works*, Volume I: Loeb Classical Library 335: Harvard University Press, (1991).

[8] マックス・ヴェーバー 『社会科学と社会政策にかかわる認識の「客観性」』（富永祐治 立野保男 訳，折原浩 補訳） 岩波書店 (1998）.

付　　録

A. 教育数学のクレド

“共同体”という概念装置との関係で，筆者の想定する「教育数学」と呼ばれる営みが満たしているべき信条（クレド）をまとめれば，以下のようになる．

1. 数学の多様性

   共同体 (community) で構成員に共有される「数学」を，“共有数学 (communal mathematics)”と呼ぶ．

   共有数学は，共同体ごとに異なる相貌をもち，それぞれの固有性は「言語」と同種の固有性である．

2. 数学の普遍性

   人間が環境と相互作用を行うための手段[17]としての「数学」を，“自然数学 (natural mathematics)”と呼ぶ．

   自然数学は，人間と人間の相互作用の手段としての「言語」と同種の普遍性をもつ．

3. 教育という観点

   教育 (education) は，一次的には人間と人間の非対称な相互作用によって人間の内面に変容が生じることであり，二次的には共同体を構成・維持・変容させる手段のひとつである．

   自然数学と共有数学は,「教育」という観点から数学を見ることで,その姿を顕わにすることができる．

4. 教育数学の目的

   教育数学は，教育という観点から数学を見ることで自然数学と共有数学の諸相を明らかにし，また，その成果を数学の教育に関連する諸課題の解決に役立てることを目的とする営みである．

[17]比喩的な意味で，自然を読み解く“言語”のこと．

B. 政策決定に資する学問的営みとは

“政策決定”といった種類の過程において，学問的営みはどのような役割を果たすことができるのだろうか．マックス・ヴェーバーが『社会科学と社会政策にかかわる認識の「客観性」』論文 ([8]) に掲げた見解について，簡単にまとめてみる．

まず，ヴェーバーは,「人間の行為」というもの全般について,「その究極の要素を抽出しようとすると…そうした行為が「目的」と「手段」の範疇（カテゴリー）に結びついていることがわかる」とする．その上で,“学問的な考察の対象となり得る”ものとして,「行為者」が何らかの「手段」を用いてしかるべき「目的」を達成しよう「意欲」している状況を設定する．

なお,“政策”の枠組での対応物を示すなら,「行為者」というのは政策決定者（政府）であり,「目的」というのは検討の対象としたい政策目的,「手段」は具体的な政策と思ってよいだろう．

ヴェーバーの主張の大筋を述べておく．まず，前提として，目的を所与と仮設する．つまり，目的の設定自体は，学問の役割ではないとする．そして，与えられた「所与」の目的を実現するための「手段」についての技術的評価など，行為者が意思決定をするための補助こそが，学問の役割だとするのである．

より詳しく述べれば，次のようになる ([8],pp..30–35).

(1) 目的への手段の適合性の評価，すなわち，所与の目的について，いかなる手段が適合し，また適合しないかを，その時代的な知識の限界内で，ある妥当性をもって確定すること．

    この目的の達成可能性の見積もりにより，当の目的に，当代の歴史的状況下で，実践上意味があるか，あるいは，無意味かについて，批判 (kritisieren) することが可能となる．

(2) 次いで，所与の目的を達成する可能性がありそうな場合に，そのために必要な手段を現実に適用することに随伴して生じる結果（意図した所期の目的達成の他の副次的諸結果や犠牲）を確定すること．

    そのことで，行為者の行為の意欲した結果と，意欲されなかった随伴結果との相互秤量 (abwägen) を可能とする．この秤量自体に決着をつけることは，もはや学問のよくなしうる任務ではなく，意欲する人間の課題となる．

(3) そして，意欲する人間がこうした決断を下す際に，学問に従事するものが提供しうるものは，意欲されたもの（目的）の意義に関する知識となる．

目的の根底にある，もしくは，ありうる「理念 (Idee)」を開示し，論理的な連関をたどって展開することによって，行為者が意欲し，選択する目的を，その連関と意義に即して，行為者自身に自覚させることが可能となる．

(4) 最後に，価値判断にかんする学問的な取扱いは，さらに進んで，意欲された目的とその根底にある理想を，ただ単に理解させ，追体験させるだけでなく，とりわけ，それらを批判的に「評価する (beurteilen)」ことも教えるものでありたいとする．

ただ，この批判にできることは，意欲されたものが内面的に矛盾を含んでいてはならないという要請に照らして理想を吟味することに限られる．

C. 藤澤のクライテリア —「数学の規格」の一例

数学の論理と教育の論理

最近,「 $6 \div 2(1+2)$ はいくつになるか？ 」 という問題が，複数の答をもつということで，巷間の話題を集めている[18]．要は，記法における演算の順序の問題である[19].

記法の問題について，数学的に要求されるのは，演算の順序の一意性が担保できることであろう．しかし,「新たな記法」を学校教育を通じて導入するときには，社会の多数を占める学校教育を終えた構成員をどうするかという，教育的には本質的な問題に逢着する．特に，それが，すでに定着した事柄の変更である場合には，より困難さが増すことになる.

本稿では，この「記法」の問題を題材に，明治期に「日本の算術の規格」を定めることを志した藤澤利喜太郎氏の試みを振りかえることで,「数学における規格」のひとつの側面を瞥見してみたい.

『算術條目及教授法』初版

藤澤利喜太郎は，四則の演算記号の使用法について,『算術條目及教授法』（明治 28 年初版）の第二編第五節で，以下のように述べている（pp.169–170）[20] .

（1）「掛け算の符号は（×）のみを用ゐるべし，此れは小数点の確定せるより来る自然の結果なり」とする.

（2）「割り算の符号は（÷）を用ゆべし，此の符号は本邦に於て従来既に最も広く行はれ居るものなり」とする.

---

[18]この話題について興味をお持ちの方は，インターネットで 「 $6 \div 2(1+2)$ 」 を検索されたい.

[19]詳しくは，小学校算数の記法と中学校における積の省略記法の混在に起因している．なお，記法の曖昧さがこの種の混乱が生じさせることは，明治期，すでに，藤澤利喜太郎によって指摘されている（後述）.

[20]藤澤の著作からの引用にあたっては，旧漢字は現代表記に，片仮名は平仮名に,（外来語等を表す）平仮名は片仮名に，それぞれ改めた.

（３）「符号の連続するものは文典に所謂命令法に読む通りに解釈すること定べし」とする．

挙げられている例は,「15+6 ÷ 3 は，拾五に六を加へ，之れを参を以て割れる」と読み（答は 7 になる）,「拾五に，六を参にて割りたる商式を加ふる場合は，必らす 15+(6 ÷ 3) と書くべし」とする．

なお,「此の事に就きて著者は毎度質問を受けたることあり，**何れにても宜しきことなれど，兎に角に確定し置くこと無益にあらざるべし**[21]」と付言している．

『算術教科書』第一版

『算術條目及教授法』に則って著された藤澤自身の教科書『算術教科書』（上巻，明治十九年）では，しかし，この問題に関連する項目は，以下のようになっている（第 53 節，p.83）．

加減乗除の符号を以て結び付けられたる式の解釈に関する従来の慣例は次の如し．

（第一） ×，÷ のみを以て結び付けられたる式は順を追つて運算す，例へば $246 \div 3 \div 2$ は 246 を 3 で割りたる商 82 を更に 2 で割るという意にして，又 $246 \div 3 \times 2$ は 246 を 3 で割りたる商 82 に 2 を掛けるといふ意なり．

（第二） $+, -, \times, \div$ を以て結び付けられたる式を計算するには（第一）に従ひ $\times, \div$ によりて示されたる運算を行ひたる後，$+, -$ によりて示されたる運算を行ふ，例へば

$$15 \div 3 + 7 \times 2 - 6 \div 2 \times 3 = 5 + 14 - 9 = 10$$

注意 上の如き書き方は甚だ紛はしきが故に成るべく之を避くる様にすべし，則上の如き書き方に出遭ふたるときは従来の慣例によりて解釈すべしと雖ども自ら上の如き書き方を用ゆべからず，混雑を生じるの恐れある場合には必ず充分に括弧を用ゐて運算の順序を明示すべし，例へば

[21]以下，引用文の強調は，本稿の筆者による．

$$(15 \div 3) + (7 \times 2) - \{(6 \div 2) \times 3\}.$$

つまり,『算術條目及教授法』の初版で提示された記法とは異なっていることが見て取れる.

『算術條目及教授法』第二版

『算術條目及教授法』初版の記述と,『算術教科書』の記述の差異について，藤澤自身の説明を紹介しておこう.

明治 35 年に出版された『算術條目及教授法』第二版の附言において,藤澤は,「符号の連続せるものを解釈するに，本文の如くするものと所謂乗除を前きにし加減を後ちにするものと二通り」あるが,「兎に角に一定し置くこと必要ならん」と考え結果として初版のように定めたのだと述べる.

しかし，本文における該当部分（第二版 p.172）では，本書第一版の公刊後に寄せられた多くの意見から後者の方法が「既に広く世に行はれ居る」ことを知ったこと，および,「元来何れにしても宜しきこと」であるから,「(藤澤著の）算術教科書第五十三節及算術小教科書第四十八節の如くに」定め直した旨の説明が付け加えられている.

大数の区切りの桁数

別の例を見てみよう．大数の区切りを「三桁毎に区切るべきか，四桁毎に区切るべきか」という問題についてである.

藤澤は，前者が「欧米各国に通用するの利あり」なのに対し，後者は「本邦呼び声に適応する」ことができるとしながら，次のように結論する.

> 銀行社会を初めとし，最も広く実際に行はるゝは，三桁にして，理窟上最も適当なるは四桁なり，而して此の種類の事柄に就きては，算術教授法は社会の実際を強ゆべからず，社会の実際は当然算術教授法を左右すべく，算術教授法は社会の実際に従順ならざるべからざること，既に述ぶるが如し，著者は，此の教育上の大原則に拠り，断然四桁を捨て，三桁を採ることとせり（『算術條目及教授法』初版，p..165 – 166）.

藤澤のクライテリア

先の引用において，藤澤が言及している「既に述ぶる…此の教育上の大原則」とは，次のような主張である．

> 総て何事に限らず，名称符号記法等に，一通り以上ある場合に於て，其の紛らはしきもの，誤りを生し易きものは，是非とも一定せざるべからず，然れとも設へ一通り以上あるも，毫も紛らはしからず，又誤りを生する懸念なきもの，例へば一より小さき数を書くに，小数点の前へに零を書くと書かざるとの如きは，便宜に任かして可なり，必らすしも杓子定規を当て嵌めて無暗に窮屈するには及ばぬことなり，又此の辺の事柄に至りては，非常なる不都合不合理のなき限りは，成るべく実際世に行はるゝ慣例に従ふへし，換言すれば，**算術をして社会の実際を圧制せしむべからず，算術をして社会の実際に服従せしむべし** (pp.. 162 – 163).

これは，“ 算術[22] ” の教育内容を規定するにあたっての，藤澤の基本的な姿勢を提示するものであった．

数学の規格と共同体の慣例

“ 算術 ” とは異なるものの，高等教育の対象となる数学についても，通常，その数学を用いる共同体ごとに，共同体での使用によって形成された “ 慣例 ” が存在する．もちろん，先の藤澤のクライテリアのように,「共同体の慣例に数学の規格を従属させるべき」とは，一般的には，主張できないだろう．

結局のところ,「数学の規格」は，数学的論理と共同体の慣例が交錯する場において成立する．そして，数学の生成発展の成果の実効性のある社会的還元のためには，適切な「数学の規格」の設定が，ひときわ重要な役割を果たすことになるだろう．

[22]藤澤のいう “ 算術 ” は，中等教育までを範囲とする “ 算術 ” である．この “ 算術 ” は，戦後の教育課程から消えたため，そのイメージを把握しにくいかもしれないが，藤澤にとっての “ 算術 ” は，普通教育の要の科目であり，社会人としての備えておくべき，基礎的な技能や知識を意味していた．