# 数学の多様性と普遍性

## ── 教育数学の試み ──

蟹江 幸博

## 目 次

**付　録** **51**



## はじめに

数年来,「教育数学」と呼ぶ営みを構築すべきであると提唱してきている．しかし，なすべきことが余りにも膨大で，個々の論文や講演では，いわば「教育数学」の総論のない各論ばかりであったということが言える．「教育数学」という建造物をしっかりしたものとして作りたいと思うために，ある場所では基礎のコンクリートが打ちっぱなしなまま建物としての骨組みも仕上がっていなかったり，基礎はそこそこに火の見櫓のように高さだけのものだったりすることが多かった．

もともと「教育数学」は,「数学」の「教育」を，理性的に議論できる人達にとって，理性的に議論することのできる枠組みを作ることを目的として始めたものであった．各論もすべてとは言えないが，いくつかのもののある程度の形が見えてきた今，振り返って，このような営みが何故必要なのか，それがどのような営みであるか，またあるべきかということについて，ある程度はわかってもらえる説明ができるかもしれない．

### 「数学」と「教育」という言葉の多義性

さて，数学の教育については，いろいろな立場の人が，さまざまな仕方で論じている．そこで提示される諸々の見解の多様性にはまたさまざまなレベルがあって，議論レベルの違いを意識しないことのためか，数学の教育を主題とする論議は，しばしば，擦れ違いや紛糾といった状態に陥りやすい．そうした論議の混乱は,「数学」という言葉と「教育」という言葉のもつ多義性に対して十分な注意が払われていないことに由来しているのではないだろうか．

「教育」と「数学」の多義性はまず,「教育のシステム」の複数性と,「教

授の対象となる数学」の複数性を意味する．したがって，また，その組み合わせである「数学の教育」のさらなる複数性が生まれ，それぞれのありうる「数学の教育」の検討・評価が必要となることになる．そういう意味では，現在の日本の学校制度という「教育システム」と，そこで教えられている「学校数学」は，それぞれ，様々な可能性のうちのひとつに過ぎず，その組合せとしての「現在の日本の学校数学の教育」を前提とする議論が,「理想の」数学の教育に対する議論とすれ違うことは必然であり，今の日本社会の現状に適したものであることもまた自明であるとは言えない.

## 数学の教育に関する論議に見る擦れ違い

「数学の教育」に関する論議の「すれ違い」の原因を見てみると,「教育システム」を前提として「数学」を可変とする型のものと，逆に,「教育システム」は可変であるが教える「数学」については共通理解があるとする型のものとがある.

すれ違いについて寓意的な例を挙げるなら,「(学習者の発達過程への配慮が重要なはずの）初等教育のシステム」を（無意識的に）前提として「フーリエ積分論を教えることの是非」を論じたり,「中等普通教育で，集合論を扱うこと」を既定の事実として「どのような教授法がより学習効果を上げるか」についての議論を行うようなものである,

もちろん，より複雑な「すれ違い」の型としては，議論の前提として明示的に定立しておくべき「教育システム」と「教授の対象となる数学」が，議論をしていく中で,（非明示的に）変化していってしまうというものもある.

## 共有数学と自然数学

「教育の対象としての数学」と「研究や応用の対象としての数学」は“ 理念 ”として区別しておくべきであると考えている．種々の理由はあるが，前者を「**共有数学**（*communal mathematics*）」，後者を「**自然数学**（*natural mathematics*）」と呼ぶことにした.

「自然数学」は,「数学の本性はその自由性にある[1] 」というカントールの言葉が代表するような“ 自然さ ”を持つものであり，また，それは行なうものであって，数学のさまざまな新しい発展の契機を与える.

[1]Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit.

他方,「共有数学」は，教育を通じて，しかるべき共同体の構成員に共有されることをその本質とし，過去の数学を未来へ伝達・伝承する役割と，自然数学に芽生えた新たな数学の種子を開花させ，共同体の構成員に共有可能な形態へと成型するという機能をもつ．特に，この後者の機能に焦点を当てるなら,「共有数学」は，教育システムと相関性があるよう“ 人為的 ”に設計（デザイン）されるべきものであり，したがって，そこには“ **規格** ”の設定が必要となってくる．

### 数学の教育について論じるためのプラットフォームを

数学の教育に関する議論に“ 擦れ違い ”を生じさせないためには,「教育」や「数学」の多義性を認めた上で，それぞれがもつ多様な様相を互いに比較が可能な形態で把握し，一望し得るよう並べ直す必要があるだろう．このように，数学の教育に関する議論がより実効性の高いものになるよう,「教育」や「数学」の多義性を秩序だったものに整理し，種々の「数学の教育」の評価（クリティーク）や設計（デザイン）を可能とするような枠組みを構築することは,“ 教育数学 ”に期待される最も基本的な役割である．

「数学の教育に関する議論のためのプラットフォームを構築する」というのはこうした意味だとしておこう．

上述の目的をもった「教育数学」が何かを考えるために，まず,「教育」や「数学」の多義性について，さまざまな側面から見ていくことにしよう．そして，そうした多義性がもたらす課題を解決するために,「教育数学」が何を，どのようにしようとするのかについて，現在のところの基本方針を，発想段階だが，説明をしてみようと思う．

詳しい構成は，次の通りである．

### 第１章　数学の教育で何を学ぶのか — 個人的側面を中心に

最初に，日常生活で「教育」に関係する活動として，いわゆる学校教育に加えて，企業等で行われている現任訓練（On the Job Training）や徒弟教育，出版物等を利用した独学，といった例をもとに,「教える」や「学ぶ」という言葉で表現される人間の営みのさまざまな様相を検討し,「教える」という行為の意味づけには，個々の人間が何がしかを「学ぶ」ということの規定が先立つことを観察する．

次に，個々の人間が「数学で学ぶのは何か」という，いわば，数学の教育の個人的側面に関する問いを立て，数学で学ぶものを「知識」と「技能」に区分して，その内実について論じる．

特に，この「数学で学ぶのは何か」という問いの解答としての「数学的に考えること」について，この答と正面から取り組んだハンス・フロイデンタールの知的な格闘の後を概観する．

また,「数学で学ぶ」のは「言語としての数学」であるとの言説を巡って，肯定的な見解と否定的な見解に検討を加えた上で,「数学は，習得しようという“ 意図をもった学び ”でしか身につかないのか，それとも，子供が遊びながら言葉を覚えるように習得することが可能なのか」という問いに提示する.（言語習得理論の言葉を借用すれば，数学の「自然習得」と「教室習得」の可能性の問題と言っても良い.）

## 第 2 章　制度的教育と数学 — 社会的側面を中心に

前章は,「個々の人間に生じる過程としての教育」という，いわば，教育のミクロな見方についての議論であったが，第 2 章では，教育は「共同体を構成する総員が共通にもつことを要求される“ 文化 ”を，個々の候補者に習得させることを通じて，共同体の構成や維持・変革を生じさせる手段」であるという観点を採ることで見えてくる,“ 教育の社会的側面 ”について検討する．

具体的には，何らかの学問領域が，社会的に制度化された教育（その代表が“ 学校教育 ”であり，なかでも“ 公教育 ”である）の対象となるためには，その背後に“ 社会的期待 ”が必要であることを論じた上で，その“ 社会的期待 ”が存在しない状況である「数学不要論」の含意するものを，歴史的背景を交えながら，瞥見する．

## 第 3 章　「数学」の多義性を瞥見する — $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\grave{\eta}$ の系譜から

教育数学で扱う「数学の多義性」は,「既定の数学の様々な分科からどのような項目を取り上げるか」といった種類の問題ではない．人類史的な視野 — 時間的にも空間的にも — の下での,「数学」という言葉の多義性が問題である．

その基本的な疑問は，我々が過去の歴史における「数学」— 「メソポタミアの数学」,「エジプトの数学」,「中国の数学」,「インドの数学」,「ギ

リシアの数学」等々 — を論じるとき，そこで論じている古人の営みの何をもって「数学」という名称を冠するかというものである．

その検討に際しては，今の「数学」を過去に投影するというアナクロニズムの禁を犯す愚は避けたい．しかし,「数学とは何か」という規定なくして，どうすれば「古代の数学」を「数学」と認めることができるのだろうか．ここには，数学の“ 多様性 ”と，そうした多様性の根底にあって数学を数学たらしめている“ 普遍性 ”という主題が秘められている．

第 3 章は，この問題に解答を与えようということではなく,「数学」であることが明快な一群の営みを通観することで，この問題の性質を把握するための材料を提供することである．具体的には，現在の“ mathematics ”という言葉の語源である“ $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\grave{\eta}$ ”から出発し，この言葉（および，その翻訳語）で呼ばれる古人の営みのいくつかを取り上げる．

## 第 4 章　数学の多様性と普遍性 — 教育数学という試み

前章で概観したような「数学の多様性」と「数学の普遍性」の根底に横たわるものを,「共有数学」と「自然数学」に求めるのが，筆者の考える“ 教育数学 ”の基本的な着想である．

つまり,「数学の普遍性」を個々の人間が営む数学的な行為の“ 自然性 ”に，そして,「数学の多様性」を，教育を通じて構成・伝承・変革される共同体と相互依存関係にある数学の“ 共有性 ”に見ようというものである．

なお，教育数学の基本的な枠組みを構築するための鍵は，フェルデナン・ソシュールの言語理論に求められる．

具体的には，ソシュールの

1. 言語（ランガージュ）の本質は，人間と人間のコミュニケーションと呼ばれる相互作用を実体化する“ 手段 ”という性質にある．
2. 言語（ランガージュ）は，シニフィアンとシニフィエの対構造をもつシーニョのなす系（システム）としてのラングと，ラングの規定に則ったコミュニケーションの実現であるパロールの総体からなる．

という二つの主張が出発点となる．そして，こうした主張が，次のように“ 拡張 ”される．

1. ラングを“ 操具機構 ”に一般化すること．

   (a) 人間と（人間以外の）環境との相互作用，例えば，人間が太陽や月の天体運動を“ 観察 ”したり，“ 記録 ”したり，しかるべき儀式に相応しい時期を“ 予測 ”したりするための「手段」を，ソシュール的な言語と並行して取り扱う．もちろん，これは，ガリレオ的な意味での「言語としての数学」を想定したものである．

   (b) こうした状況を一般化して，人間と（人間も含む）環境との相互作用の手段を「操具（organon）」と呼ぶ．

   (c) 操具は，おおむね，ソシュールのシーニョの一般化である．シーニョのなす系(システム)であるラングの一般化として，ある種の構造を満たす系(システム)を考えるときには，「操具機構 (organon schema)」と呼ぶ．

   (d) ソシュールのラングを，「相互作用の対象を人間に限定した場合の操具機構の部分機構」という意味で「言語機構（linguistic schema）」と呼ぶなら，「対象が人間以外」である場合の部分機構を「数学機構（mathematical schema）」と呼ぶことができる．

   (e) 操具機構の満たす構造として，シニフィアン＝シニフィエの構造を一般化したもので，ルイ・プリエートが「双面構造 (bifacial sructure)」と呼んだものを採用する．

   (f) 操具のもつ「共示機能（connotative function）」によって，操具機構は，局所的には，言語機構が数学機構を包含する，もしくは，その逆であるような構造をもつ．

2. パロールを“ 操具実現 ”に一般化すること．

   (a) ラングの規定を満たすコミュニケーションという相互作用を実現がパロールであったように，操具機構の媒介によって実体化されの相互作用を「操具実現（organon realization）」と呼ぶ．

   (b) 言語機構が媒介する操具実現が「（ソシュールの意味での）パロール」であるが，数学機構の操具実現が「数学実現（mathematical realization）」である．

3. 個的（individual）なものと共有的（communal）なものを区別すること．

    (a) ソシュールにあっては必ずしも分明化されていない「ラング（機構）」の共有性を，共同体と相関的である「共有的」なものと，各々の構成員が分有する「個的」なものに区分する．
    (b) 共有的な操具機構は，実体的なものではなく，理念的なものである．
    (c) 操具実現は，常に，個的なものである．

教育数学を展開するのに必要なさまざまな概念は，以上のような枠組みから二次的に構成することになる．例えば，教育を「言語実現による個的操具機構の変容」として定義したり，自然数学を「（個的な）数学実現の総体」，共有数学を「共有的数学機構」と定める，といったふうにであるが．その詳細や有効性の検証については，今後の課題と考えている．

### 付　録

教育数学の構築は，いまだ試行錯誤の途次にあり，技術的な細部が定着するまでにはまだまだ時間が必要である．そこで，現在，筆者が,「教育数学」という営みの骨格をなすと考えている事項についてまとめてみたのが，付録 A である．

また，本文の流れから比較的独立した話題を二題にまとめたものが，付録 B と付録 C となっている．

## 1　数学の教育で何を学ぶのか — 個人的側面を中心に

本章では,「教育」という言葉の多義性から始めて，本稿で仮に“ 数学の教育の個人的側面 ”と呼ぶものについて，そこにどういう課題が潜んでいるのかを瞥見してみたい．

## 1.1　「教える」と「学ぶ」の非対称性

「教育」を,“ 個々の人間の営み ”という観点から眺めてみよう．このとき,「教育」には「学ぶ」と「教える」という双つの方向性があることが，すぐに見て取れる．教育とは「学ぶ」ことなのか〔学習者の立場〕,「教える」ことなのか〔教授者の立場〕，それとも，両者が融合した“ 特殊 ”な過程(プロセス)なのだろうか.

この「学ぶ」と「教える」を意識しながら,“ 教育 ”を含意する状況を,日常生活からいくつか取り上げてみよう.

1. 学校教育
   (a) 講　義
   教室で，多人数の学習者と一人の教師が対面で行う「教育」.
   (b) 演　習
   実験実習やゼミナール等を通じた「教育」.
   (c) 宿　題(ホームワーク)
   予習，復習，レポート作成等を通じた「教育」.
2. 現任訓練 (On the Job Training)
   職業的な仕事の現場で，業務に必要な知識や技術を,「研修における訓練」を通じて習得させる「教育」.
3. 徒弟教育
   職業的な実務の場で，未熟練者が，熟練者との協働作業に従事することを通じて，業務に必要な知識や技術を「学ぶ（“ 盗む ”)」という形態の「教育」.
4. 独　学
   学習者が“ 出版物（電子的なものを含む）”等で「学ぶ」ことによる「教育」.

1-(a) と 2 番目は，学習者が「学ぶ」行為と教授者が「教える」行為が融合された状況において「教育」が成立している.

3 番目では，学習者が「その人物から学ぶ」という意味での「教授者」は存在するだろうが，その人物自身に「教える」という意図があるか，あるいは，あるとしてもその在り方が 1-(a) や 2 番目の例と同種のものと認定して良いかについては，疑問がある．

4 番目においては，学習者との“ 直接的接触 ”をもつという意味での「教授者」は存在しない．しかし，視（聴）覚媒体化された「作成者の意図」を想定するなら，この「意図」が「教える」というものであるかどうかについて，11-(a) や 2 番目の例と 3 番目の例の区別と同様な事情が成立するだろう．

なお，1-(a) 以外の学校教育の要素について，上述のような見方をするなら，(b) の「演習」は 2 番目ないし 3 番目の例との，(c) の宿題（ホームワーク）は 4 番目の例との，それぞれ類似が見て取れる．また，1-(a) と 2 番目の例の差異を明らかにするためには,「教える」と「学ぶ」についてのより精密な議論が必要となるが，本稿では扱わない．

以上の簡単な予備的考察から見て取れることは,「学ぶ」と「教える」の，ある種の非対称性である．つまり,「A から B が学ぶ $\Leftrightarrow$ B が A に教える」といった単純な“ 対称性 ”は成立しない．例えば，上の 3 番目の例のような場合，日常的な言葉の用法では,「教えてもらわないが，学んでいる」ということになるだろう．

このように，少なくとも（比喩的ではない）慣用的な意味では,「教えても学ばない」こともあれば,「教えなくても学ぶ」こともあることになる．

もちろん,「教える」と「学ぶ」が独立しているわけはない.「教える」を,「学習者に“ 学ばせる ”ことを目的とした意図的活動」と考えてみよう[2]．このとき,「教えても学ばない」のは，単に「教える」という行為の失敗に過ぎないということになるだろう．結局のところ,“ 論理的 ”には,「教える」は「学ぶ」に従属する概念ということになる．

本章では，次項以降で「数学の教育で何を学ぶのか」ということについての検討を行いたいのだが,“ 意図的活動 ”としての「教える」という行為は，このことを明らかにする上で，重要な役割を担うことになる．

なお,「学ぶ」についても，意図的なものとそうでないものを区別することが有効なことがあるが，それは，そうした区別が必要となる場面で

[2]「教える」についてのこの“ 定義 ”は，3 番目の例には適合しないかもしれない．もし，3 番目の状況についても「教える」という言葉を適用するのであれば,「教える」ことを「その結果として学習者が“ 何がしか ”を学ぶ活動」とでもすることになるかもしれない．

述べることとしたい.

## 1.2 数学の教育で何を学ぶのか

ここで,「数学の教育によって学習者は何を学ぶのか」ということについて考えてみよう. 検討作業の叩き台として, 数学の教育の成果として期待されることを, 非常に単純化して,“ 知識 ”と“ 技能 ”に二分する.

まずは, 数学の教育で「学ぶ」べき“ 知識 ”と“ 技能 ”を, 次のように規定することから始めたい.

1. 知　識

   数学的な概念や定型化された技法を“ 言語化[3] ”したもので, 記憶や記録の対象となるもの.

2. 技　能

   (a) 課題解決型

   “ 所与の状況(コンテクスト)の下で, 所与の課題を, 解決する ”もので, 次の二種に類別される.

   i. 知識適用型

   既存の「数学的知識」を利用して解決するもの.
   さらに, 状況(コンテクスト), 課題, 解決の方法が, それぞれ, 言語化されているか, あるいは, 定型化されているかといった観点から, 下位の種別に分類できる.

   ii. 技法開発型

   既存の「数学的知識」ではなく, 新たな技法や概念の開発を伴うもの.

   (b) 知識創出型

[3] この“ 言語化 ”の“ 言語 ”は, 声音という聴覚媒体を用いる通常の意味での言語（18 ページのマルティネによる言語の定義を参照）に限定するものではなく, 視覚媒体等の使用も含む“ 一般的な言語 ”を想定している.（より詳しくは, 共示される内容に“ 操作（ピアジェの意味でのシェム）”を含むような, ソシュールの意味でのシーニョや, プリエートの意味でのインストゥルメントといったものである.）

(a)-ii) において創出された概念や技法を，定型化・言語化することで，新たな“ 知識 ”を創出するもの[4].

学校数学〔初等中等教育における数学〕を例にとってみよう．

学校教育で供給される数学の教育の特徴は，原則として，“（脚注３の意味で）言語化された数学の世界 ”を対象としていることである．そこで学ぶのは，(１) 数学的概念と定式化された技法という“ 知識 ”と，(２) 定式化された状況（コンテクスト）と課題において（１）の知識を適応する技能，が基本である．これは，現代日本の学校数学に特有なものではなく，古代メソポタミアの書記数学をはじめ，数学史で知られる種々の数学の教育に共通なものである．

難易度の高い入学試験で験されるのは，(あくまで言語化された学校数学世界の中で）未定型的な状況（コンテクスト）において既習の知識を適用して課題を解決することになる．そうした状況や解法が新たに“ 知識化 ”されることによって，学校数学は時間発展をしていくとみなすことができる．

ところで，学校数学で扱われる技能が“ 定型化 ”されたものであることを問題視する趣旨の見解が，しばしば主張されることがある．その是非をここで論じることはしないが，現実社会の実務で必要とされる数学的技能の圧倒的多数が定型的なものであることには注意を促しておきたい．

次に，“ 数学の教育 ”を受けた結果として達成されるべき状態を表わす日常的な表現を，上述の“ 知識と技能 ”の枠組みで位置づけてみよう．

「(数学を）知っている」や「(数学が）わかる」と言われるのは，おおむね，“ 知識 ”を，「(数学が）できる」や「(数学）使える」は“ 技能 ”を，それぞれ想定していると見なすことが，少なくとも言葉の日常的な使い方としては，自然だろう．しかし，「数学を知っている」や「数学がわかる」のことを，「知識（用語や公式)」を“ 暗記 ”しているだけの状態とは見なさず，そうした知識を“ 課題解決 ”に適用できること，つまり「知識活用型課題解決技能」を身につけていることと見なすことも，数学の教育に関心を抱く者の間では珍しくない．ここには，数学のもつ“ 道具性 ”という性格が色濃く反映していると言って良いかもしれない．

[4]技能は，一般に，知識適用型課題解決 ⇒ 技法開発型課題解決 ⇒ 知識創出，という順に“ 発達 ”する．こうして，“ 知識 ”と“ 技能 ”は独立したものではなく，既存の知識を利用した技能から新たな知識が産出され…という，一種の“ 弁証法的 ”な関係が成立していることになる．

なお,「文化としての数学」という言い方があるが,“ 文化 ”に道具性を認めないのなら“ 知識 ”に入るだろうし,「伝統芸」といったものを“ 文化 ”と思うのなら“ 技能 ”も入るかもしれない．つまりは,“ 文化 ”の定義に依存する二次的なものということになる．

最後に,“ 数学的に考える ”ことについて考えてみよう.「数学的に考えること」や「数学的な考え方を知る」という表現も,“ 数学の教育で学ぶもの ”として広く人口に膾炙したものである．

素直に考えれば，前者は“ 技能 ”であり，後者は“ 知識 ”のように思える．しかし，両者が同一の状態を表わしているのであれば，後者の表現は,“ 技能 ”を知ることができるのか，という疑問を引き起こす．この疑問をより鮮明に捉えるため，第 1.1 節で述べた「教える」という観点を取り上げてみよう．つまり,“ 知識 ”や“ 技能 ”を「教える」ということは,どういうことを意味しているのかを検討してみる．

まず,“ 知識 ”について考えてみよう．先に“ 知識 ”を「記憶や記録」が可能なものと規定したから,「数学的知識を“ 教える ”とは，学習者にそうした知識を記憶もしくは記録させること[5]」とすれば良いだろう．この場合，教授の結果の検証〔試験〕も，既習の知識を「覚えている」ことの確認という形態で，比較的容易に実行できるだろう．

それでは,“ 技能 ”についてはどうだろう．定型化かつ言語化されたものであれば，課題の提示も解法の検証も容易かもしれないが，それが“ 言語化された解答の記憶 ”，なのか，それとも，学習者の主体的な行為としての“ 技能 ”によるものなのか，その判定は必ずしも容易ではないのではないか．まして，定型化されていない場合について，何を，どう“ 教え ”れば良いのだろうか．

## 1.3 「数学的に考える」ことをどうやって教えるか

現代の数学教育に大きな影響を与えた数学研究者の一人であるハンス・フロイデンタールは，数学の教育の世界の探求を，この「考えることをどう教えるか」という疑問に取り組むことから出発した．この疑問が数学教育にもたらしたものを，フロイデンタール自身の回想を交えながら,瞥見しておこう（[1] を参照）．

[5]例えば，学習者に「ノートを取らせること」を,「教える」の様態の一つとみなすということ．

第 2 次世界大戦中，ナチスのオランダ占領によって大学を追われたフロイデンタールは，その余暇に自身の子供の教育にかかわる中で，数学を教えることへの関心を深めていった．1945 年 8 月に開催された数学教育関係の会合において，フロイデンタールは，戦時中の思索を振り返ってこう述べている．

> 考えるということを教える教育（Education in thinking）— 実に美しい響きと魅力的な言葉の組み合せではないか．何という魅惑的な課題だろう．··· 仕事のできない何年間かを過ごした後，私は，今，この課題へと立ち返ることになった．この課題について，私は，もうこれで良しと感じたことは一度もない．読むこと，書くこと，算術やフランス語，数学，体育であれ，何であれ，何かを教える者は，誰であっても，それをどう教えればよいかは正確には知らなくとも，教えているものが何であるかは知っている．考えるということは，技法（skill）ではない．私は，しばしば，長時間にわたり，私が教えたい，そして教えるべきだと思う，この奇妙な「考えるということ」について，思索にふけった．しかし,「考えるということ（thinking)」についての思索は，堂々めぐりを繰り返すばかりだった．徐々に，私は,「考えるということを教える」という問題は，理論的な方法ではなく，むしろ，もっと実践的な方法で扱うべきだということを学んだ．

その後，教育の実践の場に立って試行錯誤を重ねたフロイデンタールが到達した結論を，筆者なりにまとめると，次のようなものになる．

> 数学とは，公式の集まりや公理系で記述される集合といった「静的な体系」ではなく，人間が営む動的な知的活動の一種，詳しくは，ある種の対象を数学化するという過程を繰り返す不断の営みである．
>
> そして，数学を学ぶということは，学習者が，数学的に考えること，すなわち，数学化の過程を，指導者に誘導されながら追体験し，かつ，その追体験の過程を内観することで，内在化することに他ならない．

ここに,“ 誘導された追体験（guided reinvention）”という概念が登場する．本稿における先の文脈にもどれば,「数学を教える」ということは

「学習者の“ 数学化の過程の追体験 ”を誘導すること」になるのだろう．もちろん，真に問題となるのは，このフロイデンタールが述べる“ 数学化 ”の内実であろうが，本稿ではこの先には立ち入らない[6]．

いずれにしろ,「数学的に考える」ことを“ 教える ”ということが何を意味するかは，容易に答えられる問題ではなく,「数学とは何か」という大きな主題と向き合うことを必要とするものであることを確認しておくことにしたい．

## 1.4 数学は言語か

第 1.2 節で提示した，数学の“ 知識 ”と“ 技能 ”の話題にもどろう．

そこで，数学的な“ 知識 ”は，記憶や記録が可能なように“ 言語化 ”されたものであった．また,“ 技能 ”についても，学校数学が典型であるように，その過程の多くの部分は“ 言語化 ”されている．“ 言語化 ”されたものは“ 言語 ”の一部だと考えるなら,「数学で学ぶことの多くは，実は，言語である」ということになるのではないか．確かに,「数学は言語である」と，しばしば表現される．これは，比喩なのか，それとも，数学は言語の一部なのだろうか．

いずれにしろ,「教える」という人間の営みは，通常,“ 言語 ”を手段として実行される．数学と言語の関係について明らかにすることは，数学の教育を考察するに際して，避けることのできない段階のひとつであろう．ここでは，この“ 数学と言語の関係性 ”について，予備的な考察を試みておきたい．

### 1.4.1 数学は言語である

まず,「数学は言語である」という主張を取り上げよう．この主張の典型として，ガリレオ・ガリレイの著名な文章[7]を引用しておく．

---

[6]第 1.2 節で仮設した“ 数学で学ぶ知識と技能 ”の分類を用いるなら，フロイデンタールが追体験すべきであると考えている“ 数学化 ”の過程は,“ 最初の知識 ”である幼児が数を覚える過程や初等教育の過程に，最もよく適合するのではないかと考えている．もちろん,「技法開発型課題解決技能」を“ 学ぶ ”ためにも役立つだろうが，学校数学の大半を占める「定型化・文字化された世界における知識適用型課題解決技能」の習得について，限られた時間内で実行されることが要求される学校教育の特性の下での有効性については，そうした観点からの検討が必要であろう．

[7] [原文] La filosofia è scritta in questo grandissimo libro, che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere, se prima non

哲学〔philosophy〕は，この（宇宙〔universe〕という）偉大な書物に記され，我々の眼前に広げられたままなのです．しかし，まずは，その言語を理解し，それが書かれている文字を読み解くことを習わないと，理解することができません．この書物は，数学語〔lingua matematica〕で書かれており，三角形や円や，諸々の幾何図形が文字なのですから，この言語の助けなくしては一言たりとも理解などできないのです．それなくして，人は，暗黒の迷宮で彷徨うしかなくなってしまうのです．

この主張の“ 言語 ”は，我々が日常で用いている“ 言語 ”と同じものなのか，それとも，単なる比喩なのかは，もちろん，言語の定義によるだろう．その議論は後述することにして，次に，反対の立場を採る主張を眺めてみたい．

### 1.4.2 数学は言語ではない

今，日本で用いられている「数学」という言葉は，大雑把に述べれば，明治初頭の西洋文明摂取期に，“ mathematics ”の訳語として選び出されたものである．この“ mathematics ”(及び対応する主要な西欧諸語）がギリシア語の“ manthanō (学ぶ) ”に由来し，そこに“ 数 (number) ”の含意がないことは周知であろう．

この“ mathematics ”という語の由来について，ラオディケアの司教アナトリウスによるという伝承を取り上げてみよう[8]．

なぜ，数学（マテマティケー）〔mathēmatikē〕はこういう名で呼ばれたのか?

逍遥学派は説く．修辞〔rētorikēs〕や詩文〔poiētikēs〕や民衆音楽〔dēmōdous mousikēs 〕は教え〔mathonta〕を受けることなく理解が可能である．しかし，この数学（マテマティケー）という特別な名で呼ばれる学的領域〔mathēmata〕 は，教育〔mathēsei〕を通ぜずしては何人も修得能わざるものであると．かかる由

s'impara a intender la lingua e conoscer i caratteri nei quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile intenderne umanamente parola ; questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto. （Galilei, Galileo,“ Il Saggiatore ”, Opere, volume II, Milano, 1832, p.13.）

[8]ヘロンの『定義集』より．[26] p.2 .

> 来により，こうした学的領域の講究が数学（マテマティケー）と呼ばれることとなった．幾何学（ゲオメトリア）〔geōmetria〕と整数学（アリトメティケー）〔arithmētikē〕のみに数学（マテマティケー）という特別な名称を与えたのは，ピュタゴラス派の者どもであるという．それ以前は，各々は別々の名で呼ばれており，両者に共通の名はなかった

ここに見られるのは，修辞や詩文といった「言語」に関係する学と,「数学」と呼ばれる学が,「教育」との関係性において分別されるという図式である．つまり，そこに表明されているのは，習得に“ 教えを受けること ”の必要性の有無で,「数学」と「言語」を峻別する立場であるといっても良いだろう．

### 1.4.3 「言語」の定義を仮設する

数学と言語の関係性について論じたいのだが，両者が共に曖昧なままでは，論を進めることが難しい．そこで，まず,「言語」の定義を仮設することで，議論の道筋を明らかにすることを試みよう．

ここで採用する「言語」の定義は，近代言語学の祖とされるフェルディナン・ソシュールの系統で機能派の代表であるアンドレ・マルティネによるものである．

> 言語とは，コミュニケーションの道具で，それによって人間の経験が，意味内容と音表現とを備えた単位，すなわち記号素に，共同体ごとに違うやりかたで，おのずから分析されるものである．この音表現が，こんどは弁別的かつ継起的な単位，すなわち音素に分節され，音素は言語ごとに数が一定していて，その性質と相互連関も一つの言語ともう一つの言語では違う[9]．

「言語」をこのように定義すれば，逍遥学派の修辞や詩文・民衆音楽をこの「言語」に関する学とすることに問題はないだろう．

---

[9][4, 日本語訳] pp.23–24. 〔原文〕Une langue est un instrument de communication selon lequel l'expérience humaine s'analyse, différemment dans chaque communauté, en unités douées d'un contenu sémantique et d'une expression phonique, les monèmes ; cette expression phonique s'articule à son tour en unités distinctives et successives, les phonèmes, en nombre déterminé dans chaque langue, dont la nature et les rapports mutuels diffèrent eux aussi d'une langue à une autre.

他方，ガリレイの「言語」の方は，大きく二つの問題が含む．ひとつは，“ コミュニケーション ”を人と人の間の成立する相互作用と解すれば，“ 宇宙との交信 ”はコミュニケーションとは見なされないこと．もう一点は，ガリレイの「言語」が“ 音表現 ”によるものと考えることの妥当性，である．したがって，少なくとも，ガリレイ的な「言語」は，脚注 3 で述べたような“ 一般的な言語 ”と解する必要があるだろう．

## 1.5 教育からみた「数学」と「言語」

前節で，習得方法の差異にもとづいて「数学」と「言語」の区分をする立場を紹介した．ここにも,「教育」という言葉の — 特に「学ぶ」という言葉の — 多義性を見ることができる．

今，筆者は,「習得」という言葉を用いた．これは,「言語を“ 習得する (acquire) ”—“ 学ぶ (learn) ”のではなく—」という言い方に倣ったものである．

言語習得理論では，言語の習得方法として,“ 自然習得 (natural acquisition) ”と“ 教室習得 (classroom acquisition) ”を区別することがある．第一言語（母語）の習得方法が典型的な“ 自然習得 ”であり，第二言語については“ 自然習得 ”と“ 教室習得 ” — あくまでその名称を典型とするような種類の方法のことだが — の二種類の習得方法が存在するとされる．

ところで,「学ぶ」という言葉と，この“ 自然習得 ”も含意する「習得」という言葉を同一視して良いのだろうか．筆者の個人的な語感としては,「学ぶ」という言葉には，赤ん坊が言葉を覚えることよりも，もう少し学習者の意志を伴う主体性とでもいうべきものの存在を感じてしまう．

もちろん，それも「学ぶ」という言葉の多義性の顕われであろうが，数学の教育について論じるとき，この多義性を放置したままでは，重大な論点を看過することになる．実際，先述の「言語」と「数学」の区分は,「言語は“ 自然習得 ”が可能だが，数学は“ 教室習得（もちろん本当に教室という意味ではなく）”によってしか習得できない」と言い直すことができるだろう．

はたして「数学」は，習得しようという“ 意図をもった学び ”でしか身につかないのか，それとも，子供が遊びながら言葉を覚えるように習得することが可能なのだろうか[10]．

[10] この問いを,“ 心理的な発達過程と教育内容との関連性 ”と捉えれば，教育心理学

## 2　制度的教育と数学 — 社会的側面を中心に

本章 では，学校教育の教科目としての「数学」を素材に，数学の教育の“ 社会的側面 ”について検討してみたい．

### 2.1　数学の教育と社会

現在の「日本における数学の教育」が様々な問題を抱えていることについては，多くの人が同意するところであろう．そうした問題を解決するために多様なアプローチが試みられているが，その多くは，教材や教授法の改善を目指すものといっても良いのではないだろうか．しかし，日本の数学の教育が抱える諸問題は，教材や教授法，あるいは，教育課程や評価方法の工夫だけで解決できるようなものなのだろうか？

私見であるが，日本の数学教育が抱える困難の底流には，数学を学ぼうとする“ 動機 ”の希薄化という現象が横たわっているように感じている．仮にこの見立てが正しいのであれば,「馬に水を飲ませる」譬えではないが,「数学を学びたい」という意欲の喚起が第一に優先されるべきことになるだろう．

この“ 数学を学ぶ動機 ”については，次の二種を，大きく，区別する必要があると考えている．ひとつは,「子供〔社会の正規構成員の候補者〕が数学を学びたい」という意味での動機であり，他方は,「大人〔社会の正規構成員〕が子供に数学を学ばせたい」という意味での動機である．前者を「個人的動機」，後者を「社会的動機」と呼ぶことにしよう．もちろん，一般に，個人的動機と社会的動機は独立したものではない．個々の学習者が「学びたい」と思う“ 個人的 ”動機の構成要素には,“ 内容に対する興味 ”や“ わかることの喜び ”といった本来の意味での個人的なもの以外に，学習によって得られる“ 効用 ”といったものもあるだろう．後者は，社会的動機と大きな相関をもつことになる．

学校の現場における教育課程や教授法の工夫は，本質的には,「個人的動機」の改善を目標とするものであり，直接的に「社会的動機」に影響を与えることは難しいのではないか．しばしば教育の現場で与えられる「こんなに社会で役に立つ」という動機強化策は，それが，その時代のそ

---

の課題となるだろう．しかし，筆者の考える“ 教育数学 ”では，この問題をそうしたふうに課題化するのではなく,“ 数学と教育 ”といういうきわめて複合的な事象を把握するために設ける種々の観点のひとつとして課題化する．なお,“ 観点を課題化 ”するための方法論として，マックス・ヴェーバー的な“ 理念型 ”を採用している．

の社会における“ 社会的動機 ”と適合的でなければ，十分な効果をもつことは期待できないだろう[11].

「教育」について，個々の人間の内面の変容を引き起こす“ 個的機能 (individual faculty) ”と，共同体の構成員を生産する“ 共有的機能 (communal faculty) ”の二種類の機能を区別することができる．近代以降の学校教育は，本質的には，後者の機能の制度化に他ならない．したがって，少なくとも制度的教育を問題とする限り，上述の“ 社会的動機 ”は，その在り方に重要な影響を与えることになる．

数学の教育について論じる際にも，その基層にある“ 社会的 ”なものへの眼差しを忘れてはならないだろう．

## 2.2 “ 社会的期待 ”と制度的教育

“ 社会的動機 ”が制度的教育に与える影響には，きわめて大きなものがある．例えば,「コミュニケーション能力重視の英語教育」なるものが小学校の教育課程にまで拡げられていく最近の傾向は，1970 年代の数学教育の現代化運動を髣髴とさせるが，こうした潮流の源には，ある種の“ 社会的期待 ”が存在していると見るべきだろう．結局のところ，現実の教育問題への関与は，社会的動機の背後に存在する“ 社会的期待 ”に向き合うことなくして，十分な実効性をもつことはできないのではないだろうか．

もちろん,「学ぶことへの動機」の希薄化，ひいては「学ぶことへの意欲」の低下は，数学に限ったことではないという意見もあるだろう．ここで例に引いた英語教育も，関連する各種産業の振興という“ 社会的効果 ”は確かにあるだろうが，個々の子供の個人的動機に内在化されている程度については定かではない．しかし,「学ぶことへの意欲」の低下が生じる領域が社会的期待の重心移動に伴って変化し得るものとみなせば，少なくとも相対的には,「数学」においてそれを問題視することは十分に意味をもつだろう．

なお，公的な学校教育全般における「学ぶ意欲の低下」が認められるとしても，それが社会全体におけるものを意味しているとは限らない．国民の多数が科学技術立国というイメージを共有し“ 総中流社会 ”とも称された高度成長期の日本社会と，成長の方向性を見失い“ 格差社会 ”と

[11]「世のため人のためになる」という動機よりは,「進学に必要」という動機の方が効果的であるかもしれない．

呼ばれる近年の日本社会とでは，公教育の社会的機能に相違があると見ることは当然であろう．教育について論じる際には，そうした社会構造の変化を射程に入れることが必要となる．

## 2.3 “ 社会的期待 ”の制御

先に述べた「コミュニケーション重視の英語」なるものは，数学教育の現代化における「現代数学」も同様だが，その内実は必ずしも明快なものではない．それにもかかわらず（あるいは，むしろ，それゆえ）“ 言葉（シンボル）のもつイメージ喚起力 ”のために，より広範な社会的影響力を“ 一時的 ”に獲得しているかのように感じられる．そもそも，日本の国家のような，さまざまな部分社会を多層的に含む巨大な規模の社会にあっては，社会の構成員の全体が共有し得る“ イメージ ”が，いわゆる“ 共同幻想 ”以外にあり得るのかという問いすら成り立つかもしれない．

しかし，少なくとも“ 公教育 ”において，そうした“ 雰囲気（ムード） ”に基づいて[12]，税金その他の貴重な社会的資本を費やし，重要な社会的基盤である教育制度を改変してしまうことは，かなりの危険性を孕む行為といえるのではないだろうか．“ 公教育 ”を社会（国家と言った方が良いかもしれない）において正当化された意思決定のシステムの下にある教育制度と解すれば，それは，そうした“ 社会的意思 ”によって制御（コントロール）されたものであるべきだろう．つまり，制度的教育の背景にある“ 社会的期待 ”は，“ 政策[13] ”によって制御されるべきだということになる．

教育のもつこうした意味での社会的側面へのアプローチなしに，今の日本の数学教育の抱える困難の本質的な解決を図ることは可能なのだろうか．これが，筆者の基本的な問題意識である．そして，こうした課題の解決に資することも，“ 教育数学 ”のもつ可能性のひとつであるべきだろうと考えている[14]．

---

[12]もちろん，“ 曖昧な言葉のもつイメージの喚起力 ”だけでなく，非常に現実的な各種の利益集団の関与もあるだろうが．

[13]“ 社会における正当化された意思決定のシステム ”は，狭義には政治的なものであるが，一般には，各種メディアの活動を含むより広範なものであろう．したがって，ここでいう“ 政策 ”も，広義に解すべきものである．

[14]ここで論じた意味での“ 社会的側面 ”にアプローチするといっても，政策決定に直接的な影響を与えるための政治活動を行おうというのでない．政策目的を実現するための選択肢の提示や，選択された内容を表現するための教科目の設計（デザイン）といった面での活動が念頭にある．なお，学問的営みが“ 政策決定 ”といった種類の過程において果たし得る役割については，本稿の付録 B に掲げたマックス・ヴェーバーの見解を参照のこと．

## 2.4　数学と社会との関係性

数学の教育についての議論にもどることにしよう．

一般的な傾向として，数学の教育に関する議論は，学習者〔今教育を受けつつある者〕と教授者〔学習者に教育を施している者〕の立場からなされているものが多いように思われる．しかし，前述の“ 社会的動機 ”や“ 社会的期待 ”についての考察に必要なものは，学習者の視点ではなく，むしろ，“ 既習者〔既に学習を終えた者〕”の視点であろう．

そもそも“ 教育 ”というものがもつ“ 社会的 ”な性格を考慮に入れるなら，数学の教育について論じるとき，個々の学習者の学習の現場だけに焦点を合わるのでは不十分であり，その前提として，数学と社会との関係についての，根本的な検討が必要になる．この課題に答えるための営みが必要であり，その責を負うのが“ 教育数学 ”であるというのが，筆者の考えである．

## 2.5　社会的期待の零点 — 数学不要論

“ 社会的期待 ”と制度的教育の関係性の基本は，前者なくしては後者が存在しえないということであろう．これは，数学に限ったことではない．いずれの学科目であっても，社会的動機が存在しなければ制度的教育の対象となることはなく，あるいは，社会的動機が消滅すればそうした教育の対象ではなくなるというのが自然であろう．

それでは，数学に対する“ 社会的期待 ”について，社会的に制度化された教育の典型である“ 学校教育 ”を取り上げて，もう少し具体的な検討を行ってみたい．つまり「学校で教えられる数学に何が期待されるか」という問いについて考えたいのだが，ここでは，その最も“ 極端な ”解答である,「何も期待しない」，つまり「学校で教える数学は不要である」という論を取り上げてみよう．

こうした論を「無意味」と切り捨ててもしかたがない．先述したように，我々が相手をする必要があるのは，ある種の漠然とした“ 社会的雰囲気 ”ですらあり得るのだから．したがって，また，この種の数学不要論への対抗にしても,「あなたの役には立たないかもしれないが，他の人の役に立っている」といった型の言説では「それなら必要な人だけやれば良い」と反論されるであろうし,「文化としての数学」論も，多様な文化的営み — 茶道でも華道でも良いが — の中からなぜ「数学」がカルチャー

スクールではなく公教育で取り上げられるのかという問いの前には無力であろう.

## 2.6 二種類の数学不要論

日本の現状として，確かに,「学校で教える数学は不要である」という主張が，学校教育の“ 既習者 ”の口から語られることがある．筆者が身近に見聞したこうした主張は，大きく，次の二種類の数学不要論としてまとめることができる.

1. 日常型の「数学」不要論

   「学校で習う数学は，社会へ出てから／日常生活では，必要ない」といった類の言説に代表される主張.“ 小学校の算数で習う一部の内容 ”は，除外されることもある.

2. 専門型の「数学」不要論

   「大学の共通教育で数学者が教える数学は，我々の専門分野では不要である」といった言説に代表される主張.

1 番目は，より広範な“ 学校教育不要論 ”の一変種といっても良いかもしれない．そういう意味では,“ 初等的な数学 ”が除外される分については，まだ微温的な不要論といえるかもしれない.

本研究集会の主題に照らして重要なのは，2 番目の型の「数学不要論」である．これは,「数学自体が不要である」という論ではなく，学校教育で“ 標準的に ”教えられている“ 特定 ”の「数学」が，既習者の社会的期待を満たしていないと主張するものである．言語の比喩で述べれば,「現代の日本で生活するのに，源氏物語を読むための日本語は必要ない」であるとか,「大阪でビジネスをするのに，標準語を勉強しても時間の無駄」といった言説と同種の主張と見なすことができるだろう．ここに,「数学」の多様性と「規格」の問題が含意されていることに留意してもらいたい.

## 2.7 “ 数学不要論 ”出現の歴史的背景

こうした「数学不要論」は，近代西欧的な“ 学校 ”というものの発達と深く関係していることを注意しておこう.

歴史的に見れば,“ 数学 ”的な知識や技法は，土木や建築，作暦，交易等々の職能集団において開発・保持されており，その“ 教育 ”についても，各々の職能集団の内部で，職能に適合した形態で継承されるのが基本的な姿であった．そうした状況下にあっては,「数学」を学ぶことへの疑念は，少なくとも職能を有した構成員として生きていくことが選択されている限り，生じようもなかったであろうことが想像される．もちろん，このことは,「数学」が独立した体系であるという意識の希薄さと表裏一体であったのだろうが[15]．ところが，近代西欧的な“ 学校 ”が，こうした職能集団からの独立性の高い“ 組織体 ”[16]として形成されるにつれ,「専門型の数学不要論」が出現することになる[17].

また,「日常型の数学不要論」の方は，初等的な“（職能と直接的な関係をもたない）普通教育 ”の拡がりを背景としている．前節でも述べたが,この型の主張は，より一般的な「学校教育不要論」において,「数学」が不要な教科目に含まれる特殊な場合と捉えた方が良い．こうした“ 初等普通教育で必要な教科目 ”をめぐる多様な主張については，ヨーロッパより,“ 機会の平等性 ”に対する意識の高い社会であるアメリカの方が参考になる（例えば，文献 [7] を参照のこと）.

## 3　「数学」の多義性を瞥見する — $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\grave{\eta}$ の系譜から

第 2 章では，主として，今の学校教育の枠組みの中で，さまざまな「数学」を考えることの意味合いについて論じてみた．しかし，人類史にお

[15] 何をもって「数学」を独立した体系と見るかについては，多様な立場がありうるだろう．例えば，いわゆる「純粋数学」と呼ばれる学問分野の形成に，近代における中等学校の教員養成を生業とする職能集団（近代西欧的な高等教育機関の源流のひとつ）の成立との相関関係を見る立場があるが，本研究集会の主題の背景として興味深い見方であろう.（文献 [1] を参照されたい.）

[16] ここでいう“ 学校という組織体 ”は，学習者と教授者だけでなく,“ 卒業者 ”も包含するものとして捉えた方が良い．もちろん，教授者の職能集団とは，構成員が包含されてはいるものの，区別すべきものである.

[17] 20 世紀初頭のいわゆる“ 数学教育改造運動 ”に例をとれば，ジョン・ペリーの運動も，フェリックス・クラインの運動も，エンジニア集団の要求する数学の教育と一般的な学校教育との相克に由来するものである．ペリーの運動が「エンジニアのための新しい数学教育」を学校教育全体へ広めようとする方向性をもっていたのに対して，クラインの運動は「従前の学校数学教育」をエンジニア教育への適合性の高いものに再編することを志向するものとして出発した.

ける「数学」という営みの拡がり — 時間的にも空間的にも — に想いを巡らせば,「数学」という言葉の多義性には，はるかに著しいものがある.

我々が過去の歴史における「数学」— 「メソポタミアの数学」,「エジプトの数学」,「中国の数学」,「インドの数学」,「ギリシアの数学」等々 — を論じるとき，そこで論じている古人の営みの何をもって「数学」という名称を冠するのだろうか．もちろん，今の「数学」を過去に投影するというアナクロニズムの禁を犯す愚は避けるべきだろうが，しかし，それなくして，どうすれば「古代の数学」を「数学」と認めることができるのだろう.

実際，ここに見られる「数学の多様性」は,「数学」という言葉の「多義性」というより，どういう「普遍的なもの」を共有することで，それらが「数学」と呼ばれるのかという,「数学の定義の可能性」という問題を生じさせる．つまり,「数学の多様性と普遍性」の問題である.

本章では，この問題の背景についての理解を深めるため,「数学」であることの基準が明確である営みについて，例示してみたい．具体的には,現在の“ mathematics ”という言葉の語源である“ $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\grave{\eta}$ ”から出発し，この言葉（および，その翻訳語）で呼ばれる古人の営みに焦点を当ててみる.

この $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\grave{\eta}$ の系譜は，大雑把に述べれば，古代ギリシアの植民都市に生まれ，ヘレニズム世界で拡がり，イスラム世界に移植され，ラテン世界に伝播し，近代西欧が継承し，現在に至っている（図 1 参照）.

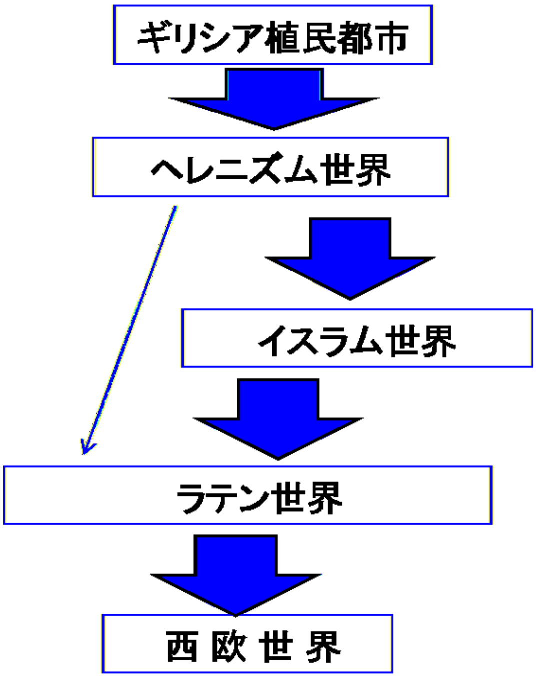


**図１ ：** $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\grave{\eta}$ **の系譜**

本章では，古代ヘレニズム世界において，“ $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\grave{\eta}$ ”（および，そのラテン語（音）訳である“ mathematica ”）が，どのような社会的集団において，どのように保持されていたかを瞥見してたい（[2],[3] 参照）.

## 3.1 数学（マテマティケー）を保持した集団

### 3.1.1 集団の類別

著名な古代史家であるアンリ・イレネ・マルーによれば，ヘレニズム期（政治的には後継であるローマ期を含む）における数学（マテマティケー）と呼ばれる営みを保持していた集団 — 「組織的な教育」を有する共同体 — は，哲学（フィロソフィー）もしくは弁論術（レトリケー）を奉ずる集団に大別されるという（もちろん，両種の集団は，構成員の重複も含め，さまざまに影響を及ぼしあっていたものと思われる）．さらに,「研究」的な側面については，主として各地のムーセイオンを中心とした学者集団が担っていたとされる（[18]）.

本章では，こうした集団について，次のような観点から類別を行う．
まずは，マルーに従い，哲学と弁論術の系統に分ける．次に，哲学の系統を細分するのだが，これには少し説明が必要である．

古代期の数学に関する最大の史料のひとつである『エウクレイデス原論第一巻註解』([20]) において，著者のプロクロスはこう述べている．

> 次いで，何が数学的な類や種に属するのが相応しいのかを確かめなければならない．そのようなものどもが，通例言われる通り抽象（アファイレオー）(ἀφαιρέω) によって … 感覚的事物から生じたということを認めるべきなのであろうか．もしくは，そうしたものどもに，むしろ感覚的事物に先立つ実体の役割を与えるべきなのか．[18]

前者はアリストテレスが代表する立場であり，後者がプラトンのそれである[19]とされる．
つまり，哲学の系統は，数や直線，円といった数学的概念を存在論的にどう位置づけるかによって，2 種に大別されることになる．そして，我々も，哲学をこの種別に従って二分して考察をすることにしたい．

以上より，本章で採用する分類の範疇としては，プラトン的（より詳しくはピュタゴラス＝プラトン主義的）立場の哲学，アリストテレス的立場の哲学，そして，弁論術の三つになる．

### 3.1.2 数学観について

次節より，この三つの立場について，代表的と思われる著述から，それぞれの数学観を窺うことにしたい．ただし，本章では,「数学観」という言葉を，以下のような意味合いで用いている．

数学（マテマティケー）の特徴のひとつは，それが複数の学科の総称であるということである[20]．本章でいう「数学観」とは，数学に関係する複数の学科目から，どのような観点で，どのような学科目を選んで「数学」として規定するかを問うものである．

[18] [20] p.10 .

[19] イアン・ミュラーの用語（[20] p.xxvi）を借用すれば,「分離主義 (abstractionism)」的立場と「投射主義 (projectionism)」的立場と呼んでもよい．

[20] 数学（マテマティケー）を構成する学科目は一定せず，一般には，時代と共に増加する傾向にあった．

## 3.2 ピュタゴラス＝プラトン主義的立場

### 3.2.1 ピュタゴラス派の四学科

古代ギリシアにおいて,「世界は数的秩序によって支配されている」とし，数学(マテマティケー)の重要性を称揚したのは，ピュタゴラスを奉ずる人々であったとされる[21].

ピュタゴラス派は，数学がどのような学科から構成されると考えていたのか．初期のピュタゴラス集団の実態は伝説の霧の中だが，著名なピュタゴラス主義者でプラトンと同時代人であったアルキュタスは，真正と目されるある断片で，次のように述べている．

> （ピュタゴラス派の数学者たちは）我々に，以下のことどもについての知識を手渡してくれた．星々の速さやその昇没について，そして，幾何学(ゲオメトリア)，整数学(アリトメティケー)[22]，球体学(スファイリカ)[23]について，そして，とりわけ，音楽学(ムゥシケー)[24]について．こうした諸学(マテーマタ)は姉妹(アデルフェー)のようなものである．[25]

### 3.2.2 『エピノミス』にみるプラトン学派の数学(マテマティケー)観

アルキュタスたちとの交流を通して，ピュタゴラス学派の数学観に大きな影響を受けたプラトンは,『国家』をはじめ，さまざまな対話編で数学の教育の必要性を謳った.

なかでも，数学の重要性が最も強調されているのは,『エピノミス』である.（この著作には偽作説もあるが，プラトンの死後間もない頃のプラトン主義者たちの見解のひとつであったことに違いはないと思われる.）

プラトンは,『法律』において理想の国が備えるべき法律制度について論じ，国の最高意思機関として「夜明け前の会議」の設置を提案する

[21] 17 ページの引用のように，ピュタゴラス派が数学(マテマティケー)という言葉を使い始めたという伝承がある.

[22] アリトメティケーとは，単位 (モナス) からなる多 (プレトス) としての「数 (アリトモス)」に関する学のこと.「数の学」の意で「数学」ともできないので，整数学と訳すことにした.

[23] 天文現象を説明するための球面幾何ないし天文学 (アストロノミア) のこととされる.

[24]「音楽」と訳されることが多いが，語源であるミューズの神々に関することどもというより，音階や和音等の数的構造に関する学のこと.

[25] [26] p.4 .

(951D[26]).『エピノミス』は，この「夜明け前の会議」の構成員に相応しい賢人を育てるにはどうしたら良いかについて,『法律』の登場人物たちが論じるという体裁をとる．

語り手である「アテナイからの客人」は,「人が知恵を身につけるにはどうすればよいか」を明らかにするため，種々の知識を「一つずつ調べ」ていくことを提案し，結果として，最高の重要性をもつものは「数」に関する知識であると説く（976E）．そして，この「数」の力について，次のように説明する．

> たとえば，音楽の分野では，どんな種類の曲でも，数の関係に合うように配列された楽音と，それに拍子とを，必要としていることは，いうまでもありません．それから，これは特に大事な点なのですが，立派なものはことごとく数の力でできあがるのに，くだらないもののうちには，数の作用が及んでいるものはひとつもないのだという事実，これを誰でも理解しなければなりません (978A)．[27]

こうして,「数」の力が及んでいる様々な現象を真に理解することで，人は,「神聖な法則によって私どもの眼前に整然と組み立てられているあの美しい世界秩序（986C)」を知ることになる．そして，そのために学習が必要なものが，アルキュタスのいう数学の四学科になる．

> （こうした学問を）正しい方法に従って学習していく人の目には，すべての幾何学的図形，すべての数列．すべての音階構造，全天体の回転運動が作る調和関係，これらが一体をなしたものであるのだということが，突如として明確になるはずなのです (991E)．[28]

こうして,『エピノミス』の主張するところでは，数学は，整数学，幾何学，音楽学，球体学の四学から構成されることになる．ただ，この四学は，一なる世界の秩序の現われであるという意味で，ひとつの学である数学の，四つの側面（アルキュタスの言葉では「姉妹 ($\alpha\delta\epsilon\lambda\phi\acute{\eta}$)」）を見ているのだといってもよいだろう．

---

[26]本稿でプラトンの引用に際して併記した番号は，慣例に従い，ステファヌス版全集の頁数を示す．

[27][21]p.18.

[28][21]p.60.

さらに述べれば，こうした世界秩序の現われである「数に関する知識」を人間が手にすることができたのは,「偶然などではなくて，神さまご自身（976E)」が授けてくれたからであるとされる．なお，この「神さま」は,「ウゥラノス」や「コスモス」などと呼ばれる「宇宙そのもの」を意味している．

こうした記述に，東洋的な「命数」との類似を見ることは易しい．

#### 3.2.3 新ピュタゴラス主義者の数学(マテマティケー)観

時代の経過と共に,「ピュタゴラス的四学科」の説明はより巧緻なものになっていく．プロクロスの『エウクレイデス原論第一巻註解』によれば，こうなる．

> ピュタゴラスを奉ずる者どもの考えるところでは，数学的諸学 (μαθηματικὴ έπστήμη) は四つの部分に分けられるべきである．その半ばは数 (ποσόν) に関する側に，残りの半ばは量 (πηλίκον) の側へと仕切られた．そして，その各々が二重になっているとされる．数は，自分自身との関係において，あるいは，他の数との関係において，量は，静止の状態において，もしくは運動の状態において，考察することができる．こうして，整数学(アリトメティケー)は数をそれ自身との関係で，音楽学(ムゥシケー)は他の数との関係で，幾何学(ゲオメトリア)は量を静止の状態において，球体学(スファイリカ)は自身の運動状態において，考究することになる．[29]

ここはプロクロスによったが，ゲラサのニコマコス（100 年頃）の『整数学入門』の冒頭部にもほぼ同様の文章が記されている．また，このニコマコスの著にもとづくボエティウス（480 頃 - 524）の『整数学教程』によって，この定義は後世で著名となる．なお，ひとつの概念として「四つの学科」を表わす「クオドリヴィウム (quadrivium)」という用語の初出は，ボエティウスのこの著作であるとされている[30]．

「一般量」についての学問である「数学」と，連続・離散や静・動といった二項対立的概念による「四つの学科目」への分割というこの主題は，やはり，新プラトン主義派において，世界秩序の生成との相似形を為すものとして解釈される．

[29] [20] pp.29-30 .

[30] [19] p.11.

例えば，プロクロスは，プラトンの『ティマイオス』的な世界創造の過程で，整数学，音楽学が「投射 ($\pi\rho o\beta \acute{\alpha}\lambda\lambda\omega$)」され，幾何学，球体学が「創造 ($\acute{\epsilon}\nu\epsilon\rho\gamma\acute{\alpha}\zeta o\mu\alpha\iota$)」される様を描写している ([22] pp.36-37).（プロクロス自身の数学観については，例えば，[24] を参照のこと.）

## 3.3 アリストテレス的立場

### 3.3.1 アリストテレスの数学観（マテマティケー）

アリストテレスは『自然学』において，次のように述べている.

> 自然的物体がもつ点・線・平面・立体などについては … 数学者は … 自然的物体に属する性格として考察するのではない. 彼はそれらの研究対象を自然的物体から引き離し ($\chi\omega\rho\acute{\iota}\zeta\omega$) て扱うのである，なぜなら，そうした数学的対象は，思考において，自然物の動きから引き離してそれだけ独立に扱いうるものだからであり，また，そのように引き離されても，研究上なんの変わりもないし，まちがいが生じるわけでもないからである (193b). [31]

さらに，アリストテレスは，幾何学と光学等との間に，次のような差異を見出す.

> … 光学・音階論・天文学などがそうであるが，これらの学問は，ある意味で，幾何学のばあいと逆のやりかたをとるといえるからである. すなわち，幾何学はたしかに自然物のもつ線を考察の対象とするけれども，しかしそれを自然的なものとしての資格で取り扱うのではない. これに対して，光学はたしかに数学的な線を対象とするけれども，しかしそれを数学的なものとしての資格で取り扱うのではなく，自然的なものとして考察するのである (194a). [32]

つまり，数学的諸学のなかには，感覚的事物から「抽出」されたものを対象とする分野と，数学的概念の自然学的考察に従う分野があることが表明されたことになる.

[31] [25]p.65.
[32] [25]p.66.

### 3.3.2 中期ストア学派とゲミノスの分類

紀元前130年頃，アテナイのストア学派の学頭を継いだのが，パナティオス（前185頃 – 前109）である．このパナティオスと，その門下であるポセイドニウスの率いた集団は，後世,「中期ストア学派」と称されることになる．

その著作の大半が散逸したこともあり，この二人の人物の事績は，必ずしも明らかではない．ただ，二人の講筵に列したキケロの著書等を通じて，各種の断片が伝わっている．そうした伝承によれば，パナティオスはペルガモンのムーセイオンで研鑽を積み，数学的諸学や地理学・文献学に通じていたという（[27] p.240）．また，ポセイドニウス[33]の方は，アリストテレスやエラトステネスに比肩しうる広大な知の領域に通じた人物であったとされる（[17] p.239）．

この中期ストア学派について，数学の方で重要なのは，ポセイドニウスと，その弟子といわれるゲミノス[34]である.（その数学に関する業績については，[15] の第十五章が詳しい.）

ゲミノスには，当時の数学諸学に関する百科全書的書物を著したという伝承がある（散逸して，現存していない）．そして，この書物にもとづくと思われる，ゲミノスの名を冠した数学諸学の分類が知られている．例えば，プロクロスは，次のように記す．

> ゲミノスのような人々は，数学（マテマティケー）を異なるふうに分けるべきだと考えている．一方は知性のみに関係する領域で，他方は知覚されるものどもに働き触れ合っている領域である．⋯ 知性にかかわる数学には，最高位かつ真正である二つの分枝として，整数学と幾何学がおかれる．他方，感覚的対象に応対する数学は，六つの学科をふくむ．機械学（メカニケー），天文学（アストロギア），光学（オプティケー），測地学（ゲオデシア），音楽学（カノニケー），計算学（ロギスティケー）である．用兵学（タクティケー）を数学の一部であると呼ぶのは適切ではないと考えられている．[35]

---

[33] ポセイドニウスについては [16] を参照のこと．

[34] ゲミノスについては，例えば，[14] を参照のこと．

[35] [20] p.31．なお，伝アナトリウスとして，ヘロンの『定義集』に，同様な数学の分類法が引用されている．内容は，次の通り.「数学の分枝はいくつあるか． 最高位にしてより尊ばれるべき類の分枝が二つある．整数学と幾何学である．そして，感覚的な対象に関する類の分枝が六つある．計算学，測地学，光学，音楽学，機械学，天文学である．いわゆる，用兵に関する学や，通俗音楽（デモーデス・ムシケー），ファセイスに関する学，ホモニモースと呼ばれる機械学は，数学の分枝ではない（[26] p.8 ）.」

## 3.4　クインティリアヌス的立場

弁論術の系統として，古代における弁論術の大成者として著名なマルクス・ファビウス・クインティリアヌス（35 年頃 - 100 年頃）の著作『弁論家の教育（Institutio Oratoria）』（[23]）から，弁論家の養成における数学教育の役割についての見解を抜粋してみる．

### 3.4.1　一般基礎教養の必要性

クインティリアヌスによれば，弁論家の養成において,「弁論術教師に委ねられる前に子供が学ばねばならない」ものは，最初に読み書き，次に文法であるとされる．

そして，その後，学問を十全に仕上げるために学ぶべき「学芸」が，ギリシア人が「一般基礎教養 (encyclion paedian)」と呼ぶものになるのだという．

では，なぜ，そうした学科を学ばなければならないのだろうか．クインティアリヌスは，言う．

> 「どうすれば所与の線分上に二等辺三角形が描けるのかを知っているとして，起訴をおこしたり判決を下したりすることに何のかかわりがあるのか」あるいは,「竪琴の音色を名称と音程によって区別してきた人物のほうが，より巧みに被告を弁護したり政治上の助言をしたりするというのか」という人たちがあるでしょう．法廷において有能であっても，幾何学者［の講義］を聞いたこともなければ，音楽に関してはだれの耳にも快いものとしか理解できない数多くの人を，おそらくこういう人たちは列挙するでしょう．[36]

ここに，第 2.6 節で述べた「日常型の数学不要論」と同工異曲の言説を見るのは易しいだろう．この問いに対し，クインティアリヌスは，次のように答える．

> こうした人たちに対して私がまず第一に答えるのは ··· われわれは，現に弁論家である者ないしかつて弁論家であった者

[36] [23] p.110.

> を教育しているわけではなく，完全にしていかなる点においても非の打ちどころのない弁論家の，いわば肖像を心のなかに思い描いているのです．… 弁論家も賢者であるべきなのであり，幾何学者や音楽家やそのほか私がつけ加える人々は弁論家を作るわけではありませんが，こうした学芸は完璧な弁論家となるのを助けてくれるでしょう．… 他にぬきんでて人間に先見の明を与える弁論が，数多くの学芸を必要とするとしても，いったい驚くべきことなのでしょうか．こうした学芸は，たとえ弁論のなかに現われず，言及されなくとも，秘めたる力を内に宿し，黙っていてさえ［これを身につけているかどうかは］感じ取れるものなのです．[37]

#### 3.4.2　学ぶべき数学とその効用

以上がいわば総論であるとすると，続いて，各種の学芸の具体的な効用が語られる．

まず,「音楽 (musica)」について述べた後,「幾何学 (geometria)」が主題となる．ただし，この「幾何学」は，数に関する学や天文のことも含んでおり,「数学（マテマティケー）」の意に近い．つまり，以下の説明が，我々の求める「弁論術系統における一般基礎教養としての数学」に関する見解となる．

> 幾何学のなかに，幼い子供たちにとって有益なものがあることは，認められています．すなわち，幾何学によって精神が鍛錬され，才能が磨かれ，理解力が速まると考えられているのです．しかしながら，幾何学が役に立つのは，他の学芸のように修得し終えてからではなく，学んでいる過程においてであるとみなされています．これが一般的な意見なのです．[38]

この後，クインティアリヌスは，幾何学を数 (numerus) と図形 (forma) の二つに分ける．そして,「裁判において … みっともない様子で指折り数えたあげくに計算が合わない」発言者は無教養だと判断されるから，数に関する知識は,「弁論家のみならず，少なくとも初等教育を受けた者すべてにとって不可欠」であるとする．また，境界や測量をめぐる起訴があるから,「線の理論 (linearis ratio)」も裁判で必要であると述べている．(つ

[37] [23] pp.110-112.
[38] [23] p.120

まり，ここでいう「数」や「線の理論」は，プラトン＝ピュタゴラス派的な分類でいう「ロギスティケー」,「ゲオデシィー」であることに注意.）

しかし，幾何学には，こうした「実務的な必要性」とは別の重要性があると，クインティアリヌスは主張する．

> 幾何学は弁論術ともっと重要な関係をもっています．まず第一に秩序は幾何学に不可欠です．雄弁にも不可欠ではないでしょうか．また，幾何学は先行するものから後続のことを，確実なことから不確実なことを証明します．弁論においてもわれわれはこれをおこなうのではないでしょうか．ではどうでしょう．幾何学において設問への解答はほとんどすべて推論にもとづくのではないでしょうか．… 扱う事柄に応じて弁論家は，弁論術における推論であるエンテューメーマを用い … 証明の中で最も確実なものは「線による論証」であると，一般に言われています．[39]

幾何学を学ぶことの意義の第一は,「演繹体系の規範」としての役割にあるということであろう．

クインティアリヌスが次に挙げるのは,「幾何学は推論によって，真実に似た誤りを見つけ」出すことができるということである．例として,「二つの図形をそれぞれ取り囲む線の長さが等しいならば，これらの線で囲まれた二つの図形の面積もまた等しいことは，必然ではないのか」という命題を挙げ，船が島の周りを一周する時間で島の大きさを表わせると信じていた歴史家たちが，幾何学者によって非難されたことを採りあげている．

さらに，幾何学は宇宙の仕組みにまで及び「計算によって星の確固として定まった運行を教えてくれるのであり，われわれは無秩序や偶然に属するものは何もないことを幾何学から学ぶ」ことを挙げる．また，このことが弁論家に役に立つ例として，日食によって太陽が陰ったことに怯えるアテナイ人をペリクレスが原因を説明することで恐怖から解放したこと等を挙げている．

そして，最後に，こう説く．

> われわれが目指していることを実現するために，とりわけかかわりをもつのは，他の方法では説明が困難なさまざまな問

[39][23] pp.121-122.

題を，分割法，無限可分性，速度増加といった「線による論証」が常に解決する点なのです．… 弁論家がすべてのことについて語らねばならないのであれば，幾何学をぬきにしては絶対に弁論家とはなりえないのです．[40]

なお,「分割法で (de ratione dividendi)」,「無限可分性で (de sectione in infinitum)」そして「速度増加で (de celeritate augendi)」ということが何を意味しているのか，古来より注釈者が判断に苦しめられてきた部分である．もっとも，著者のクインティアリヌス自身，この著作における数学についての議論を読む限りでは，必ずしも数学に明るいとはいえないようであるから，この三つについても，わからないまま引用しただけの言葉のようにも思える．

## 3.5 プトレマイオスに見る数学(マテマティケー)の射程

古代末期，テーベのヘパイスティオンによって“ 聖なるプトレマイオス ”と称えられたクラウディオス・プトレマイオス（83 年頃 — 168 年頃）は，少なくとも後世への影響という点では，ヘレニズム期最大の“ 数学的諸学の大成者 ”であるといっても良いだろう．

本節では，プトレマイオスにとっての“ 数学(マテマティケー) ”がどのようなものであったかを，今に伝わる著作から探ってみたい．

### 3.5.1 プトレマイオスの著作群

現存するプトレマイオスの著作群は，次の六種に大別される[41]．

1. 天文学に関する著作群 … 主著が“ アルマゲスト ”（[29]）．関連する各種の表や摘要等々からなる．
2. 占星学に関する著作 …“ テトラビブロス ”（[33]）．
3. 地図論を含む地理学 …“ ゲオグラフィア ”（[28]）．
4. 和音を主題とする著作 …“ ハルモニア ”（[31],[35]）．
5. 光学に関する著作 …“ オプティクス ”（[34]，真正さに疑問を呈する説もある）．

[40] [23] p.124.
[41] 以下の１から６に挙げた書名は通称である．[33] と [34] の序論を参照した．

6. 哲学的小品 …『真実の判定基準と精神の統御について』.

#### “ 数学 ”に関する著作

本節の趣旨から特に興味を惹かれるのは, “ アルマゲスト ”と“ テトラビブロス ”である．ここに挙げた書名は後代の通称であるが，現存する写本の表題のうち，プトレマイオス自身が用いた可能性が高い（[33], p.x）ものとして知られるのは，それぞれ, “ マテマティケース・シュンタクセオス（$\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\tilde{\eta}\varsigma$ $\sigma\upsilon\nu\tau\acute{\alpha}\xi\epsilon\omega\varsigma$）”と “ マテマティケース・テトラビブロウ・シュンタクセオス（$\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\tilde{\eta}\varsigma$ $\tau\epsilon\tau\rho\alpha\beta\acute{\iota}\beta\lambda o\upsilon$ $\sigma\upsilon\nu\tau\acute{\alpha}\xi\epsilon\omega\varsigma$）” であるとされている．

つまり，この二冊は，ギリシア語文化圏の伝統における“ 数学＝マテマティケー（$\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\grave{\eta}$）”を表題に冠する著作であるということになる．

この『数学集成』および『四巻の数学集成』と訳すことのできる二つの著作は，それぞれ，天文学と占星学の聖書(バイブル)的なテキストとして，後代に大きな影響を与えた．特に，後者については，通常の科学史や数学史で取り上げられることは少ないように思われるが，表題でもわかる通り，前者と一対の著作と考えるべきものである[42].

我々は，両『数学集成』をあわせたものに，プトレマイオスの“ 数学 ”観を見ることにしたい.

### 3.5.2 『数学集成』の数学観

最初に,『数学集成（アルマゲスト）』を採りあげてみよう．

プトレマイオスの著作の執筆時期は未詳であるが,『数学集成』は，その内容から判断して，西暦 150 年頃の作であろうといわれている（[30], p.vii）．また，他の著作に引用されていることから，初期のものと想定されている．

それでは，これより『数学集成』の序文を読み，プトレマイオスの“ 数学観 ”について概観してみたい.

[42]後者の序を読めば，両著作の位置づけがはっきりする．本稿の 3.5.3 節を参照.

### 序文の冒頭部

『数学集成』の序文は，次のように始まる．

> 真の哲学者たちが哲学（フィロソフィア）の理論的（テオレティケー）な部分を実践的（プラクティケー）な部分と別にしたことは，シュロスよ，私の思うところでは，まったく正しいことでした．（[29], p.4. 英訳 [30],p.35.）

文中の“ シュロス ”は，人名である．当時の著作は，標準的には,「しかるべき人物に献呈する」という様式をもつが，プトレマイオスのこの著作では，それが，シュロスと呼ばれる人物[43]であったということになる．

続いて，プトレマイオスは，実践的な哲学に関しては,「多くの人が，教えを受けることなく，数々の徳行を身に付けることが可能である」が，理論哲学については,「教授されることなしに，理論的な了解に達することは不可能である」と述べる．

さらに，哲学の与える「最も大きな恩恵」について，前者は「実務的な活動」に従事することで得られるのに対し，後者の理論的哲学では「理論（theory）における進展」を通じることによるとされる．

したがって,「我々の行いを高貴で規律ある傾向へと導く」ために妥当であるのは,「我々の時間」の多くを「（理論を教えるための）知的な事柄」，特に,「数多の美しき，殊に数学的と冠されることども」に捧げることであると述べられる．

### 学問の分類

次に，プトレマイオスは，当時の知の標準的な枠組みであったと思われる，アリストテレス的な学問の分類について概説する．

> アリストテレスは，理論的な哲学を，さらに，大変適切なことに，三つの部門に分かちました．自然学へ（テ・フュシコーン），数学へ（ト・マテマティコーン），そして，神学へ（ト・テオロギコーン），です．（[29], p.5. 英訳 [30],p.35.）

次いで,“ 質料（ヒューレー） ”,“ 形相（エイドス） ”,“ 運動（キネセオス） ”という，アリストテレス的哲学の基本概念を用いて，自然学や数学，神学の説明が与えられる．

宇宙の最初の運動の第一原因である，目に見えぬ不変の“ 神性 ”にかかわる部門である“ 神学 ”，白さや熱さ，甘さや柔らかさといった，月下

---

[43] この人物については，未詳．実在性を疑う説もある．

の世界に存在する可壊な物体の性質にかかわる“ 自然学 ”，そして,「形相にかかわる性質と場所から場所への運動を決定し，形状や個数，大きさ，場所や時間等々の探求につとめる部門」としての“ **数学** ”である．

そして，この“ 数学 ”は，他の二つの部門の中間にあたることが，理由とともに説かれる．

### 数学の優位性

以上のような説明を受け，プトレマイオスは，以下のように結論する[44]．

> 理論的哲学の最初の二つの部門 [神学と自然学] は，知識(エピステモニケー)というよりは推察(エイカシア)と称すべきものでしょう．神学は，その完全に不可視で把握不能な性質ゆえに，そして，自然学は，質料の不安定で不確実な性質ゆえに，哲学者たちがこうしたことどもについて合意に達する望みは，この先もありえないのです．そして，数学こそが，その探求に献身する者に対し，厳密に近づいていくならば，確実にして揺るぎない知識を与えることができるのです．というのも，その種の証明(アポデイクシス)[45]とは，議論の余地のない方法，すなわち，数論(アリトメティケー)と幾何学(ゲオメトリア)によって手続きが進められるのですから．([29], p.6. 英訳 [30],p.36.)

### 天文学について

以上の“ 予備的説明 ”を経たプトレマイオスは，この書で,「天と天体にかんする理論(テオリア)」を取りあげることを宣言する．

そして，この理論が，神学や自然学にも役立つことを述べ，さらに，倫理的にも良い影響を及ぼし得ることを説く．

### 著作の構成について

序文の最後は，以下の通り，著作の構成について述べたものである．

[44]アルマゲストの英訳者のトゥーマーも指摘しているが（[30],p.36, 訳注 9），以下の引用から，数学を神学や自然学より“ 上 ”にみるプトレマイオスの見解は，神学を人間の知的活動の最高位におくアリストテレスの見解とは異なっていることが分かる．

[45]アポデイクシスという言葉は『テトラビブロス』の序文にも登場している（2.4.3 節に引用した）．

> 我々は，これまでに発見されたと思しきあらゆることどもを書き留め，出来うる限り簡明に，そして，この分野で歩を進めた先人の跡を辿り得るようなやり方で，ことを行うこととしましょう．こうした扱いを全きものにするため，天体の理論に役立つあらゆることどもを，適切な順序に従って説きます．もっとも，冗長さを避けるため，先人によって十分に固められたものは再説するにとどめておきますが．しかしながら，[先人によって] まったく扱われていない，もしくは，それほど有効ではなかったかもしれないことどもについては，詳細に，力の限りを尽くして，論じることとしましょう．（[29], p.8. 英訳 [30],p.37.）

#### 『数学集成』の序文にみる数学観

ここで，以上の序文に見られるプトレマイオスの“ 数学観 ”の特徴について整理しておくと，次のようにまとめることができるだろう．

1. 数学と神学・自然学とのアリストテレス的な区別の遵守.
2. 数学の神学・自然学への優位性.
3. 方法として の「数論と幾何学に基づく証明（アポデイクシス）」.

なお，この“ 数学観 ”は，後に『四巻の数学集成』の序文で見るように，変化することになる．

### 3.5.3 『四巻の数学集成』の数学観

次に,『四巻の数学集成（テトラビブロス）』の序文を見てみよう．この序文は，先行する『数学集成（アルマゲスト）』と同様，シュロスなる人物に呈する形式で述べられる．

#### 天文を通じた予知

序文は，次のように始まる．

> 天文を通じた予知（プログノースティケー）の手段としては，シュロスよ，二つのものが最も重要であり妥当です．ひとつは，順序においても有効性においても先に来るものですが，太陽や月，星々の動きが，お互い同士の，そして地球との関係において，時々刻々と形成する相（スキーマティスモス）を把握するものであり，二つ目は，こうした諸々の相のもつ性質（フュシケー）に拠って，相の変化がその影響下にある諸々にもたらすことどもについて考察することです．（[33], pp..2–3. ）

### “ アルマゲスト ”について

続いて，プトレマイオスは,「最初の方の予知」に関する自著，つまり，“ アルマゲスト ”について触れる．

> 最初の方は，たとえ二番目のものとの組み合せによる結果が得られないとしても，自身の見通し（テオリア）を持つことが望ましいわけですから，貴殿には，そのための著作（シュンタシス）[46]において，論証（アポデイクシス）の方法[47]を用いて，可能な限り詳しく解説いたしました．（[33], pp..2–3.）

### 新しい“ 方法 ”

プトレマイオスは，この書物では,「論証」とは異なる“ 方法 ”を採用すると述べ，その正当性について説明を加える．

> さて，本書では，二つ目のものの，哲学（フィロソフィア）によって統べられるところの，自己完結的（ホサウトース・アウトテロウス）ではない説明（ロゴス）を与えてみたいと思います．天体の影響下にあるものどもは，その質料としての性質によって脆弱で可変であり，正確な把握が困難であるがゆえに，最初の著作で扱ったような，常に同一の不変な法則に支配されている，確実で無謬の規則を，ここで明らかにすることはできません．そうは云っても，取り囲む天体に起因することが明白に跡付けできる，大多数の一般的な出来事を適切に観察することまで排除するものではないのです．（[33], pp..2–5. なお，[32] の英訳も参照した.）

---

[46]『数学集成（アルマゲスト）』のこと．

[47]『アルマゲスト』の序文中の「数論と幾何学に基づく証明」（p.40）のことと思われる．

#### 数学観の変化

上述の序文から窺うかぎり，プトレマイオスの数学観が,『数学集成（アルマゲスト）』のそれに比べて，変化していることが見て取れる．

特徴的な点として,“ 数学 ”が前著で峻別していた“ 自然学 ”の領域に入り込んでいることと，前著で“ 数学 ”の優位性を担保していた「論証」以外の方法を認めていることが挙げられよう．

この“ 数学観の変化 ”は，偶発的なものではなく，プトレマイオスの思想の発展として捉えるべきではないかと考える．ここで詳細を論じる紙面はないが，次に，ひとつの傍証として,『ハルモニア論』からの引用を取り上げてみたい．

### 3.5.4 『ハルモニア論』からの傍証

プトレマイオスは,「楽音の調和現象と天体の運行における調和との対応（[35], p.357）」を論じた『ハルモニア論』の第三巻において，次のように述べている．

> それぞれの原理には，理論的な原理にも，実践的な原理にも，三つの類がある．すなわち，理論的な原理には自然学的，数学的，神学的な類があり [...] これらは可能的には異なっていないが（これら三つの類の徳は共通であり，相互に依存しあっているのだから），大きさと価値と適用範囲においては異なっている．[...] 数学的の類は，広範囲にわたって自然学的な類と神学的な類の内に含まれ [る．]（[35]， pp.. 270 – 271.）

ここにも,『数学集成（アルマゲスト）』のように，数学・自然学・神学を峻別する態度は見られない．

#### 数学観の変化の原因

プトレマイオスの数学観の変化の原因のひとつとして推定されるのが,“ 数学を適用する領域の性質 ”の変化である．つまり,“ 数論と幾何学に基づく論証 ”の方法が有効であった“ 天文現象 ”では顕在化しなかった,“ 観測と数学的概念の齟齬 ”とでもいうべき問題の存在である．

実際，プトレマイオスは,『ハルモニア論』第一巻第一章の冒頭で，次のように述べている．

> ハルモニア論は，諸々の音の高低の差異を把握する能力である．ハルモニアの判別者は聴覚と理性であるが [...] 近似値を発見し，精確な値を受け容れることが感覚に固有であるのに対して，近似値を受け容れた上で精確な値を発見することが理性に固有であるからである．[...] つまり感覚的な受容能力は，まず第一に，感覚対象について比較的大まかに捉えた差異を基礎に据えるが，それからは理性的な受容能力によって正確で共通な把握へと導かれるのである．（[35]， pp.. 110 – 111.）

なお，“ 音 ”以外の例として，プトレマイオスは，「視覚によってのみ描かれた円はしばしば正確であるように見えるが，それは，理性によって構成された円が本当に正確な円の再認へと導き上げるかぎりにおいてである（[35]，p.111）」とも述べている．

結局のところ，研究の対象が，天文学から，音響論，光学，地図論等々の“ 数学的諸学 ”と総称される領域へと拡がっていくにつれ，“ 論証の方法 ”の不十分さが明らかになり，また，それに応じるように，プトレマイオスの数学観も拡充していったものと想像される[48]．

### 3.5.5 総 括

以上の通り，『数学集成』における「数論と幾何学に基づく論証」という方法に依拠したプトレマイオスの“ 数学観 ”は，『四巻の数学集成』に見られる“ 天体の現象と地上の事象の相関の理法 ”とでも称すべきものへと変化していった．

## 3.6 補足 — アル・ファーラビとヴォルフによる分類

### 3.6.1 アル・ファーラビの分類

イスラム世界で「第二の師」と尊称されるアル・ファーラビ（西暦の 10 世紀頃）による「数学的諸学科の分類」を紹介しておく．

[48]“ ハルモニア ”の問題は，自然の解明を目指す人間にとって，常に，躓きの石であった．ルネ・デカルトの処女作『音楽提要』も，ハルモニアを論じたものであったことが思い出される．

*Ihṣā al-`ulum から*

***数学(`ulūm al-ta`ālīm)の分科***

- 数論 ( `ilm al-`adad )
  - 実用的(al-`amalīyah)
  - 理論的(al-naẓarīyah)
- 幾何(`ilm al-handasah)
  - 実用的／理論的
- 光学(`ilm al-manāẓir)
- 天体論(`ilm al-nujūm)
  - 占星学(`ilm ahkām al-nujūm)
  - 天文学(`ilm al-nujūm al-ta`līmī)
- 音楽(`ilm al-mūsīqā)
  - 実用的／理論的
- 工学(`ilm al-hiyal)

### 3.6.2 クリスティアン・ヴォルフの普遍数学

クリスティアン・ヴォルフの“ Elementa Matheseos Universæ ”(1730–41 年に出版された全 5 巻の版) に登場するのは，数学を構成する 21 の学科目である．その名称のみ挙げておくと，次のようになる．

1. Elementa Arithmetricæ
2. Elementa Geometriæ
3. Elementa Trigonometriæplanæ

4. Elementa Analyseos finitorum
5. Elementa Analyseos infinitorum
6. Elementa Mechanicæ & Staticæ
7. Elementa Hydrostaticæ
8. Elementa Aërometriæ
9. Elementa Hydraulicæ
10. Elementa Opticæ
11. Elementa Perspectivæ
12. Elementa Catoptricæ
13. Elementa Dioptricæ
14. Elementa Sphæricorum & Trigonometriæ Sphæricæ
15. Elementa Astronomiæ
16. Elementa Geographiæ & Hydrographiæ
17. Elementa Chronologiæ
18. Elementa Gnomonicæ
19. Elementa Pyrotechniæ
20. Elementa Architecturæ militaris
21. Elementa Architecturæ civilis

# 4　数学の多様性と普遍性 — 教育数学という試み

## 4.1　「教育」を定義するために

### 4.1.1　教育数学の方法論

### 4.1.2　人間から主体へ

### 4.1.3　内部と外部の媒介機構

### 4.1.4　「教育」を定義する

## 4.2　言語と数学の統合 — 操具へ

## 4.3　普遍性を捉える — 自然数学と共有数学

## 4.4　多様性を捉える — 数学の“ 座標 ”

## 参考文献

[1] 蟹江幸博，佐波学 『エアランゲン就任講演にみるクラインの数学観について – 試論 – 』 三重大学教育学部紀要， 第 60 巻， 教育科学 (2009), 219-236.

[2] 蟹江幸博，佐波学 『教育数学序説 – 古代における教育と数学の類型 – 』 三重大学教育学部紀要， 第 61 巻， 教育科学, (2010), 187 - 218.

[3] 蟹江幸博，佐波学 『教育数学の諸相 (I) — 数学の多様性 — 』 三重大学教育学部紀要， 第 63 巻， 教育科学, (2012), 335 - 352.

[4] Martinet, A. : *Éléments de Linguistique Généle*, Armand Colin, Paris, (1970).
[日本語訳] アンドレ・マルティネ : 『一般言語学要理』（三宅徳嘉 訳), 岩波書店, (1972).

[5] Piaget, J. : *L'épistémologie Génétique*, Presses Universitaires de France, Paris (1970).
[日本語訳] ジャン・ピアジェ 『発生論的認識論』（滝沢武久 訳）白水社, (1972).

[6] Prieto, L, J. : *Pertinence et Pratique*, Minuit (1975).
[日本語訳] L. プリエート : 『実践の記号学』（丸山・加賀野井 訳), 岩波書店, (1984).

[7] Ravitch, D. : *LEFT BACK : A Century of Battles Over School Reform*, Simon & Schuster (2000).
[日本語訳] ダイアン・ラヴィッチ 『学校改革抗争の 100 年 — 20 世紀アメリカ教育史』（末藤・宮本・佐藤 訳）東信堂, (2008).

[8] Saussure,F.:*Cours de linguistique générale*, (edition critique preparee par Mauro,T.D.), Paris : Payot (1972).
[日本語訳] デ・マウロ 『「ソシュール一般言語学講義」校注』（山内貴美夫 訳), 而立書房, (1976).

[9] Thomas, I.(tr.):*Greek Mathematical Works*, Volume I: Loeb Classical Library 335: Harvard University Press, (1991).

[10] マックス・ヴェーバー 『社会科学と社会政策にかかわる認識の「客観性」』（富永祐治 立野保男 訳，折原浩 補訳） 岩波書店 (1998）.

[11] アリストテレス 『形而上学 (上)』（出 隆 訳・岩波文庫） 岩波書店 (1959）.

[12] Dewey, J.:*Democracy and Education*, Dover Publications (2004) ; Republication of "*Democracy and Education: An Introduction to the Philosophy of Education*", originally published by The Macmillan Company(1916).

[13] 『エウクレイデス全集 第 1 巻』 （斎藤憲，三浦伸夫 訳・解説 ）東京大学出版会 (2008).

[14] Evans, J. and Berggren J.L. : *Geminos's Introduction to the Phenomena*, Princeton University Press (2006).

[15] Heath, T. : *A History of Greek Mathematics, Volume II*, Dover Publications,Inc. New York (1981)

[16] Kidd, I.G. (ed) : *Posidonius*, Volume I–III. Cambridge University Press (1972 / 1988 / 1999).

[17] A.A. ロング『ヘレニズム哲学』（金山弥平 訳）京都大学学術出版会 (2003).

[18] H.I. マルー 『古代教育文化史』（横尾荘英・飯尾都人・岩村清太 訳) 岩波書店 (1985).

[19] Masi, M. (ed.) :*Boethius and the Liberal Arts*, Peter Lang Publishers Ltd., Bern (Awitzerland) (1981).

[20] Morrow, G.R. (tr.) : *A Commentary On the First Book of Euclid's Elements (1992 edition)*, Princeton University Press (1992).

[21] 『プラトン全集 14 エピノミス（法律後編）書簡集』（水野有庸・長坂公一 訳） 岩波書店 (1975).

[22] Proclus Diadochus : *In Primum Euclidis Elementorum Librum Commentarii*, ed. Friedlein, G. , Leipzig : Teubner (1873).

[23] クインティリアヌス　『弁論家の教育　１』（森谷宇一他訳）京都大学学術出版会 (2005）.

[24] 佐々木 力 『デカルトの数学思想』 東大出版会 (2003）.

[25] 田村松平 編 『ギリシアの科学』 （世界の名著第 9 巻）中央公論社 (1980）.

[26] Thomas, I.(tr.) : *Greek Mathematical Works*, Volume I: Loeb Classical Library 335: Harvard University Press, 1991.

[27] 内山勝利 責任編集 『哲学の歴史 第 2 巻 帝国と賢者』中央公論新社 (2007).

[28] Berggren, J. L. , Jones, A. : *Ptolemy's Geography, An Annotated Translation of the Theoretical Chapters* , Princeton University Press (2000).

[29] Ptolemaios, C. : *Syntaxis Mathematica*, Opera quad exstant omnia Vol. I. (ed. Heiberg J.L.), 2vols. Leipzig (Teubner), 1898, 1903.

[30] Ptolemaios, C.: *Ptolemy's Almagest* (tr. by Toomer, G.J.), Princeton University Press (1998).

[31] Ptolemaios, C. : *Ptolemy Harmonics* (translation and commentary by Jon Solomon), Brill (2000).

[32] Ptolemaios, C. : *Tetrabiblos* (translated by J. M. Ashmand), Davis and Dickson (1822).

[33] Ptolemaios, C. : *Ptolemy Tetrabiblos* (edited and translated by F. E. Robbins), Loeb Classical Library 435, Harvard University Press (1940).

[34] Smith, A.M. : *Ptolemy's Theory of Visual Perception : An English translation of the Optics With Introduction and Commentary*, Transactions of American Philosophical Society Held at Philadelphia For Promoting Useful Knowledge, Vol. 86, Part 2 (1996).

[35] 山本 建郎 訳　『古代音楽論集（アリストクセノス／プトレマイオス）』 京都大学学術出版会 (2008）.

# 付　　録

## A. 教育数学のクレド

筆者の想定する「教育数学」が満たしているべき信条(クレド)をまとめれば，以下のようになる．

1. 数学の多様性

   共同体 (community) で構成員に共有される「数学」を,“ 共有数学 (communal mathematics) ”と呼ぶ．

   共有数学は，共同体ごとに異なる相貌をもち，それぞれの固有性は「言語」と同種の固有性である．

2. 数学の普遍性

   人間が環境と相互作用の手段としての「数学」を,“ 自然数学 (natural mathematics) ”と呼ぶ．

   自然数学は，人間と人間の相互作用の手段としての「言語」と同種の普遍性をもつ．

3. 教育という観点

   教育 (education) は，一次的には人間と人間の相互作用によって人間の内面に変容が生じることであり，二次的には共同体を構成・維持・変容させる手段のひとつである．

   自然数学と共有数学は,「教育」という観点から数学を見ることで,言語との相関性の下に，その姿を顕わにすることができる．

4. 教育数学の目的

   教育数学は，教育という観点から数学を見ることで自然数学と共有数学の諸相を明らかにし，また，その成果を数学の教育に関連する諸課題の解決に役立てることを目的とする営みである．

## B. 政策決定に資する学問的営みとは

“ 政策決定 ”といった種類の過程において，学問的営みはどのような役割を果たすことができるのだろうか．マックス・ヴェーバーが『社会科学と社会政策にかかわる認識の「客観性」』論文 ([10]) に掲げた見解について，簡単にまとめてみる．

まず，ヴェーバーは,「人間の行為」というもの全般について,「その究極の要素を抽出しようとすると…そうした行為が「目的」と「手段」の範疇(カテゴリー)に結びついていることがわかる」とする．その上で, “ 学問的な考察の対象となり得る ”ものとして,「行為者」が何らかの「手段」を用いてしかるべき「目的」を達成しよう「意欲」している状況を設定する．

なお, “ 政策 ”の枠組での対応物を示すなら,「行為者」というのは政策決定者（政府）であり,「目的」というのは検討の対象としたい政策目的,「手段」は具体的な政策と思ってよいだろう．

ヴェーバーの主張の大筋を述べておく．まず，前提として，目的を所与と仮設する．つまり，目的の設定自体は，学問の役割ではないとする．そして，与えられた「所与」の目的を実現するための「手段」についての技術的評価など，行為者が意思決定をするための補助こそが，学問の役割だとするのである．

より詳しく述べれば，次のようになる ([10],pp..30–35).

(1) 目的への手段の適合性の評価，すなわち，所与の目的について，いかなる手段が適合し，また適合しないかを，その時代的な知識の限界内で，ある妥当性をもって確定すること．

    この目的の達成可能性の見積もりにより，当の目的に，当代の歴史的状況下で，実践上意味があるか，あるいは，無意味かについて，批判 (kritisieren) することが可能となる．

(2) 次いで，所与の目的を達成する可能性がありそうな場合に，そのために必要な手段を現実に適用することに随伴して生じる結果（意図した所期の目的達成の他の副次的諸結果や犠牲）を確定すること．

    そのことで，行為者の行為の意欲した結果と，意欲されなかった随伴結果との相互秤量 (abwägen) を可能とする．この秤量自体に決着をつけることは，もはや学問のよくなしうる任務ではなく，意欲する人間の課題となる．

(3) そして，意欲する人間がこうした決断を下す際に，学問に従事するものが提供しうるものは，意欲されたもの（目的）の意義に関する知識となる．

目的の根底にある，もしくは，ありうる「理念 (Idee)」を開示し，論理的な連関をたどって展開することによって，行為者が意欲し，選択する目的を，その連関と意義に即して，行為者自身に自覚させることが可能となる．

(4) 最後に，価値判断にかんする学問的な取扱いは，さらに進んで，意欲された目的とその根底にある理想を，ただ単に理解させ，追体験させるだけでなく，とりわけ，それらを批判的に「評価する (beurteilen)」ことも教えるものでありたいとする．

ただ，この批判にできることは，意欲されたものが内面的に矛盾を含んでいてはならないという要請に照らして理想を吟味することに限られる．

## C. 藤澤のクライテリア —「数学の規格」の一例

### 数学の論理と教育の論理

最近,「 $6 \div 2(1+2)$ はいくつになるか？ 」という問題が，複数の答をもつということで，巷間の話題を集めている[49]．要は，記法における演算の順序の問題である[50].

記法の問題について，数学的に要求されるのは，演算の順序の一意性が担保できることであろう．しかし,「新たな記法」を学校教育を通じて導入するときには，社会の多数を占める学校教育を終えた構成員をどうするかという，教育的には本質的な問題に逢着する．特に，それが，すでに定着した事柄の変更である場合には，より困難さが増すことになる.

本稿では，この「記法」の問題を題材に，明治期に「日本の算術の規格」を定めることを志した藤澤利喜太郎氏の試みを振りかえることで,「数学における規格」のひとつの側面を瞥見してみたい.

### 『算術條目及教授法』初版

藤澤利喜太郎は，四則の演算記号の使用法について,『算術條目及教授法』（明治28年初版）の第二編第五節で，以下のように述べている（pp.169–170）[51] .

**（1）**「掛け算の符号は（×）のみを用ゐるべし，此れは小数点の確定せるより来る自然の結果なり」とする.

**（2）**「割り算の符号は（÷）を用ゆべし，此の符号は本邦に於て従来既に最も広く行はれ居るものなり」とする.

---

[49] この話題について興味をお持ちの方は，インターネットで 「 $6 \div 2(1+2)$ 」 を検索されたい.

[50] 詳しくは，小学校算数の記法と中学校における積の省略記法の混在に起因している．なお，記法の曖昧さがこの種の混乱が生じさせることは，明治期，すでに，藤澤利喜太郎によって指摘されている（後述）.

[51] 藤澤の著作からの引用にあたっては，旧漢字は現代表記に，片仮名は平仮名に,（外来語等を表す）平仮名は片仮名に，それぞれ改めた.

**（3）**「符号の連続するものは文典に所謂命令法に読む通りに解釈すること定べし」とする．

挙げられている例は,「15+6 ÷ 3 は，拾五に六を加へ，之れを参を以て割れる」と読み（答は 7 になる）,「拾五に，六を参にて割りたる商式を加ふる場合は，必らす 15+(6 ÷ 3) と書くべし」とする．

なお,「此の事に就きて著者は毎度質問を受けたることあり，**何れにても宜しきことなれど，兎に角に確定し置くこと無益にあらざるべし**[52]」と付言している．

## 『算術教科書』第一版

『算術條目及教授法』に則って著された藤澤自身の教科書『算術教科書』（上巻，明治十九年）では，しかし，この問題に関連する項目は，以下のようになっている（第 53 節，p.83）．

加減乗除の符号を以て結び付けられたる式の解釈に関する従来の慣例は次の如し．

（第一） ×，÷ のみを以て結び付けられたる式は順を追つて運算す，例へば 246 ÷ 3 ÷ 2 は 246 を 3 で割りたる商 82 を更に 2 で割るという意にして，又 246 ÷ 3 × 2 は 246 を 3 で割りたる商 82 に 2 を掛けるといふ意なり．

（第二） +, −, ×, ÷ を以て結び付けられたる式を計算するには（第一）に従ひ ×, ÷ によりて示されたる運算を行ひたる後，+, − によりて示されたる運算を行ふ，例へば

$$15 \div 3 + 7 \times 2 - 6 \div 2 \times 3 = 5 + 14 - 9 = 10$$

$\boxed{\text{注意}}$ 上の如き書き方は甚だ紛はしきが故に成るべく之を避くる様にすべし，則上の如き書き方に出遭ふたるときは従来の慣例によりて解釈すべしと雖ども自ら上の如き書き方を用ゆべからず，混雑を生じるの恐れある場合には必ず充分に括弧を用ゐて運算の順序を明示すべし，例へば

[52]以下，引用文の強調は，本稿の筆者による．

$$(15 \div 3) + (7 \times 2) - \{(6 \div 2) \times 3\}.$$

つまり,『算術條目及教授法』の初版で提示された記法とは異なっていることが見て取れる.

### 『算術條目及教授法』第二版

『算術條目及教授法』初版の記述と,『算術教科書』の記述の差異について，藤澤自身の説明を紹介しておこう.

明治 35 年に出版された『算術條目及教授法』第二版の附言において,藤澤は,「符号の連続せるものを解釈するに，本文の如くするものと所謂乗除を前きにし加減を後ちにするものと二通り」あるが,「兎に角に一定し置くこと必要ならん」と考え結果として初版のように定めたのだと述べる.

しかし，本文における該当部分（第二版 p.172）では，本書第一版の公刊後に寄せられた多くの意見から後者の方法が「既に広く世に行はれ居る」ことを知ったこと，および,「元来何れにしても宜しきこと」であるから,「（藤澤著の）算術教科書第五十三節及算術小教科書第四十八節の如くに」定め直した旨の説明が付け加えられている.

## 大数の区切りの桁数

別の例を見てみよう．大数の区切りを「三桁毎に区切るべきか，四桁毎に区切るべきか」という問題についてである.

藤澤は，前者が「欧米各国に通用するの利あり」なのに対し，後者は「本邦呼び声に適応する」ことができるとしながら，次のように結論する.

> 銀行社会を初めとし，最も広く実際に行はるゝは，三桁にして，理窟上最も適当なるは四桁なり，而して此の種類の事柄に就きては，算術教授法は社会の実際を強ゆべからず，社会の実際は当然算術教授法を左右すべく，算術教授法は社会の実際に従順ならざるべからざること，既に述ぶるが如し，著者は，此の教育上の大原則に拠り，断然四桁を捨て，三桁を採ることとせり（『算術條目及教授法』初版，p..165 – 166）.

## 藤澤のクライテリア

先の引用において，藤澤が言及している「既に述ぶる…此の教育上の大原則」とは，次のような主張である．

> 総て何事に限らず，名称符号記法等に，一通り以上ある場合に於て，其の紛らはしきもの，誤りを生し易きものは，是非とも一定せざるべからず，然れとも設へ一通り以上あるも，毫も紛らはしからず，又誤りを生する懸念なきもの，例へば一より小さき数を書くに，小数点の前へに零を書くと書かざるとの如きは，便宜に任かして可なり，必らすしも杓子定規を当て嵌めて無暗に窮屈するには及ばぬことなり，又此の辺の事柄に至りては，非常なる不都合不合理のなき限りは，成るべく実際世に行はるゝ慣例に従ふへし，換言すれば，**算術をして社会の実際を圧制せしむべからず，算術をして社会の実際に服従せしむべし** (pp.. 162 – 163).

これは,“ 算術[53] ”の教育内容を規定するにあたっての，藤澤の基本的な姿勢を提示するものであった．

## 数学の規格と共同体の慣例

“ 算術 ”とは異なるものの，高等教育の対象となる数学についても，通常，その数学を用いる共同体ごとに，共同体での使用によって形成された“ 慣例 ”が存在する．もちろん，先の藤澤のクライテリアのように,「共同体の慣例に数学の規格を従属させるべき」とは，一般的には，主張できないだろう．

結局のところ,「数学の規格」は，数学的論理と共同体の慣例が交錯する場において成立する．そして，数学の生成発展の成果の実効性のある社会的還元のためには，適切な「数学の規格」の設定が，ひときわ重要な役割を果たすことになるだろう．

[53]藤澤のいう“ 算術 ”は，中等教育までを範囲とする“ 算術 ”である．この“ 算術 ”は，戦後の教育課程から消えたため，そのイメージを把握しにくいかもしれないが，藤澤にとっての“ 算術 ”は，普通教育の要の科目であり，社会人としての備えておくべき，基礎的な技能や知識を意味していた．