教 育 数 学 の 諸 相（I）

— 数学の多様性 —

蟹江幸博* 佐波 学†

目 次

序 — 教育数学とは何か

教育との関係で数学について論じるとき，しばしば，数学を言語に喩えることがある．

現代の言語学の祖と呼ばれるフェルディナン・ド・ソシュールは，言語には，個人的と社会的という，対応し合う二重の側面[1]が存在すると述べている．言語の「形態や文法」といったものは社会的側面に関係し，そうしたものの変化は個人的側面に関係するのだという．

教育数学の提唱

数学についても，言語の部分系(サブ・システム)として，あるいは，言語の類推(アナロジー)として[2]，個人的側面と社会的側面を区別することが役に立つ．例えば，いわゆる「数学の研究」と呼ばれるものは，本質的には，数学のこの“ 個人的側面 ”の発現であると考えられる．

それでは，残りの半身である“ 社会的側面 ”についてはどうか．

我々は，この“ 数学の社会的側面 ”と密接に関係するものが，教育であると考える．そして，この想定にもとづき，**「教育数学」**という営みを提唱する．

教育による数学の社会的側面の発現

数学の歴史は，図式的には，「社会的に公有化された“ 数学的な知識や技法 ”が，“ 教育を通じてそうした知識や技法を身に付けた個人や小集団 ”によって変化させられ，その結果が“ 新たな知識や技法 ”として公有化される」という過程の繰り返しと見ることができる．

そして，この「社会的に公有化された数学的な知識や技法」が，「数学の社会的側面」の重要な部分を形成していると思って良いだろう．

こうした歴史の過程に，「教育による数学の社会的側面の発現」の例を求めるなら，“ 個人として数学的な知識や技法を身に付ける ”ことや，“ 社会として新たな知識や技法を公有化する ”ことが考えられる．

前者は，いわゆる「数学教育」であり，“ 意識的な営み ”として，常に数学と共にあった．そして，後者は，我々のいう「教育数学」に包含されるべきもののひとつとなる．

当然ながら，後者の営みは通常の歴史的な過程の一部であり，それ自身を“ 新しい試み ”と主張するものではない．

しかし，後者の営みは，通常，必ずしも“ 意識的 ”に為されるものではなかったし，さらには，こうした“ 社会的な規範の転換 ”が常に成功裏に行われてきたともいえない．

我々が「教育数学」を提唱し，後者の営みをその枠組みの一部として取り入れる目的のひとつとして，

*三重大学教育学部数学

†鳥羽商船高等専門学校

[1] côté individuel と côté sociel. なお，ここでいう“ 言語 ”は，一般的な意味合いのもので，ランガージュ・ラング・パロールといった（ソシュール自身による）区分以前のものである.（[20], p.24 あるいは [21], p.16 を参照.）

[2] 1.1.2 節を参照のこと．

こうした営みを“ 意識化 ”するということが挙げられる．

数学と教育の相互関係

上述の意味における「教育による数学の社会的側面の発現」は,「教育数学」の重要な要素のひとつではあるが，すべてではない．

我々は,“ 数学の社会的側面と教育の関係 ”を,「教育という手段を通じて数学の何某が発現する」といった，一方向的なものとは考えない．

数学と教育の関係は，あくまで，相互依存的なものであると捉えたい．

少なくとも，我々は,「人間の様々な社会的営為とは無関係な，数学と呼ばれる純粋に学問的な体系があり，それは（予定調和的に）種々の局面における人間の活動に役立つ力をもつ．したがって，子どもにその能力を身につけさせることは良いことであり，そのための手段として数学の教育がある」といった立場はとらない．

また，この数学と教育の相互依存関係を通じることで，数学とそれを使用する人間の社会は，互いに影響を及ぼし合うことになる．あるいは，より積極的に，ここに，数学が社会に影響を及ぼしうる可能性を見ることもできるだろう．

教育数学の主題について

以上,「教育数学」についていろいろと述べてきたことを,“ 主題 ”という形でまとめておこう．

主題 A：数学の教育的側面の探求

我々は，教育数学を,「数学の社会的側面」に関係する営みとして提唱した．

この「社会的側面」は,「個人的側面」と共に,“ 言語 ”の比較から導入されたものである．

数学の教育と関係する側面を本源的に捉えるためには，この方法が最も有効であると我々は考えるのだが[3]，もちろんひとつの仮設に過ぎない．

「教育数学」として直接問題になるのは，あくまで，数学のどの側面が教育と関係するかということである．

[3]1.1 節を参照．

したがって，我々は，教育数学の第一の主題を,「数学の教育的側面についての探求」として設定したいと思う．

主題 B：数学と教育の相互関係性の探求

次に興味があるのは，数学の教育的側面が“ どのように ”教育と関係しているかという問題である[4]．

我々は，それが,“ 教育的側面の実現のための道具としての教育 ”(“ 教育の単なる対象としての数学 ”といっても良い）という一方向的な捉え方ではなく，相互依存的なものであろうと述べた．

教育数学の第二の主題は，こうして,「数学と教育の相互関係性の探求」ということになる．

主題 C：数学の教育化

「教育数学」を，我々は，あくまで“ 数学 ”に重心をおいた営みとして考えている．その意味では，主題 A や主題 B は，教育数学にとって，予備的なものと言っても良いかもしれない．

我々としては，教育数学の役割は，何より,「数学の社会的側面を社会的に発現させること」にあるべきだと思う．

先には，これを,「数学の新たな知識や技法を社会的に公有化させる」こととして記述した．このことを，もう少し詳しく見れば，特定の個人なり小集団で得られ用いられている“ 数学 ”を，別個の（通常は，最初の個人や小集団を包含するような）社会集団において，そこで要請される諸観点に応じるように構成し直すことといっても良いだろう．

なお，実際には，このように“ 新しい観点 ”から“ 数学 ”を見直すとき，それまでの“ 数学 ”に不足しているものが明らかになり，その不足を補うことで“ 数学 ”がより豊かになるといったことも珍しくはない．これも，数学と教育の相互作用のひとつと捉えることができるかもしれない．

さて，こうした営みを，教育数学の主題としてどう捉えるべきであろうか．

ここでは，少し一般的なものとして，次のように考えたいと思う．つまり，

- 教育的な観点に応じるように,“ 数学 ”を再構成もしくは新たに構成すること

[4]もちろん，教育の方も，すべての面が関係すると主張するわけではない．数学と関係しうるのは，ある側面ということになるだろう．しかし，教育にとっても，その側面は，本質的な重要性をもつものであると，我々は考えている．

である．

なお，以下では，このことを，標語的に，**「数学の教育化」** と呼ぶことにしたい．

教育数学と職業的数学者

このように主題をまとめてみたが，今度は「教育数学」を職業的数学者の視点から眺め直してみよう．

何らかの観点から数学を再構成もしくは新たに構成することは，公理化や代数化といったものとして，しばしば職業的数学者が経験していることである．

つまり，その観点が教育的であることを別にすれば，教育数学の主題Cとして掲げた「数学の教育化」の“ 実務的 ”な部分は，公理化や代数化と同様，既存の数学の再構成や，観点の取替えによって新たに生じた課題を解決するために新しい数学を構成するといった，ある意味で，数学者としての訓練を受けた者にとっては“ 馴染み ”の作業となるだろう．

したがって，ここで強調しておきたいことは，前提となる“ 教育的な観点 ”の重要性である．

“ 内在化された教育観 ”の超克

“ 教育 ”は著しく社会的なものであって，その社会に生活する者は，自身の生育過程で受けた教育によって，既存の“ 教育観 ”を内在化してしまっている．例えば，本稿の第2章でその一端を示したように，何が“ 数学 ”であるかということすら，大きく社会に（つまりは受けた教育に）依存していることがわかる．

「数学の教育化」の前提となる“ 教育的観点 ”というものは，実際には，様々な観点の複合体として現れてくる．その“ 観点の複合体 ”の構造に対する十分な分析を経ることなく「教育化」を実行すると，しばしば，作業者に内在化された既存の“ 教育観 ”が障害となって，その実を上げることに失敗することになる．

我々の提唱する「教育数学」の“ 教育的な観点 ”は，この各自に内在化されている教育観にもとづくものではなく，それを，いわば，相対化し，意識化し，“ 脱構築化 ”した，さまざまな“ 観点 ”を意味している．

そして，内在化された教育観を超克し，適切な“ 教育的観点 ”を得るために必要なものとして，先にあげた教育数学の主題Aや主題Bが重要な役割を果たすことになる．

教育数学を構築するために

「数学教育」を提唱するにあたっては，それがどのような枠組みで営まれるべきものであるかを，具体化する必要があるだろう．この教育数学の“ 基盤づくり ”の作業を,「教育数学の構築」と呼ぶことにする．

教育数学の構築に必要な素材を収集して,『教育数学の諸相』と題する論文を書き上げたいと思っていたが，そのことを実行するための姿勢をはっきりさせようとし，本稿はその部分だけに終わってしまった．本稿では“ 数学 ”という言葉のもつ多様性を主題としたが，これは，多様な社会における多様な“ 数学観 ”について知ることが,“ 内在化された既存の観点 ”を意識化するための最初の一歩になるであろうという趣旨に他ならない．

本稿の構成

最後に，本稿の構成について，簡単に述べておく．

第1章では,「教育数学の構築」に必要な課題群について，その大略をまとめてみた.「教育数学の構築プログラム」の提示といってもよいかもしれない．

第2章は，第1章で提示した“ 構築プログラム ”遂行の前提として,“ 数学 ”というものの多様なあり方を示す言説を，現代の標準的と思われる数学観（“ 西欧中心主義 ”と呼ぶ人たちもいる）と異なる領域から集めてみた．

なお，話題の選び方は，組織的でもなければ，網羅的でもない．あくまで，予備的調査のために，いくつかの点に探索の針を浅く刺してみたといった体のものである．

1　構築プログラム

本章では，教育数学を構築するために必要と思われる課題について考えてみる．

四種の課題

教育数学の構築に最小限必要な課題群として，次の四種を挙げることができる．

A ：“ 数学の教育的側面 ”の明示化[5]

[5] 他の面との示差的説明といった方が良いかもしれない．

B：“ 数学と教育の相互関係 ”の範例の提示

C：“ 数学の教育化 ”の範例の提示

D：“ 方法論 ”の提示

本稿の“ はじめに ”において，教育数学の主題を三つに整理したが，上述の課題 A から課題 C は，それぞれ，主題 A から 主題 C の三つの主題に対応している．

また，教育数学を学問的営みとして構想する以上は，課題 D も，当然必要とするものである．

こうした課題に応えるための素材について，今後，本稿を第一とする論考において，順次扱っていく予定であるが，この章では，それぞれの課題について，現時点で解答の一端と想定している事項の，“ 素描 ”を与えておきたい．

いわば，“ 教育数学の構築プログラムの提示 ”といった趣旨である．

1.1 課題 A — 数学の教育的側面

“ はじめに ”の冒頭で，“ 言語 ”に倣って，数学の個人的側面と社会的側面を考えると述べた．

この例に限らず，“ 数学の教育的側面 ”を明示化するという課題 A に応えるためには，数学を言語と関係させて理解することが有効であると考える[6]．

もっとも，「数学を言語と関係させる」ことについても，いくつかの側面が考えられる．ここでは，基本的に問題となると思われるものを挙げておこう．

1.1.1 数学と言語の射程の差異

“ 言語 ”という言葉は，通常，言語を用いて獲得された様々な文化的な所産 —“ 法学 ”とか“ 文学 ”といった— を含意しない．

しかし，“ 数学 ”の場合は，知的営為の手段としての部分と，その結果として獲得されたものの双方を含意するものになっている

つまり，“ 数学 ”と“ 言語 ”は，言葉としての射程が異なっていることが指摘できよう．

なお，この観点から，私見を述べれば，“ 数学 ”は，その極めて基礎的な部分を除けば，むしろ“ 法学 ”と対比して把握することが，いろいろな意味合いで，高い有効性をもつと考える[7]．

以下，“ 数学 ”と“ 言語 ”を比較するときは，知的な所産をもたらす手段に対応する“ 基盤的部分 ”との対比を意味するものとしておこう．

1.1.2 言語の部分体系（サブ・システム）か類推（アナロジー）か

数学（の基盤的部分）は，言語とどのように対応するのか．部分体系（サブ・システム）としてなのか，類推（アナロジー）としてであるか，という問題がある．

“ 言語 ”の特徴

数学との対比で重要と思われる，ソシュール的な「言語学の対象となる言語」の特徴として，次の二点が挙げられる．

I. **恣意性**

この“ 恣意性 ”については，「音の列としての単語とその示す内容との間に関連がない」という弱い形のものから，「話者の世界認識（分節化）が獲得言語によって支配される」ことを主張するサピア＝ウォーフの仮説まで，様々な変種がある．

II. **話される言語**

言語学の対象としての言語は，「**エクリチュール**（文字で書かれたもの）ではなく，話される言語」と規定されること．

数学との相違

“ 言語 ”は，上の二つについて，数学との違いが際立っている．

まず，(Ｉ) の恣意性についてであるが，自然数については，(もちろん，数詞は言語ごとに異なるが)，通常，「りんご」と「apple」との違いが含意するよう

[6]我々の考える「教育数学」は，真偽を判断基準としない．教育という極めて輻輳した社会的事象が関係する場合，真偽を価値判断の基準とすると，すぐに自分の位置を見失うことになる．したがって，真偽ではなく，ある種の社会的な有効性を判断基準とすべきだと考える．詳細は，(課題 D の）方法論で扱うべき事項であるが，ここでひとことしておけば，マックス・ヴェーバーの方法論を範型とするようなものを想定している．

[7]特に，人間を取り巻く様々な状況を，新たな概念を創造することで分節化し，そうした諸概念を体系化し，また，そうした体系を利用して，環境への新たな働きかけを発明するといった種類の営みとして，である．

な恣意性は,「いち」と「one」の違いには存在しないと考えられている[8].

次に,（ II ）に関連して述べれば，数学における“ エクリチュール ”は，単に重要というだけでく，より本質的なものである．

つまり，数学は，ソシュールが「言語学の対象としての言語」から排斥（ないし周辺化）した部分に重点があることになる．

数学と言語との関係

以上より，数学と言語との関係については,

1. ソシュールの限定した範囲を超えたものとして“ 言語 ”を捉え直し，その上で,“ 数学 ”を“ 言語 ”の部分体系（サブ・システム）として見る
2. ソシュール的な言語の範囲を守って，数学を言語の類推（アナロジー）と見る

のいずれかの立場を選ぶことになる[9].

1.2 課題 B — 数学と教育の相互関係

“ 数学と教育の相互関係 ”の範例の提示という課題 B に対して，想定される例は，次のようなものである．

1. “ 学校 ”の発生と“ 純粋数学 ”の発生

   古代メソポタミアの官僚養成学校の例.（本稿の第 2 章第 1 節を参照のこと.）

2. “ 専門教師 ”の誕生と“ 論証数学 ”の誕生

   古代ギリシア（特にイオニア地方）の例[10].

3. アバクス学校とアバクス数学

   近世イタリアの商業都市で誕生した形態の教育システムと数学.

なお，上述の諸例は，いずれも，教育システムと数学の双方に相当大きな変革を生じたものであるが,もちろん，より小規模な相互関係の形態をあらわす例も多数考えられる．

1.3 課題 C — 数学の教育化

“ 数学の教育化 ”，つまり,“ 教育的な観点に応じるように，数学を再構成もしくは新たに構成すること ”の範例の提示という，課題 C に移ろう．この課題に対しては，全体的な流れが捉えやすいという意味で，いわゆる「数学教育改造運動」の時期の例を取り上げるのが良いと考えている．

なお，ここで問題としている“ 教育的観点 ”というものは，実際にはかなり複合的なものである．例えば,「数学教育改造運動」の時期について見れば，これが，数学に限定されない，当時の“ 新教育運動 ”という大きな教育上の変革潮流の中で行われたことは確かである．

しかし，個々の具体的な事例をみれば，それぞれが中心的に拠った“ 観点 ”は，新教育運動とは別個のものと考えられる．ただ，これを無関係とすることは，現実を単純化しすぎることになるであろうから,“ 観点の複合 ”として捉えることが適当と考える．

さて，取り上げる具体例としては，以下の人物に関する事例を想定している．

1. フェリックス・クライン

   クラインの数学に対する基本的な観点は,“ 純粋数学と応用数学の再統合 ”とでも呼ぶべきものであった．彼の教育へのかかわりは，この観点に応じるための一連の活動の一部をなすもので,高等教育から中等教育へという方向性をもつものである．

   中等教育における数学の再構成に関する具体的な成果としては,“ 設計図 ”となる教授要目と関連事項の解説（[9],[10]）の提示，そして，それにもとづく（協力者による）各種教科書の作成である．

[8]自然数のもつこの“ 恣意性のなさ ”という性質が,“ 数 ”のもつ二つの相貌の源泉だと思われる．ひとつは，厳密性の観念をひきおこし，そこからは,「学問の規範」といった数学像が帰結する．他方は，人間がつくりだしたものではない天与のものといった観念をもたらし，しばしば神秘的な様相を帯びた，世界の理法といった数学像を生み出すことになる．第 2 章の第 3 節および第 4 節を参照.

[9]その選択は，やはり，真理性ではなく，有効性によって判断されるべきだろう.

[10]ここでいう“ 専門教師 ”とは,（後代のある種戯画化された名称を用いれば）ソフィスト的な存在のことである．また,“ 論証数学 ”とは，エウクレイデスの原論に結実するような，公理的演繹体系としての“ 数学 ”を意味する．この例は,「タレスが活躍した頃のイオニア都市群の，イソノミアと呼ぶべき社会構造が“ 哲学の起源 ”である」とする柄谷行人氏の説（[8]）に準拠するものである.

2. ジョン・ペリー

   ペリーの主たる観点は,“ 工学技術者の基礎教育としての数学 ”である.

   彼の場合も，その成果は，教授要目や解説（[12]）の提示，そして，教科書（[13]）の出版という形態をとることになる.

3. 藤澤利喜太郎

   同時期の日本では，藤澤利喜太郎による中等教育の“ 算術科 ”を中心とした改革があった.

   藤澤の観点は,“ 普通教育としての数学 ”であり，その成果は，やはり解説付きの要目（[2]）と，教科書の出版（[3]）として現れた.

1.4 課題 D — 方 法 論

方法論の提示という課題 D については，ひとことで述べれば，ヴェーバーの理念型を援用する方法ということになる．これについては，参考文献 [7] を参照されたい.

2 “ 数学 ”の多様性

この章では,“ 数学 ”という言葉の多様性について，四つの話題を取り上げて，概観してみたい.

最初の二つは，学校教育を通じて近代西欧に由来する“ 数学（mathematics）”を学んだ二人の著者による，現代西欧以外（地理的もしくは歴史的に）の“ 数学 ”に関する論考である.

また，残りの二つは，伝統的漢字文化圏における“ 数学 ”とヘレニズム期の“ 数学 ”についての，江戸期の日本と，西紀 2 世紀のアレクサンドリアに生活した二人の人物の所説の紹介となる.

2.1 民族数学の試み

最初に取り上げるのは,「民族数学（Ethnomathematics)」である．以下，主唱者であるウビラタン・ダンブロシオ（Ubiratan D'Ambrosio）の論考『民族数学及び数学の歴史と教育におけるその位置[11]』に拠って，彼のいう「民族数学」について概観してみたい.

[11]“ *Ethnomathematics and its Place in the History and Pedagogy of Mathematics* ”, [14] の第 1 章に所載.

2.1.1 文化人類学と数学史の境界

ダンブロシオによれば，文化人類学の発展とともに,「民族天文学（ethnoastronomy）」,「民族植物学（ethnobotany）」や「民族化学（ethnochemistry）」といった，いわば「民族科学（ethnoscience)」として概括される諸分野の研究が盛んになったという.

文化人類学の発展とともに

しかし,「民族数学」については,「おそらくは数学の普遍性（universality）が信じられていたため」，ほとんど研究がなされることはなかったとされる.

一方で，文化人類学者のフィールドワークによる研究結果が積み重ねられていくうち,「計数 (counting) や順序付け（ordering），並び替え（sorting）, 計測（measuring），計量（weighting）といった典型的に数学的な営みが，[我々の] 学校組織で共通に教えられているものとは根本的に異なるやり方でなされている」ことが明らかなってくる.

民族数学へ

その結果として,「文化人類学者と文化や数学の歴史家の間に橋を架ける」という課題は,「異なる思考の様式（modes of thoughts）が異なる数学の形式 (forms of mathematics) をもたらす」ことを認める方向へと重要な一歩を進めることとなる.

ダンブロシオは，こう述べ，そうした数学史と文化人類学の境界上に位置する領域を「**民族数学**」と呼ぶことにしたいと提唱する ([14], p. 14).

2.1.2 学問的数学

次に，ダンブロシオは,「我々の [西欧的な] 学校で教えられている数学」がどのような性質のものであるかを，歴史的な形成過程を通観しながら，略述する.（後述の通り，ダンブロシオは，そうした“ 数学 ”を“ 学問的（アカデミック）数学 ”と呼んでいる.）

西欧数学の形成

まず，ダンブロシオは，プラトンの頃までの「数学」を「学校的 (scholary)」なものと「実用的（practical)」なものに分ける.「学校的数学」はギリシアの教育理念に適合的なものであり,「実用的数学」は主として肉体労働者（manual worker）のためのもので

ある．つまり，社会を二つの階層に分け，指導者層のための数学と，労働者層のものがあったとされる．なお，この「社会階層に応じた学校的と実用的の数学の区分」は，ローマ時代も同様に保たれる．

中世になると,「エウクレイデス原論のアラビア語からの翻訳」にしたがって,「幾何学の分野における実用的数学の学校的数学への接近」がなされる．また，アラビア数字の導入によって，計算や計数についても変化が生じる.「フィボナッチの著作は，おそらく，算術（arithmetic）の実用面と理論面の混合の開始」を告げる最初のものであろうと述べられる．

ルネッサンスの労働構造の変化を経て，産業時代（industrial era）を迎えるにしたがい，実用的数学と学校的数学の接近の度合いが増大していくが，やがて，前者が教育組織にも入り込むようになる．

学問的数学の成立

二十世紀を迎えると，大衆教育（mass education）という考え方が広がり，大衆教育で教える数学とは何かという問題が提起されることになる．そして，その答えは，経済的および社会的構造を保持するための数学であるべきだということになる．この数学は，ダンブロシオによると,「学校的で実用的な（scholarly practical）数学」であるが，以降,「学問的（academic）数学」と呼ぶことにすると述べられる．

2.1.3　民族数学と数学

ダンブロシオは，上述の「西欧的な学校で教えられている学問的数学」に相補的な“ 数学 ”として，以下のように「民族数学」を提唱する．

> 国家 - 部族社会（national-tribal societies），年齢で括られた子供たち（children of a certain age bracket），職業集団（professional classes）等々の，同定可能な文化集団（identifiable cultural groups）内で用いられる数学のことを，**民族数学**と呼びたい．[...] さらには，民族数学の概念に，技術者（engineers）が今実際に用いている数学の大部分も，含めることにしたい．これは，主として解析（calculus）のことであるが，解析の学問的な講義（academic courses）で展開されるような厳密さや形式主義の概念に応じるものではない．([14], pp.. 16 – 17.）

「数学」とは何か

最後に，こうした「民族数学」の導入をはかるにあたり，ダンブロシオは,「数学」とは何かについての，自身の見解を開陳する．

> もちろん，この [民族数学という] 概念は，何が数学であるかについての幅広い解釈（interpretation）を要求する．ここでは，数学に，プラトン的な計算（ciphering），数論（arithmetic），求積（mensuration）や惑星軌道の関係性以外にも，分類の能力（capabilities of classifying），順序付け（ordering），推論（inferring）や模型化（modeling）を含めている．これは，人間活動のかなり広い範囲にわたるが，歴史を経るうちに，先に述べた“ 学問的数学 ”へと，学問的（scholarly）に確立され，形式化され，編み直され，組み入れられることによって，収奪されていった．しかし，文化的に同定された集団（culturally identified groups）においては未だ生き続けており，彼らの活動における日常的なもの（routines in their practices）を構成している．([14], p. 17.）．

ダンブロシオの論法を逆に辿れば，結局のところ,「数学」の射程とは，彼の言葉でいう「学問的数学」に包含され得るものということになるのではないか．そう，数学だから学校数学に含まれるのではなく，学校数学に含まれているから数学である，というように．

敷衍すれば,「数学が何であるかを規定するのは教育である」ということになるのかも知れない．

2.2　古代メソポタミアの数学

本節では，イェンス・ヘイルプ の論考『数学と初期国家形成，すなわち，初期メソポタミア数学のヤヌスの貌：官僚制の手段と書記の職業的自律性の表現[12]』を取り上げ，教育と数学との関係性について，古代メソポタミアを例として考えてみたい．

[12]Jens Høyrup“ Mathematics and Early State Formation, or, The Janus Face of Early Mesopotamian Mathematics : Bureaucratic Tool and Expression of Scribal Professional Autonomy ”. [5] の第 3 章に所載.

2.2.1　メソポタミアにおける“ 数学 ”の創生

ヘイルプは, “ 数学（mathematics）”を「初期官僚主義国家における道具」として創出されたものとみる伝統 — ヘロドトスからウィットフォーゲルまで — があるという．そして，自身の論考において，この考え方を批判的に扱うと述べる．

制度的教育の重要性

メソポタミアで出土した多量の粘土板資料の変遷を追ったヘイルプは，前三千年期の状況について，次のように述べる．

> シュメール都市国家群が二重社会（dual societies） を維持している間，数学は 筆記法や官僚制と同じ側にいた．したがって，三千年期を通じて，数学の発達は，官僚組織の発展や，文字を用いる活動の伸張, そして 筆記法の改良と方向性を同じくするものであった. ([5], p.74.)

しかし，ヘイルプは，数学と官僚制との関係を,「官僚の実務上の道具としての数学」とは捉えない．彼は,

> 数学の出現をウルク期[13]特有の官僚的精神の一変種に帰する限りにおいて，この精神は，教えることの学校組織化（school organization）と密接に相互作用しており，広義にはその結果のひとつであった（[5], p.74）

と主張する．

2.2.2　数学とは何か

それでは，ヘイルプのいう数学とは何であるのか. 彼の説明を聞いてみよう．

> 今日では，もちろん，我々自身の世界におけるこの言葉 [数学] の意味はわかっている— 少なくとも，会計や工学的な計算，魔方陣, 構造主義的文法といった，境界上にある場合はどうかと尋ねられない限りにおいては．そう，境界の内部では，抽象的で多かれ少なかれ一般化された数や図形，その他の抽象的な構造の，首尾一貫した利用法の共有（shared use）や研究を通じて，疑問の余地のない数学的な実践（practices）, 分野（disciplines）そして 技法（techniques）からなる一団のもの（cluster）として，存在しているのだ. ([5], p.67.）.

[13]古代メソポタミアの都市ウルクを中心とする，シュメール人の都市国家群が栄えた期間.

二種類の“ 数学の起源 ”

この“ 一団のもの ”としての数学を構成している個々の要素を，時間をさかのぼって追跡していけば, 非文字的な状況（しばしば非常に進んだ水準ではあるが）にいたることになる．

ヘイルプは，こう述べ，さらに，民族数学や文化人類学的な知見を引用しながら，民族社会のなかには，我々が数学の要素として分類する彼らの文化的要素の集まりを, “ ひとつの塊 ”としての“ 数学 ”と認識することができないものがあることを示す．

その上で，ヘイルプは，次のように説く．

> “ **ひとつ**の塊（かたまり）（entity）”としての数学を探したいのなら，次の二つの選択肢のいずれかを選ぶことになるだろう．ひとつは，ある特定の領域（伝統的には数（number）と計数（counting)）を**彼らの**数学と定義することである．なお，このことは，数学の存在を際限のない過去へと遡らせることを許すことになる．他方は, (私はこうするつもりだが)“ **ひとつ**の塊 ”としての数学の示差的な性質（distinctive characteristic）を，複数個の抽象的実践の**連携**（*coordination* of several abstracting practices） であると定めることである. ([5], p.67.)

もちろん，この定義における「連携」の選び方は，曖昧さを含んだものとならざるを得ない．ヘイルプは，計数（counting）と加法（addition）を例に挙げる．計数と加法を，一つの “ 実践 ”と見るか，二つのものと見るかが問題であると述べ，もし，二つのものと見るなら，計数と加法をまったく無関係のものとすることはできないから，加法を導入することは，すでに数学となっているのだという．

“ 数学 ”への移行

それでは，そうした「連携」は，つまり「数学」は, どのようにして生まれるのだろうか．このことについて，ヘイルプは，以下のように述べている．

数学への移行（transition）の時点 [...] とは，先在し，先には独立していた数学的な諸実践が，最小限で良いので，形式的な諸関係の了解の，少なくとも直観的な把握を通じて，連携を成し遂げたときのことである．([5], p.67.)

2.2.3　純粋数学の誕生

さらに，ヘイルプは，歩を進める．

彼の論考の主題である，メソポタミアの官僚制度と共に誕生した“ 数学 ”とは，単に上述のように規定された“ 数学 ”ではなく，“ 純粋数学（pure mathematics）” であるとするのだ．

“ 純粋数学 ”の規定

ヘイルプによれば，“ 純粋数学 ”とは，

実務（practice）で使用するためではなく，実務で用いる技巧の単純な訓練のためでもない，存在しうる概念や技法の**可能性の探求**のための数学的な営み（[5]，p. 76.）

のことであると規定される．

純粋数学の誕生

以上のように“ 純粋数学 ”を定めた上で，ヘイルプは，この“ 純粋数学 ”が誕生したのは，「文字を用いた文書（literary texts）が現れた」のと同じ頃であり，つまりは，

書記（scribe）という独立した職業集団の出現と同時であって，ファラ期[14]に始まる ([5], p.76.)

のだと述べる．

2.2.4　書 記 — 純粋数学の担い手

では，そうした“ 純粋数学 ”は，誰の手によって生み出され，どのように育まれたのだろうか．

ヘイルプは，この“ 純粋数学 ”の担い手を，“ 書記 ” という職に就く者の専門職共同体への帰属意識を形成するための“ 教育制度 ”に求める．

[14]ファラは，古名をシュルパックという都市．ファラ期は，この都市を繁栄の中心とした時期を指し，前 2500 年頃とされる．

ここで，純粋数学の担い手であるという“ 書記 ”養成の概要を知るため，ヘイルプの説く，その完成形について見てみよう．

古バビロニア期の書記学校

ヘイルプによれば，ファラ期に出現した“ 書記学校 ”は，ウル III 期にさらなる発達を遂げ、古バビロニア期に頂点を極めることになる．

そこでは、当代の共通語のアッカド語とは異なる “ 公用語としてのシュメール語[15] ”の習得からはじまり，数学については“ ２次の方程式 ”に相当する“ 代数的 ”な問題が扱われるなどの，高度な教育課程が整備されていたという。

古代の“ 人文 ”

それでは，こうした学校で養成される“ 書記 ”とは，どのような社会的存在として認識されていたのだろうか．ヘイルプは，以下のように説く．

“ 試験文書 A（Examination Text A）”によれば，完成された書記というものは，両言語に関するあらゆることを知っていなければならないとされた．シュメール語同様，アッカド語についても，その秘めたる書記法，符号の秘めたる意味合いを知っていなければならない．音楽的実践（musical practice）の思想（concepts）に親しくなければならず，工芸や交易で用いられる世俗的な慣用語を理解しなければならない．契約に際しては，数学の出番である [...] こうしたこと全ては，総体として捉えたものとして，次のような名称（もちろんシュメール語である）で呼ばれていた．“ nam-ú-ulù, 人文（ヒューマニティ）[16] ” である．([5], p.65.)

ヘイルプは，この古代の“ 人文主義（humanism）” と近代的な人文主義（Modern humanism） との類似を指摘し，古バビロニア期の書記を，社会における公共（public）の機能を果たしている，王権の下にはあっても個々の自立した（individual, private）人間として描写する．

[15]その頃には，シュメール語はすでに死語になっていた可能性が高いとされている．つまり，中世ヨーロッパにおけるラテン語に対応する役割を担っていたといえよう．

[16]“ 人間 ”とか“ 人類 ”と訳されることもある．

自律した専門職としての誇り

その結果として，書記は，自身の“ 自立 ”した社会的地位を保持するために，自分たちが“ 卓越せし人間（human being par excellence）”であることを保証する必要が生じることになるという.

> 結局のところ，表音式のアッカド語は，およそ 80 個の楔形記号で書き表すことができ，誰でも習うことが可能であっただろう．しかし，誰もが巨匠（virtuosity）の段階に到達することができたわけではない．書記の専門家としての誇り（scribal professional pride）は，その基礎として，何がしか本当に難しいものを必要とした．しかし，彼らが専門家の誇りを保つためには，その困難は**少なくとも形式的には書記としての仕事の範囲に属し**ていなければならなかった．これこそが，あらゆる痕跡から見て，古バビロニア期の書記の“ 人文主義（humanism）”が特有の形状をもつことの，そして，その外観が**技芸のための技芸**（*art pour l'art*）であることの，理由であった.（[5], p.66.）

2.2.5 “ **ヤヌスの貌** ”をもつ数学

つまりは，書記の候補生は，文字であれ，数学であれ，あくまで行政機構において果たす自らの機能に誇りを抱くように，学校で教えを受けていたものと推定される.

このことを，ヘイルプは,「古バビロニア時代の数学の，学校 - 官僚制という複合体への依存と，二重の軛に繋がれるという性格（[5], p.83)」と表現する．そして，これが，論考の表題である“ **ヤヌスの貌** ”の由来となる.

では，この“ ヤヌスの貌 ”は,“ 数学 ”の在り方にどのような影響を及ぼしたのだろうか.

数学への影響

ヘイルプは，残されたバビロニア数学の文書群が，実務的な問題の形式をもちながら，扱われている数値が実際的でないことを指摘する．そして，メソポタミアの数学では「純粋数学が応用数学の形式で表現されている」ことを，上述のメソポタミア数学の二重性をもって説明する.

> しかし，[書記学校で身につけるべき] 巧みの技（virtuosity）とは,“ 職業的 ”な矜持（もちろんこれが書記学校が目的とし得る唯一の矜持であったが）を保つための“ 書記としての ”業前でなければならない．したがって，たとえ複雑な数学の問題であっても，少なくとも外観上は，書記の問題の範疇に属しているべきであった．実質的には“ 純粋 ”であったとしても，書記数学は,“ 応用 ”の形式をとる必要があったのである.
>
> さらには，厳密に述べればだが，書記の仕事のもつ数値的（numerate）な側面は，一般的な意味での“ 数学的（mathematical）”なものではなく,“ 計算的（computational）”なものであった．書記の巨匠（virtuoso）とは,“ 正しい数（correct number）”を求めることにおいての巨匠でなければならなかった.（[5], p.82.）

2.2.6 総 括

結局のところ，古代メソポタミア社会における“ 数学 ”の出現は，いかなる機構に因るのだろうか．ヘイルプは，次のように総括する.

> 複雑な過程を単純な公式にまとめてしまうなら，数学の出現は，技術的な必要性や官僚的な組織によるもの**ではなく**，筆記法**それ自体**によるもの**でもなく**，**こうしたものどもの，互い同士の，そして，官僚組織に新人と技術的な技法を供給する学校組織との間の相互作用を通じて**のみ，呼び起こされた.（[5], p.74.）

我々は，ここに，複合的ではあるが,「数学の教育への依存性」のひとつの例を見ることができるかもしれない.

なお，バビロニアの“ 書記 ”のその後の運命について，ひとこと述べておこう.

ヘイルプによれば，ヒッタイトの侵攻により古バビロニア期が終焉を迎えると，書記学校も姿を消してしまう．書記の職業的な養成は,“ 書記の家系 ”の内部的な訓練に替わり,“ 書記の誇り ”は，古バビロニア期の“ 学校で養成された一箇の自律した職業人 ”としてのものから,“ 古来よりの伝統 ” に基づくものへと，変化することになったという.

2.3 漢字文化圏の伝統における数学

ここまでに取り上げた二つの話題 — 民族数学と古代メソポタミアの数学 — は，あくまで，現代の“ 学校教育 ”を通じて数学を学んだ著者たちの目を通して“ 数学 ”を見たものであった．

以下では，現代的な“ 数学観 ”とは無縁の著述者の,「当事者の言葉」を通じて,“ 数学 ”について考えてみたい．

2.3.1 西村遠里と『数度宵談』

本節で取り上げるのは，西村遠里である．

西村遠里は，享保三年（1718 年）の生まれ．京都で薬舗を営む傍ら，建部賢弘の門流に連なり数学を能くする一方，ほぼ独学で暦学を修める．宝暦二年には，土御門泰邦のもとで改暦作業に参画したといわれている．

以下では，この西村遠里の著『数度宵談』（[11]）から,“ 数学 ”とは何かを中心に，西村の言説を眺めてみたい．

なお，原文の引用に際しては，横書きに直したため，訓点は省略し，訓み下し文を補っている．

2.3.2 問答の開始

『数度宵談』は,「中秋月の明朗たる夜」に，西村自身が二人の友人と問答するという体裁をもつ．

問答は，友人から「足下数学を学ぶ」が「我輩ら数学をしらず，命数をあきらめんこと難し」と云われたことから始まる．

これに対し，西村は,「愚が学ぶ所は小枝算数の数にして卑下の事なり」と返すが，言葉を継いで,「然れども其原々を探れば，これ易学の数にして聖人説く所の数なれば，階梯にあらずとも言難し（[11], p. 259)」と述べ,“ 数学 ”についての友人からの問いに西村が答えるという場面に続いていくことになる．

2.3.3 “ 数 ”の起源

まず,「数の濯觴如何」との問いかけがある．

西村にとって,“ 数学 ”とは,“ 数[17] ”を学ぶことである[18]．そして，この“ 数 ”とは何かということを，その“ 源 ”から説くのが，この問答となる．

[17]補説 2.3.7 を参照のこと．

[18]同様に,“ 算学 ”とは，術として“ 算 ”，つまり算術，を学ぶこととなる．次項 2.3.4 の問答を参照のこと．

西村が与える答えは，次の通りである．

> 数為言（数の言と為る）也源遠し，夫理あれば気あり，気あれば形あり，形あれば数あり，理気形数は離るべからず，老子曰,「無名天地之始，有名万物母,」太極は理の別名にして事理の祖なり，朱子曰,「太極所以指天地万物之根（太極は天地万物の根を以て指す所）也，故太一肇判，陰降陽升，陽一以施，陰両而承，惟皇昊義，仰観俯察，奇偶既陳，両儀伺斯設焉,」然るときはこれ三才[19]の道備りて，後この数を制作したるにはあらざるなり．([11], p. 260.）

2.3.4 数学と算学の差異

次に,「数学と算学... 其異別如何」に対する答えは，次のようになっている．

> 数学は大事なり，算学は小技なり [...] それ数は体にして，算は用なり,「抑数起一成於十（そもそも数は一に起つて十に成る)，天地之数也,」今試に問曰,「天地之惣幾何（天地の惣て幾何ぞ）,」答曰,「総数五十五，術曰，列天地之数加一（天地の数を列べて一を加え)，而以天地之数乗之（而して天地の数を以て之に乗じ)，而折半之（而して之を折半すれば)，得五十五（五十五を得る)，合問也（問に合ふ也）,」惣数を知らんと欲して如右（右の如く)，布算（算を布く）これ算術なり，習之（之を習ふ）これを算学と云，所謂数起一成於十（数は一に起つて十に成る)，その然る所以を学ぶ，これを数学と云，算は芸にして，数は芸にあらず，六芸の尾に居るものは，これ体用を統るの謂なり，蓋し天の能覆ふところ，地の能載るところ，孰れか数にあらずとせんや，三才の道みな数学の外に出ず [...].([11], p. 260.）

2.3.5 “ 和算 ”を論じる

『九章算術』的な“ 算術 ”，あるいは，その後継の一種である，いわゆる“ 和算 ”と称されるものについて，西村は，どのように捉えていたのだろうか．

次のような問いがある．

[19]天・地・人，つまり，万物のこと．

> 算術熟するの名人 [...] は如何なる事を会得するや，天文を測り暦を造り，七曜の運行，日月の食の如き，皆算術を以て考知ること実になることなれども，其算術開平方の上に出でず，田野の検地，税務の法則，又は宮殿を営み，城を築くの類ひ，商工の器財を作り，売買の損益にいたるまで，算術を知らざる人も，其業をつとめて世を渡ること，算術熟する人と異なることなし，然れば算道の大要とする所は，何等のことをいふや，其説を問ん（[11], p.261.）

この問いに対し，西村は，大略，次のような答えを与えている．

小人の算

そもそも，前の部分で述べたように,「数は自然の数にして，三才の道」のいずれもこれから逃れることができないものである．この“ 体である数 ”の「用たる算道」であるからには，お尋ねの通り，大要がないはずがない．

こう述べた西村は，次に,“ 算 ”に別あることを説く.「欽んで命を上帝に受け，百官を率ゐ萬邦に莅み，萬民を撫育して四海を統御する」という“ 天子の算 ”から始まり,“ 諸侯の算 ”,“ 庶人の算 ”,“ 君子の算 ”が，それぞれ説明される．

そして，最後に説かれるのが,“ 小人の算 ”である.「算を以て己を利せんことを欲し」,「空理を設け手段を争ひ，我意を専らにして人を誹り」，算を学ぶ人の「惜むべき日を費やし」,「進むべき人を凴する」ようなものが,“ 小人の算 ”であるとされる．

“ 小人の算 ”を難ずる

「算術を知らなくても，世の業をなすのに困らない．そのような算道の大要とは，何なのか？」これが問題であった．

西村の答えは，ここで問われている“ 算 ”とは，小人の算 ”のことであるというものであった．そして，西村は，次のように答える．

> 足下のあやしむ所こゝにあたれり [...] 近世術を巧にし，書を以て理を争ひ，名人なりとする所のことを視るに，人用ゆるところなき形をゑがき，或は仮に言を以て迂遠の理を設けて難問す，答ふる者も，又数百乗方にのぼるの術をなし，某の答を得るの如き，誉とする所世に益なきの事なり．([11], p.262.）

これを見ると，西村は，いたずらに技巧を誇る“ 算術 ”のありかたには否定的であることがわかる．

適正な算術の範囲

それでは，どのような“ 算術 ”が，適当なものと考えられるのだろうか．

西村は言う.「人事用る所の術」は,「和朝にては，吉田光由が塵劫記，或は宮城外記が和漢算法，唐土にしては，汝思甫が算法統宗，朱世傑が算学啓蒙等」を超えるものは不要であり，その他諸々の「算書」は「算道の大要」を示しているとは思うべきではない，と（[11], p.263）．

さらには,「算学を学ばざる人も皆算をつとめ」ており,「上一人より下庶人に至るまで己々が分限を計り，用を節して其身を脩むる」ことは“ 算 ”に他ならないとする．そして,「世上の算士小人の算を以て大要として，数学の玄々に昏く，体をすてゝ用を専らに」している様に惑わされることのないようにと警告している（[11], pp..263–264）．

2.3.6　総　括

以上の言説から，西村遠里の“ 数学観 ”についてまとめれば，次のように述べて良いだろう．

まず，西村にとって,“ 数（数学）”とは,“ 天地人相関の理法 ”とでも呼ぶべきものであった．そして，体用の枠組みで，体である“ 数 ”の用として“ 算 ”がある．

今の我々にとって馴染みのある“ 算術 ”は，あくまで，この“ 算 ”の一部に過ぎず，また，いたずらに技巧に走るものは，例外的なものと目されていたことになる．

2.3.7　補説 — 古代中国における“ 数学 ”

上に見た西村遠里の所説は,「易学の数」といい，朱子学的な論法といい，中国経由のものであることは明白であろう．それでは，中国の伝統文化において，“ 数学 ”はどのようなものとして扱われてきたのだろうか．

“ 数 ”の類別

中国古代の代表的な“ 数学書 ”の集成である『中国科学技術典籍通彙・数学巻』([4]）に付された序文において，郭書春は，次のように説いている.

まず，郭は，周礼に引かれる六芸の名称を引きながら,「数学は，古代では数と呼ばれ」たり，あるいは,「算数」と称されたと述べる．なお，この“ 数学 ”は,英語の Mathematics に対応するものとされている.

また，前漢以降は,「数術[20]」という名称もおこなわれるようになったとされる.

次に,“ 数 ”を「算術」と「象数」に分けることが,漢代から千年以上にわたって行われていたことが述べられる．この分類は,『漢書・律歴志』の「数者，一,十，百，千，万也，所以算数事物，順正命之理也」に由来するもので,“ 算術 ”は「算数事物，類万物之情」をその働きとし,“ 象数 ”は「順性命之理，通神明」をその効能とする.（なお，南宋の秦九韶の『数書九章』では,“ 数術 ”を，天象歴度等々についての「内算」と,『九章算術』的な「外算」に分類している.）

『七略』における“ 学術 ”の類別

中国では,「ある王朝が興隆すると，書籍探訪の詔(みことのり)が下され，その使者が派遣され... 天下の書物がほぼ集まったところで，役人に命じて書物を校勘させ，目録を編纂する（[25], p.25)」ことが通例となっていた．漢代に編纂された目録『七略』は，その最初のもので，後の中国の学術の分類に大きな影響を与えたものである.

今， 姚振宗によって輯録された『七略佚文』([26]）によって，その分類の概略と,“ 数術 ”の位置づけについて見ておこう.

まず,『七略』は 大きく，輯略・六芸略・諸子略・詩賦略・兵書略・術数略・方技略の七個の大項目に分類される.（ただ，最初の「輯略」は，総論的な位置づけであり，書籍の分類区分の実際は，六通りとなる.）

そして，各略は，それぞれ何種かの小項目に分類される.

具体的には,「六芸略」には易・尚書・詩・礼・楽・春秋・論語・孝経・小学の計九種[21],「諸子略」には儒家・道家・陰陽家・法家・名家・墨家・縦横家・雑家・農家・小説家の計十種[22],「詩賦略」には賦・雑賦・歌詩の計五種[23], 兵書略には，兵権謀・兵形勢・兵陰陽・兵技巧の計四種[24]が含まれる．次の「数術略」については後述するとして，最後の「方技略」は，医経・経形・房中・神仙の計四種[25]である.

『七略』における“ 数術 ”の位置づけ

では，本章の主題である“ 数学 ”に対応する「数術略」は，どのような位置づけになっているのだろうか.

『七略』中の「数術略」は，天文・暦賦・五行・著亀・雑占・形法の五種に分かれている.

それぞれの種について，蔵されている書名を，いくつか挙げてみよう.

まず， ＜天文＞については,『泰壹雑子星』,『漢五星彗客行事占験』等々が記載されている.

後代の『九章算術』的な“ 算術 ”が関係するのは,次の＜暦賦＞である．もっとも，＜暦賦＞に記載されているのは,『黄帝五家暦』,『夏殷周魯暦』等々といった書名が大半で，いわゆる“ 算術書 ”については,『許商』と『杜忠』の二家のみが含まれる.

後，＜五行＞に,『泰一陰陽』,『四時五行経』，＜著亀＞に,『周易』,『大筮衍易』， ＜雑占＞に『黄帝長柳占夢』,『請雨止雨』，そして，＜形法＞には,『山海経』,『宮宅地形』等々で，全六種をあわせると，一百十家，二千五百五十七篇が所載されている.

結局のところ,『九章算術』的な“ 算術書 ”は，この百十家中，二家にすぎないことがわかる.

2.4　プトレマイオスに見る数学の射程

古代末期，テーベのヘパイスティオンによって“ 聖なるプトレマイオス ”と称えられたクラウディオス・プトレマイオスは，少なくとも後世への影響という点では，ヘレニズム期最大の“ 数学的諸学の大成者 ”であるといっても良いだろう.

本節では，プトレマイオスにとっての“ 数学 ”がどのようなものであったかを，今に伝わる著作から探ってみたい.

[20]後代には,「術数」と呼ばれることが多くなる.
[21]一百一十九家，二千九百二十六篇，図一巻を収める.
[22]一百八十七家，四千三百四十六篇を収める.
[23]一百六家，一千三百十三篇を収める.
[24]六十六家，一千五百二十八篇，図四十四巻を収める.
[25]三十六家，八百六十二篇巻を収める.

2.4.1 プトレマイオスの著作群

現存するプトレマイオスの著作群は，次の六種に大別される[26].

1. 天文学に関する著作群 ··· 主著が“ アルマゲスト ”([15])．関連する各種の表や摘要等々からなる．
2. 占星学に関する著作···“ テトラビブロス ”([19])．
3. 地図論を含む地理学···“ ゲオグラフィア ”([1])．
4. 和音を主題とする著作・・・“ ハルモニア ”([17],[24])．
5. 光学に関する著作···“ オプティクス ”([22]，真正さに疑問を呈する説もある)．
6. 哲学的小品 ···『真実の判定基準と精神の統御について』．

“ 数学 ”に関する著作

本節の趣旨から特に興味を惹かれるのは，“ アルマゲスト ”と“ テトラビブロス ”である．ここに挙げた書名は後代の通称であるが，現存する写本の表題のうち，プトレマイオス自身が用いた可能性が高い([19], p.x）ものとして知られるのは，それぞれ，“ マテマティケース・シュンタクセオス（μαθηματικῆς συντάξεως）”と“ マテマティケース・テトラビブロウ・シュンタクセオス（μαθηματικῆς τετραβίβλου συντάξεως）” であるとされている．

つまり，この二冊は，ギリシア語文化圏の伝統における“ 数学＝マテマティケー（μαθηματικὴ）”を表題に冠する著作であるということになる．

この『数学集成』および『四巻の数学集成』と訳すことのできる二つの著作は，それぞれ，天文学と占星学の聖書（バイブル）的なテキストとして，後代に大きな影響を与えた．特に，後者については，通常の科学史や数学史で取り上げられることは少ないように思われるが，表題でもわかる通り，前者と一対の著作と考えるべきものである[27].

我々は，両『数学集成』をあわせたものに，プトレマイオスの“ 数学 ”観を見ることにしたい．

2.4.2 『数学集成』の数学観

最初に,『数学集成（アルマゲスト)』を採りあげてみよう．

プトレマイオスの著作の執筆時期は未詳であるが,『数学集成』は，その内容から判断して，西暦 150 年頃の作であろうといわれている（[16], p.vii)．また，他の著作に引用されていることから，初期のものと想定されている．

それでは，これより『数学集成』の序文を読み，プトレマイオスの“ 数学観 ”について概観してみたい．

序文の冒頭部

『数学集成』の序文は，次のように始まる．

> 真の哲学者たちが 哲 学（フィロソフィア） の理論（テオレティケー）的な部分を実践（プラクティケー）的な部分と別にしたことは，シュロスよ，私の思うところでは，まったく正しいことでした.（[15], p.4. 英訳 [16],p.35.）

文中の“ シュロス ”は，人名である．当時の著作は，標準的には,「しかるべき人物に献呈する」という様式をもつが，プトレマイオスのこの著作では，それが，シュロスと呼ばれる人物[28]であったということになる．

続いて，プトレマイオスは，実践的な哲学に関しては,「多くの人が，教えを受けることなく，数々の徳行を身に付けることが可能である」が，理論哲学については,「教授されることなしに，理論的な了解に達することは不可能である」と述べる．

さらに，哲学の与える「最も大きな恩恵」について，前者は「実務的な活動」に従事することで得られるのに対し，後者の理論的哲学では「理論（theory）における進展」を通じることによるとされる．

したがって,「我々の行いを高貴で規律ある傾向へと導く」ために妥当であるのは,「我々の時間」の多くを「（理論を教えるための）知的な事柄」，特に,「数多の美しき，殊に数学的と冠されることども」に捧げることであると述べられる．

学問の分類

次に，プトレマイオスは，当時の知の標準的な枠組みであったと思われる，アリストテレス的な学問の分類について概説する．

[26] 以下の 1 から 6 に挙げた書名は通称である．[19] と [22] の序論を参照した．

[27] 後者の序を読めば，両著作の位置づけがはっきりする．本稿の 2.4.3 節を参照．

[28] この人物については，未詳．実在性を疑う説もある．

アリストテレスは，理論的な哲学を，さらに，大変適切なことに，三つの部門に分かちました．自然学(テ・フュシコーン)へ，数学(ト・マテマティコーン)へ，そして，神学(ト・テオロギコーン)へ，です．（[15], p.5. 英訳 [16],p.35.）

次いで，“ 質料(ヒューレー) ”，“ 形相(エイドス) ”，“ 運動(キネセオス) ”という，アリストテレス的哲学の基本概念を用いて，自然学や数学，神学の説明が与えられる．

宇宙の最初の運動の第一原因である，目に見えぬ不変の“ 神性 ”にかかわる部門である“ 神学 ”，白さや熱さ，甘さや柔らかさといった，月下の世界に存在する可壊な物体の性質にかかわる“ 自然学 ”，そして，「形相にかかわる性質と場所から場所への運動を決定し，形状や個数，大きさ，場所や時間等々の探求につとめる部門」としての“ **数学** ”である．

そして，この“ 数学 ”は，他の二つの部門の中間にあたることが，理由とともに説かれる．

数学の優位性

以上のような説明を受け，プトレマイオスは，以下のように結論する[29]．

理論的哲学の最初の二つの部門 [神学と自然学] は，知識(エピステモニケー)というよりは推察(エイカシア)と称すべきものでしょう．神学は，その完全に不可視で把握不能な性質ゆえに，そして，自然学は，質料の不安定で不確実な性質ゆえに，哲学者たちがこうしたことどもについて合意に達する望みは，この先もありえないのです．そして，数学こそが，その探求に献身する者に対し，厳密に近づいていくならば，確実にして揺るぎない知識を与えることができるのです．というのも，その種の証明(アポデイクシス)[30]とは，議論の余地のない方法，すなわち，数論(アリトメティケー)と幾何学(ゲオメトリア)によって手続きが進められるのですから．（[15], p.6. 英訳 [16],p.36.）

天文学について

以上の“ 予備的説明 ”を経たプトレマイオスは，この書で，「天と天体にかんする理論(テオリア)」を取りあげることを宣言する．

そして，この理論が，神学や自然学にも役立つことを述べ，さらに，倫理的にも良い影響を及ぼし得ることを説く．

著作の構成について

序文の最後は，以下の通り，著作の構成について述べたものである．

我々は，これまでに発見されたと思しきあらゆることどもを書き留め，出来うる限り簡明に，そして，この分野で歩を進めた先人の跡を辿り得るようなやり方で，ことを行うこととしましょう．こうした扱いを全きものにするため，天体の理論に役立つあらゆることどもを，適切な順序に従って説きます．もっとも，冗長さを避けるため，先人によって十分に固められたものは再説するにとどめておきますが．しかしながら，[先人によって] まったく扱われていない，もしくは，それほど有効ではなかったかもしれないことどもについては，詳細に，力の限りを尽くして，論じることとしましょう．（[15], p.8. 英訳 [16],p.37.）

『数学集成』の序文にみる数学観

ここで，以上の序文に見られるプトレマイオスの“ 数学観 ”の特徴について整理しておくと，次のようにまとめることができるだろう．

1. 数学と神学・自然学とのアリストテレス的な区別の遵守．
2. 数学の神学・自然学への優位性．
3. 方法として の「数論と幾何学に基づく証明(アポデイクシス)」．

なお，この“ 数学観 ”は，後に『四巻の数学集成』の序文で見るように，変化することになる．

[29]アルマゲストの英訳者のトゥーマーも指摘しているが（[16],p.36, 訳注 9），以下の引用から，数学を神学や自然学より“ 上 ”にみるプトレマイオスの見解は，神学を人間の知的活動の最高位におくアリストテレスの見解とは異なっていることが分かる．

[30]アポデイクシスという言葉は『テトラビブロス』の序文にも登場している（2.4.3 節に引用した）．

2.4.3　『四巻の数学集成』の数学観

次に,『四巻の数学集成（テトラビブロス）』の序文を見てみよう．この序文は，先行する『数学集成（アルマゲスト）』と同様，シュロスなる人物に呈する形式で述べられる．

天文を通じた予知

序文は，次のように始まる．

> 天文を通じた予知（プログノースティケー）の手段としては，シュロスよ，二つのものが最も重要であり妥当です．ひとつは，順序においても有効性においても先に来るものですが，太陽や月，星々の動きが，お互い同士の，そして地球との関係において，時々刻々と形成する相（スキーマティスモス）を把握するものであり，二つ目は，こうした諸々の相のもつ性質（フュシケー）に拠って，相の変化がその影響下にある諸々にもたらすことどもについて考察することです.（[19], pp..2–3. ）

“ アルマゲスト ”について

続いて，プトレマイオスは,「最初の方の予知」に関する自著，つまり,“ アルマゲスト ”について触れる．

> 最初の方は，たとえ二番目のものとの組み合せによる結果が得られないとしても，自身の見通し（テオリア）を持つことが望ましいわけですから，貴殿には，そのための著作（シュンタシス）[31]において，論証（アポデイクシス）の方法[32]を用いて，可能な限り詳しく解説いたしました.（[19], pp..2–3.）

新しい“ 方法 ”

プトレマイオスは，この書物では,「論証」とは異なる“ 方法 ”を採用すると述べ，その正当性について説明を加える．

> さて，本書では，二つ目のものの，哲学（フィロソフィア）によって統べられるところの，自己完結的（ホサウトース・アウトテロウス）ではない説明（ロゴス）を与えてみたいと思います．天体の影響下にあるものどもは，その質料としての性質によって脆弱で可変であり，正確な把握が困難であるがゆえに，最初の著作で扱ったような，常に同一の不変な法則に支配されている，確実で無謬の規則を，ここで明らかにすることはできません．そうは云っても，取り囲む天体に起因することが明白に跡付けできる，大多数の一般的な出来事を適切に観察することまで排除するものではないのです.（[19], pp..2–5．なお，[18] の英訳も参照した.）

[31]『数学集成（アルマゲスト）』のこと．
[32]『アルマゲスト』の序文中の「数論と幾何学に基づく証明」（p.15）のことと思われる．

数学観の変化

上述の序文から窺うかぎり，プトレマイオスの数学観が,『数学集成（アルマゲスト）』のそれに比べて，変化していることが見て取れる．

特徴的な点として,“ 数学 ”が前著で峻別していた“ 自然学 ”の領域に入り込んでいることと，前著で“ 数学 ”の優位性を担保していた「論証」以外の方法を認めていることが挙げられよう．

この“ 数学観の変化 ”は，偶発的なものではなく，プトレマイオスの思想の発展として捉えるべきではないかと考える．ここで詳細を論じる紙面はないが，次に，ひとつの傍証として,『ハルモニア論』からの引用を取り上げてみたい．

2.4.4　『ハルモニア論』からの傍証

プトレマイオスは,「楽音の調和現象と天体の運行における調和との対応（[24], p.357）」を論じた『ハルモニア論』の第三巻において，次のように述べている．

> それぞれの原理には，理論的な原理にも，実践的な原理にも，三つの類がある．すなわち，理論的な原理には自然学的，数学的，神学的な類があり [...] これらは可能的には異なっていないが（これら三つの類の徳は共通であり，相互に依存しあっているのだから），大きさと価値と適用範囲においては異なっている．[...] 数学的の類は，広範囲にわたって自然学的な類と神学的な類の内に含まれ [る．]（[24],　pp.. 270 – 271.）

ここにも,『数学集成（アルマゲスト）』のように，数学・自然学・神学を峻別する態度は見られない．

数学観の変化の原因

プトレマイオスの数学観の変化の原因のひとつとして推定されるのが,“ 数学を適用する領域の性質 ”の変化である．つまり,“ 数論と幾何学に基づく論証 ”の方法が有効であった“ 天文現象 ”では顕在化しなかった,“ 観測と数学的概念の齟齬 ”とでもいうべき問題の存在である．

実際，プトレマイオスは,『ハルモニア論』第一巻第一章の冒頭で，次のように述べている．

> ハルモニア論は，諸々の音の高低の差異を把握する能力である．ハルモニアの判別者は聴覚と理性であるが [...] 近似値を発見し，精確な値を受け容れることが感覚に固有であるのに対して，近似値を受け容れた上で精確な値を発見することが理性に固有であるからである．[...] つまり感覚的な受容能力は，まず第一に，感覚対象について比較的大まかに捉えた差異を基礎に据えるが，それからは理性的な受容能力によって正確で共通な把握へと導かれるのである．([24], pp.. 110 – 111.)

なお,“ 音 ”以外の例として，プトレマイオスは,「視覚によってのみ描かれた円はしばしば正確であるように見えるが，それは，理性によって構成された円が本当に正確な円の再認へと導き上げるかぎりにおいてである（[24]，p.111)」とも述べている．

結局のところ，研究の対象が，天文学から，音響論，光学，地図論等々の“ 数学的諸学 ”と総称される領域へと拡がっていくにつれ,“ 論証の方法 ”の不十分さが明らかになり，また，それに応じるように，プトレマイオスの数学観も拡充していったものと想像される[33].

2.4.5 総 括

以上の通り,『数学集成』における「数論と幾何学に基づく論証」という方法に依拠したプトレマイオスの“ 数学観 ”は,『四巻の数学集成』に見られる“ 天体の現象と地上の事象の相関の理法 ”とでも称すべきものへと変化していった．

もちろん，後者の“ 数学観 ”に，第 3 節で扱った東洋的な“ 数学観 ”を重ねて見ることは易しい．

[33]“ ハルモニア ”の問題は，自然の解明を目指す人間にとって，常に，躓きの石であった．ルネ・デカルトの処女作『音楽提要』も，ハルモニアを論じたものであったことが思い出される．

参考文献

[1] Berggren, J. L. , Jones, A. : *Ptolemy's Geography, An Annotated Translation of the Theoretical Chapters* , Princeton University Press (2000).

[2] 藤澤利喜太郎 『算術條目及教授法』 丸善・三省堂 (1895).

[3] 藤澤利喜太郎 『算術教科書』 上・下 大日本図書 (1896).

[4] 郭書春 (主編) 『中国科学技術典籍通彙・数学巻（1 – 5 冊)』河南教育出版社 (1993).

[5] Høyrup, J. : *In Measure, Number, and Weight*, State University of New York Press (1994).

[6] 蟹江幸博，佐波学 『教育数学序説 – 古代における教育と数学の類型 – 』 三重大学教育学部紀要, 第 61 巻， 教育科学, (2010), 187 - 218.

[7] 蟹江幸博，佐波学『教育数学の方法論的基礎（I)』三重大学教育学部紀要， 第 62 巻， 教育科学, (2011), 115 - 134.

[8] 柄谷行人 『哲学の起源』 新潮，第百八巻第七号から第十二号に連載.

[9] Klein, F., Schimmack, R.:*Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. Teil I. Von der Organisation des mathematischen Unterrichts*, Leipzig (1907).

[10] Klein, F. : *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus* (3 Bande), B. G. Teubner, Leipzig 1908, 1909, Springer Berlin 1928.

[11] 西村遠里 『数度宵談』（日本経済大典第十七巻所収）啓明社 (1929). 再版：鳳文書館（1992）.

[12] Perry, J. : *Discussion on the teaching of mathematics*, London : Macmillan (1901).

[13] Perry, J. : *Elementary practical mathematics*, London : Macmillan (1913).

[14] Powell, A. B., Frankenstein, M. (ed.) : *Ethnomathematics — Challenging Eurocentrism in Mathematics Education*, State University of New York Press, (1997).

[15] Ptolemaios, C. : *Syntaxis Mathematica*, Opera quad exstant omnia Vol. I. (ed. Heiberg J.L.), 2vols. Leipzig (Teubner), 1898, 1903.

[16] Ptolemaios, C.: *Ptolemy's Almagest* (tr. by Toomer, G.J.), Princeton University Press (1998).

[17] Ptolemaios, C. : *Ptolemy Harmonics* (translation and commentary by Jon Solomon), Brill (2000).

[18] Ptolemaios, C. : *Tetrabiblos* (translated by J. M. Ashmand), Davis and Dickson (1822).

[19] Ptolemaios, C. : *Ptolemy Tetrabiblos* (edited and translated by F. E. Robbins), Loeb Classical Library 435, Harvard University Press (1940).

[20] Saussure, F. : *Cours de linguistique générale*, (edition critique préparée par Mauro, T. D.), Paris : Payot (1972)

[21] フェルディナン・ド・ソシュール『一般言語学第二回講義』(小松英輔編, 相原奈津江・秋津伶訳・注) エディット・パルク (1997).

[22] Smith, A.M. : *Ptolemy's Theory of Visual Perception : An English translation of the Optics With Introduction and Commentary*, Transactions of American Philosophical Society Held at Philadelphia For Promoting Useful Knowledge, Vol. 86, Part 2 (1996).

[23] Thomas, I.(tr.) : *Greek Mathematical Works*, Volume I: Loeb Classical Library 335: Harvard University Press, 1991.

[24] 山本 建郎 訳 『古代音楽論集(アリストクセノス/プトレマイオス)』 京都大学学術出版会 (2008).

[25] 余嘉錫『古書通例:中国文献学入門』(古勝隆一, 嘉瀬達男, 内山直樹 訳注) 平凡社 (2008).

[26] 姚振宗 輯録, 駿捷 校補『七略別録佚文・七略佚文』 上海古籍出版社 (2008).

Various Aspects of Educational Mathematics (I)

— Diversity of Mathematics —

by Yukihiro KANIE
Manabu SANAMI

三重大学教育学部紀要、第 63 巻、教育科学 (2012)
(2012,Mar 発行), 掲載予定.