数学的知識の欠如に関する自己認識の調査

蟹江　幸博
三重大学教育

1　調査の動機と経緯

小学校教員養成課程での数学の講義（当三重大学教育学部では小専数学と呼んでいる）を担当していると、学生の基礎的な数学的知識が余りにも欠けていたり、不正確なものであることに気付かされる。それを補おうとしても、その知識の欠け方は人によって可成の差があって、補い方に困難をおぼえることになる。しかも個々の学生の中で見ても、欠けている部分にというか欠け方がというか、分野としての整合性がないように見える。つまり、修得されている数学的内容が、それぞれの分野で一貫した統一体として了解されていないということであるらしい。

最初の頃は少しまとまった数学的な話題を話していたが、学生の理解力があまりになさそうに思えたので、少し試してみようと思ったのがこの調査のきっかけになったのである。多くの場合、分かっていないというレベルより、分かっていないことにも気付かないというレベルでは教育の施しようがない。

算数の学習困難な例として良く挙げられるものとして分数の割り算の話があるが、初めこれについて説明できるかどうかを考えさせた。アンケート用紙 (§3) の項目 (1-l) である。案の定、誰も出来ない。説明をしていて、この際、学生の頭の中の掃除をしてみようと思い立った。

取り敢えず、何を理解し、何を理解していないかを知ろうと、１９９３年度前期の小専数学の講義の中で次のようなアンケートをした。

> 小学校以来、算数・数学に関して疑問に思ったこと、思っていること、また家庭教師などで教える際説明できなくて困ったことがあれば、挙げてください。

最初は余り反応がなかったが、具体的に例を挙げて、そのことの数学的内容や背景を説明し、学生が本当には理解していないこと指摘すると、学生も分かっていなかった問題を持っていることに気が付いてくるようだ。

小学校以来習ったはずで、十分理解もしていると自分では思っていることが、本当には何も理解していなかったことに気付いたときの学生の主な反応は、一言で言えば “驚き” である。

アンケートをしては、挙がってきた問題の中から易しそうな問題を学生に考えさせるという方式を採ってみた。出来るだけ学生自ら了解するように仕向けたので、小専数学の学生は、自分の無知に嫌というほど気付かされた。アポロンの神託である。

挙がった項目については、学生自身の勉強不足や知識のなさから来ているとしか言えない部分もあるが、問題本来の困難さから生じているものも多い。アンケート用紙に挙がっている項目以外にも問題となるべきものもあるし、むしろ問題だと意識されていないことの方が問題であるというような問題もある。それは、当然ながら現れてはいない。現れていないことも大事な結果であって、知識の欠如の認識がないことをアプリオリに教えてしまうのがよいかどうかは今後の課題である。

当初は大学教育で補うべき数学的知識のあり方を調べてみるつもりであったが、挙げられた疑問を見ているだけでも非常に興味深いものがある。最初から教師の側から項目を準備したアンケートにしたら、挙げることを考えもしないような問題が挙がってきている。

こんなことすら分かっていないのか、こんなことを分からせることなく初等教育を済ませてきたのか？そしてその彼らがまた初等教育に携わるのか？大学教育でどれだけ補うことが出来るのか？慄然とした思いが立ち上ってきた。

それがアンケートを教育学部以外の学生に対しても拡げる動機でもあった。少しでも広いデータが欲しかったし、何はともあれ大学初年級の学生の能力は初等中等教育の成果なのだから、個々の現場に立ち入って調査する代わりになるのではないかと思ったのである。

工学部の学生に対する微積分の講義でも行い、ある私学の文系、理系の一般数学の講義でも行ってみた。また、数学に興味を持つ高校生向けの数学の講座を夏休みに開いたが、聴講の高校生に対しても行ってみた。アンケートを実施したのは小専数学を除けば、１９９３年７月から９月にかけてである。

感想を要求しなかったアンケートのときでも、少ないが感想を書き記す学生もいて、知ってるつもりと知っていることの違いに気がついたのは嬉しいというものが多かった。その様な感想を持てた学生にとって、このアンケートの教育的意味は大きかったのではないだろうか。

学生の数学的力の "定点観測" の意味でも、この調査を暫く続けてみようと思っている。[2]、[3] でも述べたように、数学者として、算数・数学教育の実体をどう理解し、どう関っていくかということを考え、実行していく一環と考えている。

2 アンケート項目の形成過程

次節に、今の時点でのアンケート用紙を示しておく。最初のアンケートをしたときは最後の項目だけだったわけだが、他の項目は回収したアンケートで採集したものを付け加えていったもの。学生の認識のありかを知るという目的から、項目の重複も許し、出来るだけ原文を尊重している。従ってこのアンケート用紙そのものがアンケートの結果だとも言える。

「知ってはいると思っていても本当には判っていない」と自分で判断することはそれなりに抵抗があるらしい。そこで、「分かってはいるが人に説明することは出来ない」というチェック項目を付けることとした。これによって、解答がしやすくなったようである。本当に判るということは当然人にも説明できるということでなくてはならないが、判り方の程度も調べておきたかった。"理解の度合を自分で評価して記せ" という質問をしても、その度合を自分でどう評価するか難しい問題であり、それよりも実情を反映しているのではないかと思っている。

項目がある程度に増えた後では、新しい項目が付け加わることは極めて少なくなった。数学専攻生用の講義でもアンケートを行ったが、項目が増えたのはこの時までである。たとえ項目に挙がっていない疑問を持っていたとしても、多くの項目をチェックした後では、新しく心の中に潜んでいる疑問を汲み出してくる余裕がなくなるのかも知れない。

アンケートの項目の並べ方であるが、原則的には項目を増やしていくときには最後に付けていった。数、図形、応用、教育などのテーマ別にまとめたときと、私学での調査の前に最後の形にしたときに多少の順序を変えたが、出来るだけ順序の変更もしていない。

一番変わったのは、「1. 数に関するもの」のうちの (j),(k),(l) である。このうち最初に項目に挙がったのは当然ながら、分数の割り算に関する (l) であり、割り算が分からない理由は何かを考えさせているうちに、掛け算 (k) も分かっていなかったことや、約分 (j) すらも分かっていなかった

のではないかということになったのである。従って、間に他の項目が入っていたとはいえ、項目の順序は全く反対であったのである。順序を変えなかったほうが良かったかも知れない。

また、(1-p) と (1-q) はそれぞれ二つの項目に分けるべきだったが、疑問として挙がってきたときに一纏めに挙がってきたのでこの形になっている。今考えれば、このことは疑問を提出した学生にとっては一つのことであっても、他の学生にとっては別のものと意識されるかも知れないので、項目に挙げるときは別々にしたほうがよかった。æ

3　アンケート用紙

所属＿＿＿＿＿番号＿＿＿名前＿＿＿＿＿＿＿＿

皆さんが、小学校以来、算数・数学に関して疑問に思ったこと、思っていること、また家庭教師などで教える際説明できなくて困ったがあるかどうかについてのアンケートです。元々は白紙のアンケートでしたが、アンケートへの答えをその都度まとめて項目にしてあります。出来るだけ原文を尊重した形にしています。他の人が持っている疑問を知ることによって、自分の持っている疑問も素直に表明できるのではということで、項目を作りました。

各項目の前にある □◇ にチェックして下さい。その項目にあることが自分でも分からないと思う場合には □ に、自分では分かるが説明出来ないと思う場合は ◇ にチェックして下さい。説明することも出来ると思ったら何もチェックしなくてよいということです。

また項目に上がっていない疑問があったら、最後の所に書いてください。

1. 数に関するもの

   (a) □◇ $0.1 = \frac{1}{10}$　小数と分数では意味が違うような気がする。どういう意味で等しいのか？

   (b) □◇ 小数を分数にする方法が分からない。どんな小数でも分数になるのか？

   (c) □◇ どんな分数でも小数になるのか？

   (d) □◇ $35 \div 12$ などの割り算を筆算でするとき、小数点以降の意味はどう考えたら良いか分からない。いつまでも続けなければいけないようだが、途中で止めたら元の分数とはどんな関係にあるのか？

   (e) □◇ $1 \times 0 = 0$

   (f) □◇ $1 \div 0 = ?$,　答えがないのか？

   (g) □◇ $5 \div 3 = 1 \cdots 2$,　$6 \div 4 = 1 \cdots 2$ なのに、$5 \div 3 = 6 \div 4$ とならないのは何故か？

   (h) □◇ 割り算の筆算で小数点を除数と被除数で移動しても良いのは何故か？　移動の仕方が混乱する。　例　$10 \div 0.2 = 100 \div 2$

   (i) □◇ 「$3.14 \div 1.5$ を計算して小数第 2 位まで求めたときの余りは？」という問題で筆算をすれば $3.14 \div 1.5 = 31.4 \div 15$ と小数点をずらして計算するが、余りは 0.05 ではなく 0.005 になるのは何故か？

   (j) □◇ $\dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

   (k) □◇ $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{2 \times 4}{3 \times 5}$,　$\dfrac{2}{3} \times 2 = \dfrac{2 \times 2}{3}$

(l) □◇ $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4}$

(m) □◇ 分数の掛け算の意味が分からない。$\frac{1}{2}$ を掛けるのが半分にするというのは分かるが、何故、1 は全部なのか？また $\frac{2}{3}$ を掛けるのをどう説明したら良いのか分からない。

(n) □◇ $(-2) \times (-3) = 6$

(o) □◇ $4 \div (-2) = -2, \ \ (-4) \div (-2) = 2$

(p) □◇ $5^0 = 1, \ 0! = 1$

(q) □◇ $0^0 = ?, \ 0 \div 0 = ?$

(r) □◇ $1 - (-3) = 1 + 3 = 4$

(s) □◇ $5 - (-3) = 5 + 3$ は数直線で習って、まだ分かるのだが、$(-5) \times 3 = -15$, $(-5) \times (-3) = 15$ が分からない。

(t) □◇ $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{1+2}{5}$ 　何故分母はそのままなのか？

(u) □◇ $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$ 　何故通分するのか？$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$ とし、３つに分けた１つと２つに分けた１つを合わせると５つに分けた２つじゃないかという子供にどう説明したら良いのか？

(v) □◇ 和差積商が交じっている式の計算、例えば $3 + 2 \times 6 - 6 \div 3$ で、何故前から順にやってはいけないのか？積や商を優先する理由は？

(w) □◇ $2 \times (5 + 3) = 16$ 　について。$2 \times (5 + 3) = 2 \times 8 = 16$ とするのは判るが、計算は $2 \times (5 + 3) = 2 \times 5 + 2 \times 3 = 10 + 6 = 16$ とするのはなぜか？$2 \times (5 + 3) = 2 \times 5 + 3$ としてはいけないことをどう説明したら良いか。また $2 \times (x + 3)$ の場合には括弧の中を先に計算するわけにはいかないと思う。

(x) □◇ 小数の掛け算や割り算で小数点の位置の決め方が分からない。例えば 3.5×0.07

2. 図形に関するもの

(a) □◇ 円周の長さ ＝ 直径 $\times \pi$ は何故か？

(b) □◇ 円の面積 ＝ 半径 × 半径 $\times \pi$ は何故か？

(c) □◇ 面積や体積の求め方が分からない。例えば長方形の面積を「縦 × 横」と公式として習ったが、何故成り立つのか分からない。

(d) □◇ 三角形の内角の和が 180° になるわけが分からない。本当にそうなるのか？

(e) □◇ 四角形の内角の和が 360° になるわけも同様。

(f) □◇ 三角形の面積の公式「底辺 × 高さ $\times \frac{1}{2}$」でなぜ $\frac{1}{2}$ を掛けるのか？

(g) □◇ 円錐などの体積の公式「底面積 × 高さ $\times \frac{1}{3}$」でなぜ $\frac{1}{3}$ を掛けるのか？円柱の容器と比べて、実際に水を入れたら確かに３倍入るという説明を受けたけれど納得できない。

(h) □◇ 平行四辺形の面積は何故「底辺 × 高さ」であるのか？

(i) □◇ 台形の面積は何故「（上底＋下底）× 高さ $\times \frac{1}{2}$」であるのか？上底と下底を足す理由が分からない。

(j) □◇ 菱形の面積は何故「$a \times b \times \frac{1}{2}$」であるのか？但し、$a, b$ は二つの対角線の長さとする。

(k) □◇ 点は長さが 0 なのか？　そうだとすれば、点が集まった直線は何故 0 でない長さを持つのか？　$0+0+0+0+\cdots$ は 0 ではないのか？

3. 応用に関するもの

(a) □◇ 速さ、距離、時間に関する公式が分からない。「距離＝速さ × 時間」のような３種類の公式は覚えただけで、成り立つ理由が分からない。覚え方だけは習ったけれど。

(b) □◇ 時間の前後と、時刻の数値の大小との関係？例えば、３時の２０分前はなぜ２時４０分で、３時２０分ではないのか？

4. 算数・数学の教え方に関するもの

(a) □◇ 小学校２年の教科書では正方形は長方形と異なり、小学校５年の教科書では正方形は長方形の１種であると書いてある。小学校２年生の子で正方形も長方形だと認識している子供にどう対処したら良いのだろうか？

(b) □◇ $2 \times x \times 3$ を $2x3$ と書いたらいけないのか、いけないとしたら何故いけないのかと、中学校の教育実習で生徒に聞かれて困った。

(c) □◇ 点とは何か分からない？少しくらい大きさが違っても点だと思うけど、どれくらいの大きさになったら点と言えなくなるのか？

5. 上記以外に疑問に思っているものがあれば、下に書いてください。

æ

4　アンケートの集計

アンケートの項目がだんだん増えていったため、アンケートをとった時期によって、項目間で母集団数が異なることがある。その数を挙げておこう。

	小専数学	数学専攻	工学部	私大文	私大理	高校生	総計
母集団数	17,16,8	27,13,7	69	25	107	14	230 ～ 259

ここで、小専数学は数学専攻生以外の小学校教師養成のための数学科目で採ったものである。母集団数が 16 になっているのは、数についての (c), (g), (i), (m), (q), (t), 図形についての (f), (h), (j), 応用についての (b), (c) であり、８になっているのは算数・数学の教え方に関するものの (a), (b) であり、その他の項目の母集団数は 17 である。数学専攻とあるのは数学専攻生で、数学の講義の合間とか廊下で会った学生に頼んだりしたものである。母集団数で 13 となっているのは、数についての (c), (m), (p), (q), 応用についての (b), (c) であり、7 になっているのは算数・数学の教え方に関するものの (a), (b) であり、その他の項目の母集団数は 27 である。工学部とあるのは、化学系の工学部のクラスの１年生の微積分の講義で採ったものである。私大文とあるのは、ある私立大学の経営情報学科の一般数学の講義で採ったものであり、私大理とあるのは、同

じ私立大学の工学部のすべての学科の学生が取ることの出来る一般数学の講義で採ったものである。また高校生とあるのは、三重県の高校数学研究会主催の数学についての夏の学校に来た高校生（１、２年生のみ）に対して行ったものである。

以下がアンケートを集計したものであるが、各項目の母集団数に対する比を%で表わしたものである。有効数字は3桁にしてある。総計の欄は、母集団の総数で各項の解答数の和を割って、得たものである。

集計・整理しようということになるとある程度はまとめないと分かりにくいと思われるので、テーマを細分してまとめ直して集計してある。そして、各細分されたテーマ毎には平均を取ることにした。3. と 4. については、内容にあまり関連性がないので、平均を取っていない。

1. 数に関するもの

1-1. 自然数に関するもの

		小専数学	数学専攻	工学部	私大文	私大理	高校生	総計
e)	□	0.0	3.7	11.6	8.0	3.7	28.6	7.3
	◇	41.2	29.6	17.4	10.0	27.1	14.3	24.3
f)	□	41.2	14.8	34.8	28.0	17.8	42.9	25.9
	◇	41.2	44.4	37.7	56.0	33.6	7.1	37.1
g)	□	43.8	7.4	24.6	20.0	15.0	42.9	20.5
	◇	43.8	29.6	30.4	32.0	30.8	21.4	31.0
p)	□	41.2	23.1	36.2	36.0	38.3	85.7	39.6
	◇	47.1	69.2	40.6	44.0	51.4	0.0	45.3
q)	□	75.0	23.1	55.1	64.0	57.0	85.7	58.2
	◇	18.8	46.2	29.0	24.0	30.8	0.0	27.9
平均	□	37.6	12.4	28.2	27.4	24.2	49.0	26.9
	◇	37.1	45.6	34.0	33.4	33.0	12.2	33.6

1-2. 負の数に関するもの

		小専数学	数学専攻	工学部	私大文	私大理	高校生	総計
n)	□	41.2	3.7	14.5	16.0	7.5	35.7	13.5
	◇	52.9	48.1	44.9	56.0	40.2	21.4	43.6
o)	□	41.2	7.4	14.5	16.0	4.7	35.7	13.9
	◇	52.9	51.9	44.9	32.0	41.1	21.4	42.1
r)	□	17.6	11.1	8.7	4.0	0.9	28.6	6.9
	◇	58.8	18.5	30.4	16.0	29.9	14.3	28.6
s)	□	47.1	3.7	11.6	12.0	9.3	35.7	13.5
	◇	52.9	44.4	50.7	40.0	41.1	21.4	43.6
平均	□	36.8	6.5	12.3	12.0	5.6	33.9	12.0
	◇	54.4	44.8	42.7	36.0	38.1	19.6	39.5

1-3. 小数に関するもの

		小専数学	数学専攻	工学部	私大文	私大理	高校生	総計
d)	□	52.9	14.8	39.1	28.0	30.8	21.4	32.0
	◇	35.3	33.3	36.2	32.0	33.6	42.9	34.7
h)	□	11.8	3.7	11.6	8.0	7.5	21.4	9.3
	◇	17.6	37.0	36.2	32.0	30.8	14.3	31.3
i)	□	50.0	11.1	23.2	28.0	29.9	35.7	27.5
	◇	50.0	63.0	46.4	36.0	26.2	28.6	38.0
x)	□	5.9	0.0	8.7	0.0	1.9	21.4	4.6
	◇	11.8	25.9	33.3	44.0	29.9	28.6	30.5
平均	□	30.2	7.4	20.7	16.0	17.5	25.0	18.4
	◇	28.7	39.8	38.0	36.0	30.1	28.6	33.6

1-4. 分数に関するもの

		小専数学	数学専攻	工学部	私大文	私大理	高校生	総計
j)	□	11.8	0.0	2.9	4.0	0.0	21.4	3.1
	◇	64.7	11.1	24.6	12.0	14.0	28.6	20.5
k)	□	11.8	3.7	2.9	8.0	1.9	42.9	5.8
	◇	64.7	14.8	44.9	28.0	30.8	28.6	34.7
l)	□	58.8	11.1	5.8	8.0	4.7	42.9	11.6
	◇	35.3	37.0	43.5	40.0	52.3	42.9	45.6
m)	□	37.5	0.0	11.6	12.0	4.7	21.4	10.2
	◇	43.8	38.5	42.0	48.0	36.4	28.6	39.3
t)	□	0.0	0.0	14.5	8.0	3.7	14.3	7.0
	◇	56.3	11.1	21.7	28.0	23.4	28.6	24.4
u)	□	17.6	0.0	11.6	12.0	9.3	14.3	10.0
	◇	64.7	25.9	44.9	36.0	29.0	42.9	36.7
平均	□	22.9	2.5	8.2	8.7	4.1	26.2	8.0
	◇	54.9	23.1	36.9	32.0	31.0	33.4	33.5

1-5. 小数と分数の関係に関するもの

		小専数学	数学専攻	工学部	私大文	私大理	高校生	総計
a)	□	35.3	7.4	24.6	16.0	15.0	7.1	17.8
	◇	41.2	40.7	44.9	44.0	51.4	50.0	47.1
b)	□	11.8	3.7	17.4	12.0	9.3	0.0	10.8
	◇	58.8	22.2	27.5	32.0	27.1	50.0	30.5
c)	□	31.3	7.7	11.6	4.0	12.1	7.1	11.9
	◇	50.0	38.5	31.9	24.0	24.3	42.9	29.9
平均	□	26.1	6.3	17.9	10.7	12.1	4.7	13.5
	◇	50.0	33.8	34.8	33.3	34.3	47.6	35.8

1-6. 計算の規則に関するもの

		小専数学	数学専攻	工学部	私大文	私大理	高校生	総計
v)	□	47.1	7.4	34.8	28.0	25.2	57.1	29.3
	◇	47.1	59.3	43.5	56.0	56.1	21.4	50.6
w)	□	41.2	0.0	14.5	12.0	13.1	21.4	14.3
	◇	58.8	25.9	50.7	52.0	41.1	35.7	44.0
平均	□	44.2	3.7	24.7	20.0	19.2	39.3	21.8
	◇	53.0	42.6	47.1	54.0	48.6	28.6	47.3

2. 図形に関するもの

2-1. 多角形に関するもの

		小専数学	数学専	工学部	私大文	私大理	高校生	総計
c)	□	35.3	7.4	23.2	8.0	12.1	42.9	17.4
	◇	29.4	29.6	26.1	28.0	29.9	14.3	27.8
d)	□	41.2	3.7	27.5	12.0	14.0	28.6	18.9
	◇	47.1	22.2	43.5	40.0	44.9	21.4	40.5
e)	□	29.4	3.7	29.0	12.0	10.3	35.7	17.4
	◇	58.8	18.5	37.7	44.0	43.9	21.4	39.4
f)	□	6.3	3.7	7.2	8.0	4.7	7.1	5.8
	◇	56.3	0.0	23.2	20.0	18.7	21.4	20.5
h)	□	12.5	0.0	14.5	12.0	5.6	21.4	9.3
	◇	56.3	3.7	26.1	16.0	26.2	14.3	24.0
i)	□	17.6	0.0	26.1	44.0	18.7	35.7	22.0
	◇	52.9	18.5	18.8	16.0	28.0	14.3	24.3
j)	□	43.8	0.0	24.6	28.0	20.6	35.7	22.5
	◇	43.8	7.4	20.3	12.0	25.2	28.6	22.1
平均	□	26.6	2.6	21.7	17.7	12.3	29.6	16.2
	◇	49.2	14.3	28.0	25.1	31.6	19.4	28.4

2-2. 円に関するもの

		小専数学	数学専	工学部	私大文	私大理	高校生	総計
a)	□	64.7	22.2	27.5	44.0	30.8	64.3	34.4
	◇	35.3	40.7	49.3	44.0	50.5	7.1	45.2
b)	□	64.7	29.6	31.9	40.0	31.8	64.3	36.3
	◇	35.3	37.0	52.2	52.0	52.3	14.3	47.5
平均	□	64.7	25.9	29.7	42.0	31.3	64.3	35.4
	◇	35.3	38.9	50.8	48.0	51.4	10.7	46.4

2-3. 立体に関するもの

		小専数学	数学専	工学部	私大文	私大理	高校生	総計
g)	□	47.1	11.1	31.9	36.0	31.8	57.1	32.4
	◇	47.1	44.4	49.3	52.0	48.6	21.4	47.1

2-4. 次元に関するもの

		小専数学	数学専	工学部	私大文	私大理	高校生	総計
k)	□	47.1	29.6	52.2	48.0	52.3	71.4	50.2
	◇	41.2	29.6	34.8	32.0	30.8	7.1	31.3

3. 応用に関するもの

		小専数学	数学専	工学部	私大文	私大理	高校生	総計
a)	□	29.4	3.7	14.5	12.0	11.2	35.7	13.9
	◇	58.8	18.5	37.7	32.0	43.9	21.4	38.2
b)	□	6.3	7.7	10.1	8.0	14.0	28.6	12.3
	◇	56.3	38.5	31.9	28.0	28.0	21.4	31.1

4. 算数・数学の教え方に関するもの

		小専数学	数学専	工学部	私大文	私大理	高校生	総計
a)	□	25.0	0.0	33.3	8.0	22.4	35.7	24.3
	◇	62.5	57.1	33.3	40.0	36.4	28.6	37.0
b)	□	12.5	0.0	26.1	12.0	21.5	42.9	22.2
	◇	87.5	14.3	37.7	48.0	43.0	21.4	41.3
c)	□	75.0	38.5	43.5	40.0	43.0	50.0	45.1
	◇	18.8	46.2	36.2	36.0	32.7	7.1	32.4

æ æ

5　集計を見て

アンケートの質問項目と集計の結果を見ていると、何時間でも飽きないのは多分筆者だけではないだろう。

結果を見ての後知恵で、言えることは山ほどもある。

私大理のアンケート数が全体にしめる割合が、41.6% ～ 46.5% と大きく、全体の結果が私大理の結果に引きずられることもある。(1-3-i) の項目では特に顕著である。小専数学では合わせて 100% つまり全員が判っていないことを表明しているのに、私大理では合わせても 56.1% しかいない。(1-3-i) の問題は小数を小数で割ったときの商の精度と余りの精度の問題で、むしろ小数で割ったときの余りという概念が判りにくいのかも知れない。分からない割合が多くても仕方のない問題である。私大理で少ないのは、項目の内容を理解せずに解答をしているのかも知れないし、大学での教育によってこの種の計算には強くなっているグループなのかも知れない。また、実際に説明できるかどうかを考えず、出来るはずだと解答したのかも知れない。しかし、それらを区別するためには項目についての解説をすることにすれば、項目に対する感じ方が変わってしまうであ

ろう。実際に知っているかどうかでなく知っているかどうかを問う調査なので、項目の解説はそれを変えてしまう恐れがあり、やむを得ず解説はせずそのままにしている。

また、三重大工学部での分を合わせると、全体の 67.9% ～ 76.5% となり、工学部学生の比率が多すぎて、総計での値を全体での平均とは見ない方が良いかも知れない。筆者が直接に接することの出来た学生たちに行った調査なので、アンケート数に関する偏りはやむを得ない。グループ間の違いを見ることの方に興味があったのでこうしてあるが、必要なら表の値の平均を取ればよい。

項目ごとの質問の形式によっては[1] 、分かるか分からないかを問題にしやすかったり（□ の方が多くなる傾向)、説明できるかどうかを問題にしやすかったり（◇ の方が多くなる傾向）はするだろう。しかし、例えば、高校生の場合に、彼らが多少とも数学に関心を持っている層であるとはいえ、同じ項目で □ の方が多く出る傾向にあるのは、説明できるかどうかより、自分が知っているかどうかの方に関心が高く、知識として不安定な状態にあるのであろう。

小専数学の学生の集計結果が、他に比べて極端に大きな値になっているのは、彼らの数学的能力が低いということよりも、講義の中で議論していくことで生まれた “無知の知” によるものだと考えている。彼らはこのことを新鮮な驚きと感動を持って迎えてくれたようだ[2] 。

単独の値として一番大きいのは 87.5% の小専数学の (4-b◇) で、次が 85.7% の高校生の (1-1-p□) と (1-1-q□) である。60% を越えるのは、75.0% の小専数学の (1-1-q□) と (4-c□)、71.4% の高校生の (2-4-k□)、69.2% の数学専攻の (1-1-p◇)、64.7% の小専数学の (1-4-j◇)、(1-4-k◇)、(1-4-u◇)、(2-2-a□) と (2-2-b□)、64.3% の高校生の (2-2-a□) と (2-2-b□)、64.0% の私大文の (1-1-q□)、63.0% の数学専攻の (1-3-i◇)、62.5% の小専数学の (4-a◇) である。

分かっているのと説明できないのの実質的な差はないという立場もあるし、アンケートに答えた学生によっては区別が曖昧であることもあるだろうから、その和に関するランキングを見てみよう。100% の項目もあって、小専数学の (1-2-s)、(1-3-i)、(1-6-w)、(2-2-a)、(2-2-b)、(4b) である。90% 以上のものを拾うと、94.2% の小専数学の (2-3-g)、(1-6-v)、94.1% の小専数学の (1-2-n)、(1-2-o)、(1-4-l)、93.8% の小専数学の (1-1-q)、(4-c)、92.3% の数学専攻の (1-1-p)、92.0% の私大文の (2-2-b) となる。

80% 以上のものだけなら、89.7% の私大理の (1-1-p)、88.3% の小専数学の (1-1-p)、(2-1-d)、(2-4-k)、88.2% の小専数学の (1-2-d)、(2-1-e)、(3-a)、88.0% の私大文の (1-1-q)、(2-2-a)、(2-3-g)、87.8% の私大理の (1-1-q)、87.6% の小専数学の (1-1-g)、(2-1-j)、87.5% の小専数学の (4-a)、87.0% の工学部の (2-4-k)、85.7% の高校生の (1-1-p) と (1-1-q)、85.8% の高校生の (1-4-l)、84.7% の数学専攻の (4-c)、84.1% の工学部の (1-1-q)、(2-2-b) と私大理の (2-2-b)、84.0% の私大文の (1-1-f) と (1-6-v)、83.1% の私大理の (2-4-k)、82.4% の小専数学の (1-1-f)、82.3% の小専数学の (1-4-u)、81.3% の小専数学の (1-4-m)、(1-5-c) と私大理の (1-6-v)、(2-1-a)、81.2% の工学部の (2-3-g)、80.4% の私大理の (2-3-g)、80.0% の私大文の (1-1-p)、(2-4-k) である。

総計で考えると、86.1% の (1-1-q)、84.9% の (1-1-p)、83.8% の (2-2-b)、81.5% の (2-4-k)、79.9% の (1-6-v)、79.6% の (2-2-a)、79.5% の (2-3-g)、77.5% の (4-c)、66.7% の (1-3-d)、65.5% の (1-3-i)、64.9% の (1-5-a)、63.5% の (4-b)、63.0% の (1-1-f)、61.3% の (4-a) の順になる。

総計のランキングの順に少しコメントしておこう。

0 の処理に関する (1-p),(1-q) は確かに数学的にも高度で、ここに挙がるのは当然で、特に初等教育でこれを補わねばならないということにはならないだろう。しかし (1-f) が分かっていないの

[1] この形式は筆者が決めたのではなく、学生から挙がった疑問をそのまま残した所為である。先にも述べたように、それは最初にその疑問を挙げた学生の意識が判るかどうかに力点があったか説明できるかどうかに力点があったかによっている。次回の調査での項目のまとめ方の際に考慮せねばならない問題である。

[2] 最終節参照

が３分の２ほどもあるのは問題だ。答の形になっていないものは分かった気がしないのだろうか。中学以上でなら、何をするときも０で割ってはいけないと教えているはずだが、理由を教えていないのだろうか。その理由は (1-e) に他ならないが、この (1-e) でさえ３分の１が理解していないと思っている。掛け算の意味を累加としてしか理解していないと、(1-e) も分かりにくいかも知れない。

整数の割り算は (1-g) のように、掛け算の逆演算ともいえないところがある。この演算と掛け算の逆演算としての商を混同することから、(1-g) が疑問として残るのだろう。この段階でちゃんと理解していないから、小数でこの演算をやれば、(1-i) のような疑問のランクが高くなるのだろう。(1-d) のような割り切れない割り算の筆算の問題も同じ問題である。割り切れない場合、余りに対して単位を変えて整数の割り算を行い、また余りを求めることをしている。一つの計算の中で次々と単位を取り替えていくというのが、なかなかに分かりにくいことなのである。それを単なる計算技術として教える場合が多いので、このような疑問を持つものが多くなるのではないだろうか。

点と線と面領域は全く次元の異なるものであることを理解するのが難しいのは分かっていたが、(4-c) のように点であるか否かを大小の問題と捉える発想はどこから出てくるのだろうか。黒板に "点" を表わす教師がかなり大きな面積の円を描くことが、板書技術として推奨されてでもいるのだろうか。そのことがいけない訳ではもちろんないが、その円とその円で表わそうとしている点とが違うものであることはどこかで注意しておかないといけないだろう。それに比べると、(2-k) の疑問はある意味でもっともである。長さとか面積とかの図形の量というものの意味は容易に理解できるものではない。教師自身も理解出来ていないものが多いのではないだろうか。

円に関することが多角形に関する事柄よりも理解されにくいことは当たり前なのだが、(2-b) や (2-a) がこれほど高いランクに入るとは思いもしなかった。確かに円の面積や、円周の長さの公式は与えても、それが成り立つ根拠や、ましてやその面積や長さの意味するところ（定義）の説明はされていない。そのためにはどうしても無限の操作が必要であり、更には積分の概念が必要である。そのため高校の３年次に至って初めて、これを理解するための手掛かりを与えるための教材が出てくるが、理科系大学に進学する学生以外は触れる機会もない。しかし、円は非常に基本的であり、これらについての数学的背景や環境については説明することも出来ない訳ではない。何かの機会に論じてみることにする。

次に多くて意外なのは演算の規則に関する (1-v) のような疑問である。四則の混合算の時、積商を先にし和差を後で行う理由を説明できる教師は少ないだろう。教師にとっても何処でも習ってないものだから、これを要求するのは酷かも知れないが、一応教育学部での教育で自分で答えられる程度の学力はつけさせねばならないだろう。教えるときは多分、「こう決まっている」と言っているのであろう。一言で言うとなると筆者でも、「そう決めたのだから」と言うしかないが、それでは児童・生徒は納得しないだろう。それを学生は引きずっているのである。

これは規約にすぎないが、規約が生まれてきた背景というものがある筈である。一つだけでなく沢山の計算をする必要が生まれたのは、簿記（つまりは金勘定）でだろうと思われるが、そこでは足してから掛ける計算より、掛けたものを足すという計算の方が多かったのではないだろうか。またこの順序の方が都合がよいという（理論的な）理由もある。

計算の順序を確定するために括弧があるのであって、(1-w) のような疑問が生まれるはずはないと思うのだが、やはり何処かで学習障害を起こしているのだろうか。勿論 (1-w) は他にも内容があって、一つは分配法則が成り立つ理由、もう一つは文字式の計算で、文字はあくまでも数の代用品と思っているから、数が具体的に入るまでは計算を実行することに抵抗があるということ

である。分配律は今では長方形の面積を用いて視覚的に説明することが流布しているので、単独では学習困難としては感じられないのだろう。長方形での証明もそれだけでは数の次元の問題があって不十分ではあるが、実用的にはそれで済ませられるということか。また後半の変数・不定元の問題は実は非常に大きな問題であって、(4-b) でも特殊な形で出てくるが、学生の意識下に隠れているのであろう。それが大きな不安になって式の計算・代数・微積分などの学習の際の障害になっているのだろう。

加減と乗除はそれぞれの間では可換な演算でどちらを先にやってもよいが、加減と乗除の順序は決めておかねばならない。乗除を優先するのは、分配法則があるからだともいえる。$a+b\times c$ を $a+(b\times c)$ と考えるか $(a+b)\times c$ と考えるかだが、分配法則があるので後者は $(a\times c)+(b\times c)$ となるが、前者は変形のしようがない。記号は本来曖昧さをなくしたり、簡潔に表現するためのもので、式表現に多義性が少ないほうが良いに決まっている。

乗除よりも巾の方が優先されるのも同じ理由からである。$(a\times b)^c=(a^c)\times(b^c)$ だが、$a\times(b^c)$ は他の書き表し方がない。

(2-g) の錐の体積の問題は、円錐でなくても難しい。中心線が倒れていても体積は同様に求められる（例えば、三角形で、高さが一定なら、中線が倒れていても同じ面積になることの類似）ことを利用し、円の多角形近似と多角形錐の体積が $\frac{1}{3}$ を掛けねばならないことを示すくらいしかないだろう。多角形の場合には具体的に示せるとよいのだがそれもなかなかに難しい。例えば、[1] では稜の長さの同じ正四面体とピラミッド型を使って $\frac{1}{3}$ の因子を説明している。

(1-a) は分数の二つの性格、比と比の値の問題と、その近似値（たまたま丁度の値になったとしても）としての小数をどう同じだと考えるかという問題を含んでいて、かなり難しい疑問である。実際の教育課程では小数とは何かがほとんど語られていないのではないだろうか。

他にも色々気の付くこともあるけれど、このくらいにしておこう。æ

6　最後に

アンケート項目がこのような形になったのは小専数学を受講した学生との共同作業だったと言ってよい。学生の感想を見てみよう。

「はじめ先生に『今まで疑問に思っていた問題を書いてください』と言われたとき、余り思いつくことは出来ませんでしたが、みんなから提出されたものをまとめたもの」は「ほとんど自分でも分からない問題でした。」

「アンケートを一覧したとき『なんて簡単なことが書かれているのだろう』と思ったが、その思いはすぐに裏切られた。すべてと言っていいほど分からないのである。」

「問題を考えてみて、自分が今まで何気なく計算していたのに、いざ説明するとなると予想以上に難しいものであることを実感させられました。」

「ただ覚えただけ、やり方をつかんだだけでほったらかしにされてきた」「問題を、もう一度見つめ直すことが出来てよかったと思います。たった２０人足らずの少ない人数でこんなに沢山の疑問点が出て、しかもそれのほとんどが誰もきちんと説明できないとは、驚きました。」

「こんなにも分からないことだらけでよく数学を今までやってこれたなあと、本当に不思議に思います。」

「『$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$　何故か？』という問題は、私にとってあまりにも『それは決まっているから』などという気持ちがあって、いざ『説明しろ』と言われるとどうにもたじろいでしまいました。」

「高校の時の数学は、『この問題が出たら、この公式を使ってこう解く』というように、ほとんど暗記していました。これでは思考力がつくはずありません。」

「自分が実際小学校に言って授業をしたとき、このような質問がきたらと考えると、正直な気持ち少し怖くなりました。」

これらの感想はやはり講義で簡単にみえる問題に潜む困難を議論してきたから生じたものであろう。後期最初の小専数学の講義で、まったく新しい学生たち（５８人）に対して何の予備知識もなくこのアンケートを実施したところ、私大文系の結果と割りと似通った結果になった。この学生たちに数学について語った後で、もう一度白紙から始めてみようと思う。その結果は来年度の紀要で報告することにする。

終りに、集計の一部をお手伝いしていただいた鳥羽商船高専の佐波学氏に感謝する。

参考文献

[1] 蟹江幸博 「幾何的直観と対称性」プレプリント

[2] 蟹江幸博 「数学教育における数学者の役割」三重大学教育学部紀要、第 45 巻、教育科学 (1993)

[3] 蟹江幸博、黒木哲徳、中馬悟朗 「数学教育における教師の授業観と意識に関する調査研究」岐阜大学教育学部研究報告 (自然科学)、第 18-2 巻 (1993)