

有理数と無理数のはざま —連分数について—

蟹江 幸博
三重大学教育学部

目次

1	略歴と資料	1
2	有理数の連分数表示	2
2.1	ユークリッドの互除法	2
2.2	例として、グレゴリオ暦	3
3	有理数と無理数:連分数	4
4	無理数の連分数表示	4
4.1	平方根の連分数表示	4
4.2	立方根の連分数表示	8
4.3	平方根・立方根以外の連分数表示	10
5	無理数性	13
5.1	近似分数	13
5.2	無理数性	13
5.3	π の無理数性(ランベルトの証明)	14
6	人名豆事典と文献	16

1 略歴と資料

最終学歴	1976.3	京都大学大学院理学研究科博士課程数学専攻
職歴	1975.4	三重大学教育学部助手、講師、助教授を経て、
	1991.4	三重大学教育学部教授。現在に至る
学位		理学博士
所属学会		日本数学会、日本総合学習学会
運営する	TOSM	http://www.com.mie-u.ac.jp/~kanie/tosm/
HP	大学教育	http://www.com.mie-u.ac.jp/~kanie/agora/
	数学教室	http://math1.edu.mie-u.ac.jp/kanie/
	総合学習	http://www.com.mie-u.ac.jp/~kanie/jaise/
e-mail		kanie@edu.mie-u.ac.jp
訳書	1980年	V.I. アーノルド 『古典力学の数学的方法』(安藤・丹羽と共著)
	1985年	V.I. アーノルド 『カストロフ理論』
	1997年	ハイラー・ワナー 『解析教程 上下』

事前に読んで貰えば嬉しいものは、ハイラー・ワナー『解析教程上』と、数学セミナー別冊『数学の愉しみ』4号(1997.12),86-93.の「教育論壇-旗は揚げているのだが-」くらいです。

解析教程から、数学的な話題として、連分数の部分で1話完結にまとめたものを次ページ以降に書きます。本文中の人名について「*」は、最後の節に人物紹介があることを意味しています。

また、数学者ができる、もしくは行っている数学教育に関する試みについて、少しお話したいと思います。

2 有理数の連分数表示

まず、ラグランジュ*(1793)の言葉

連分数の理論は算術の中でも最も有効な理論の1つであり...算術や代数のほとんどの業績が失われてしまったので幾何学者の間ではよく知られているとは言えないかもしれません。この理論が少しでも馴染みのあるものになるのに役に立てたのなら嬉しいのですが。

を引用しておきましょう。

ここで失われたと言っているのは、ディオファントス*などの業績である。そこでは連分数に当たるものも研究されている。元々あまり系統だった業績ではないものの、幾何学のユークリッドのような集成者が居なかったため、不幸な時代を生き延びることができなかった。

そのため、数学教育の伝統の中で「連分数論」は重みを持っていないが、有理数と無理数を区別するのにもっとも便利な道具であり、知っておくべきテーマの1つであろう。

2.1 ユークリッドの互除法

2つの整数の最大公約数を計算するこのアルゴリズムは2000年以上も前から知られている(ユークリッド*、～紀元前300年、『原論』[7]第7章命題1,2)。

2つの正の整数、たとえば、105と24が与えられたとする。大きい方を小さい方で割れば、商4と余り9が得られます。つまり、

$$\frac{105}{24} = 4 + \frac{9}{24}$$

となります。商と余りをとるプロセスを続けると

$$\frac{24}{9} = 2 + \frac{6}{9}, \quad \frac{9}{6} = 1 + \frac{3}{6}, \quad \frac{6}{3} = 2$$

となる。余りが正の整数の作る、強い意味で減小する数列になるので、どんな正数の組に対しても、このアルゴリズムは必ず終わることになる。最後の0でない余り(ここでは3)が探していた最大公約数であり、これらのステップを組み合わせると、

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{105}{24} &= 4 + \frac{9}{24} = 4 + \frac{1}{\frac{24}{9}} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{6}{9}} \\ &= 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{9}{6}}} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{3}{6}}} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

となって、105/24の連分数表示が得られる。この手続きですべての有理数の連分数表示で、しかも分子が常に1であるようなものが得られることがわかります。

2.2 例として、グレゴリオ暦

ローマ教皇グレゴリウス 13 世* は、実態とずれてきたユリウス暦を改訂したが、そのとき連分数が役に立った、かも知れない。まず次の問題を考えよう。

天文学的な 1 年の長さは

365 日 5 時間 48 分 55 秒

です (オイラー* 『入門』 (1748) §382)。5 時間 48 分 55 秒を正則な連分数に展開して (「日」で量って) 対応する近似分数を計算しなさい。

5 時間 48 分 55 秒を正則な連分数で表わせば、

$$\frac{1}{4 + \frac{1}{7 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}}}}}}} \quad \text{日}$$

になる。1 次の近似分数は $1/4$ で、1 年に本当の日数は $1/4$ 日多いというわけで、4 年に 1 度閏年を設けて、1 日増やしておかないといけないことになる。

しかし、2 次の近似分数は $\frac{1}{4 + \frac{1}{7}} = \frac{7}{29}$ 日となり、100 年の間に $100 \times \frac{7}{29} = 24.13793103448$ 日多くなるようにした方が精確なのだが、4 年に 1 度の閏年では、 $100 \div 4 = 25$ 日多くなってしまふ。そこで、100 年に 1 度、閏年を止めた方がよいことになる。

さて、3 次の近似分数は $\frac{1}{4 + \frac{1}{7 + \frac{1}{1}}} = \frac{8}{33}$ 日となり、400 年の間に $400 \times \frac{8}{33} = 96.9696969697$ 日多くなるようにした方が精確なのだが、100 年に 24 度の閏年では 400 年では、 $24 \times 4 = 96$ 日しか多くない。400 年のうちに 0.9696969697 日、つまりほぼ 1 日足らなくなるので、400 年に 1 度は閏年を止めることを止めた方がよいことになる。

こうして、4 で割り切れる年は閏年として 1 日を増やし、100 で割り切れる年は閏年であることを止め、400 で割り切れる年は閏年を復活させるという、グレゴリオ暦が制定されました。

もちろんこれでもいつか、太陽年とのずれが起きてくるが、どれくらいになるのか調べてみましょう。4000 年をとってみよう。グレゴリオ暦では 400 年に 97 日ふやすのだから、4000 年では、 $97 \times (4000/400) = 970$ 日増やすことになっている。太陽年と 365 日とのずれは $\frac{4187}{17280}$ であり、4000 年では $\frac{4187}{17280} \times 4000 = 969.212962963$ となり、暦とのずれは 1 日に満たない。5000 年で約 1 日、1 万年で約 2 日。人類が滅亡している歴史観があるほどの未来である。そんな未来に 1 日違ったからといってさしたることではない。地球の公転速度も変わるし、地球規模の気象の変化も起こるだろう。それに比べれば、実用の暦として、グレゴリオ暦は十分過ぎるほどに精確なのです。

3 有理数と無理数:連分数

さて、(整数部分を引く逆数をとることを繰り返すという)ユークリッドのアルゴリズムを無理数に対して適用すると、どこかで終わるといふわけにはいかない。というのは、(1)のような有限の表示になったとすれば、(分母を払っていけば)有理数であることになってしまうからです。

$$(2) \quad q_0 + \frac{p_1}{q_1 + \frac{p_2}{q_2 + \frac{p_3}{q_3 + \dots}}}$$

の形で表わされるものを連分数と言ひ、分数 $p_1/q_1, p_2/q_2, p_3/q_3, \dots$ をその連分数の部分商と言ひます。すべての分子が $p_k = 1$ であるなら、その連分数を正則であると言ひます。正則な連分数で、すべての i に対して q_i が正の整数のときは、 q_0 は整数部分になっています。このような正則連分数を、 $[q_0; q_1, q_2, q_3, q_4, \dots]$ と表わすことにします。

この言葉を用いて、有理数と無理数の区別を考えてみましょう。有理数とは整数の比の値として表わされる数のことでした。ですから、有理数に対しては(負ならばマイナスをつけて正にして)、できれば既約分数にして(しなくても構わない)、その分母・分子に対してユークリッドの互除法を行えば、有限回で手続きが終わり、(1)のようにすれば、有限の正則な連分数が得られます。また、有限の連分数(どこかから先は $p_i = 0$ と考える)は、有理数を表わすことになります。

これが有理数と無理数とを、形の上で区別する方法です。

小数の場合、無理数は有限小数では表わせないが、有理数であっても分母が2と5のベキだけを含む分数表示を持たなければ無限小数になり、しかし、循環節を持つ無限小数になります。

4 無理数の連分数表示

さて、無理数の連分数表示を具体的に与えてみましょう。

4.1 平方根の連分数表示

最初に、 $\alpha = \sqrt{2} = 1.41421356\dots$ を考えてみます。ユークリッドの互除法を実行してみると、

$$1.4142\dots = 1 + 0.4142\dots = 1 + \frac{1}{2.4142\dots} = 1 + \frac{1}{2 + 0.4142\dots}$$

となります。最後の商で $\sqrt{2}$ の小数部分がまた現れていますね。実際、 $\alpha^2 = 2$ ですから、

$$\alpha^2 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha + 1) = 1$$

$$\begin{aligned}\alpha - 1 &= \frac{1}{1 + \alpha} \\ \alpha &= 1 + \frac{1}{1 + \alpha} \\ \alpha &= 1 + \frac{1}{1 + (1 + \frac{1}{1 + \alpha})} \\ \alpha &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \alpha}} \left(\because \frac{1}{1 + \alpha} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \alpha}} \right)\end{aligned}$$

となつて、 $\frac{1}{1 + \alpha}$ を次々に $\frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \alpha}}$ で置き換えることができ、

$$(3) \quad \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

が得られます。これは、ボンベリ*(1572)の公式と呼ばれています。

一番単純な連分数 $[1; 1, 1, 1, 1, \dots]$ は、「黄金比」から得られる

$$(4) \quad \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.61803\dots = 1 + \frac{1}{1.61803\dots} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

です。これは黄金比 γ が $\gamma^2 = \gamma + 1$ を満たすことから、 $\sqrt{2}$ と同様にして得られます。

$\beta = \sqrt{3}$ に対してもやってみましょう。結果は

$$\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots] = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

となります。 $\beta^2 = 3$ ですから、

$$\begin{aligned}\beta^2 - 1 &= (\beta - 1)(\beta + 1) = 2 \\ \beta - 1 &= \frac{2}{1 + \beta} \\ \beta &= 1 + \frac{2}{1 + \beta} \\ \beta &= 1 + \frac{2}{1 + (1 + \frac{2}{1 + \beta})} = 1 + \frac{2}{2 + \frac{2}{1 + \beta}}\end{aligned}$$

となります。美杉セミナーでは、高校生の皆さんに $\sqrt{3}$ の連分数表示を $\sqrt{2}$ と同様にできるからと演習としてしてもらったのですが、ほとんどがこの場所で止まってしまい、どうしていいかわからない様子でした。もちろん、何の障害も感じず、先に進むことのでき

る生徒もいましたが、それは能力の差というより、感性の差のように感じられました。約分という慣れている筈の作業が、ほんの少し形式が複雑になっているだけで心理的な抵抗になっているのです。

公式を暗記して適用するだけの学習法からは越え難い障壁になるのかもしれませんが。そういう抵抗をなくすことこそ、数学を学ぶ理由の1つなのですが。

それはともかく、右辺の分母・分子を2で約分すれば、

$$\beta = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\beta}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{1+\beta}}}$$

となつて、次々と

$$\frac{2}{1+\beta} \text{ を } \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{1+\beta}}}$$

で置き換えていくことができ、求める展開が得られます。

技巧的に感じるかもしれませんが、ユークリッドの互除法を連分数展開に適用する仕方を考えてみれば、実数 $\beta > 0$ に対して、その整数部分 $[\beta]$ と小数部分 $\{\beta\}$ に分けます。 $0 < \{\beta\} < 1$ だから、 $1/\{\beta\} > 1$ なので、その整数部分と小数部分に分けるという手続きであることが分かります。有理数なら、有限回で整数になってしまうし、無理数なら整数になることはないということです。

これを $\{\beta\}$ に対して、考えてみましょう。

$$\begin{aligned} \beta &= 1 + \frac{2}{1+\beta} \\ \frac{1+\beta}{2} &= \frac{1 + (1 + \frac{2}{1+\beta})}{2} = 1 + \frac{1}{1+\beta} \\ 1+\beta &= 1 + 1 + \frac{2}{1+\beta} = 2 + \frac{2}{1+\beta} \end{aligned}$$

となつて、 $\frac{2}{1+\beta}$ が再現するので、循環するということになります。

ついでですから、平方数でない $5 \leq n \leq 30$ に対して、 \sqrt{n} の連分数展開を求めてみると、

$$\begin{aligned} \sqrt{5} &= [2; 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, \dots] \\ \sqrt{6} &= [2; 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, \dots] \\ \sqrt{7} &= [2; 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \dots] \\ \sqrt{8} &= [2; 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, \dots] \\ \sqrt{10} &= [3; 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, \dots] \\ \sqrt{11} &= [3; 3, 6, 3, 6, 3, 6, 3, 6, 3, 6, 3, 6, 3, 6, 3, 6, \dots] \\ \sqrt{12} &= [3; 2, 6, 2, 6, 2, 6, 2, 6, 2, 6, 2, 6, 2, 6, 2, 6, \dots] \\ \sqrt{13} &= [3; 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 6, \dots] \\ \sqrt{14} &= [3; 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 6, \dots] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{15} &= [3; 1, 6, 1, 6, 1, 6, 1, 6, 1, 6, 1, 6, 1, 6, 1, 6, \dots] \\
\sqrt{17} &= [4; 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, \dots] \\
\sqrt{18} &= [4; 4, 8, 4, 8, 4, 8, 4, 8, 4, 8, 4, 8, 4, 8, 4, 8, \dots] \\
\sqrt{19} &= [4; 2, 1, 3, 1, 2, 8, 2, 1, 3, 1, 2, 8, 2, 1, 3, 1, 2, 8, \dots] \\
\sqrt{20} &= [4; 2, 8, 2, 8, 2, 8, 2, 8, 2, 8, 2, 8, 2, 8, 2, 8, \dots] \\
\sqrt{21} &= [4; 1, 1, 2, 1, 1, 8, 1, 1, 2, 1, 1, 8, 1, 1, 2, 1, 1, 8, \dots] \\
\sqrt{22} &= [4; 1, 2, 4, 2, 1, 8, 1, 2, 4, 2, 1, 8, 1, 2, 4, 2, 1, 8, \dots] \\
\sqrt{23} &= [4; 1, 3, 1, 8, 1, 3, 1, 8, 1, 3, 1, 8, 1, 3, 1, 8, 1, 3, 1, 8, \dots] \\
\sqrt{24} &= [4; 1, 8, 1, 8, 1, 8, 1, 8, 1, 8, 1, 8, 1, 8, 1, 8, 1, 8, \dots] \\
\sqrt{26} &= [5; 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, \dots] \\
\sqrt{27} &= [5; 5, 10, 5, 10, 5, 10, 5, 10, 5, 10, 5, 10, 5, 10, 5, 10, \dots] \\
\sqrt{28} &= [5; 3, 2, 3, 10, 3, 2, 3, 10, 3, 2, 3, 10, 3, 2, 3, 10, \dots] \\
\sqrt{29} &= [5; 2, 1, 1, 2, 10, 2, 1, 1, 2, 10, 2, 1, 1, 2, 10, 2, 1, 1, 2, 10, \dots] \\
\sqrt{30} &= [5; 2, 10, 2, 10, 2, 10, 2, 10, 2, 10, 2, 10, 2, 10, 2, 10, \dots]
\end{aligned}$$

となります。

$\sqrt{5}, \sqrt{6}$ は $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ とまったく並行に実行できるのですが、 $\delta = \sqrt{7}$ は周期が4だけあって、なかなか一筋縄では行きません。

$\sqrt{3}$ でやったようにしてみます。まず、

$$\delta^2 - 4 = 3 \implies \delta = 2 + \frac{3}{2 + \delta}, \quad \delta^2 - 1 = 6 \implies \delta = 1 + \frac{6}{1 + \delta}$$

という2式が得られます。この前の式から、

$$\begin{aligned}
\delta &= 2 + \frac{3}{2 + \delta} \\
\frac{2 + \delta}{3} &= \frac{2 + 1 + \frac{6}{1 + \delta}}{3} = 1 + \frac{2}{1 + \delta} \\
\frac{1 + \delta}{2} &= \frac{1 + 1 + \frac{6}{1 + \delta}}{2} = 1 + \frac{3}{1 + \delta} \\
\frac{1 + \delta}{3} &= \frac{1 + 2 + \frac{3}{2 + \delta}}{3} = 1 + \frac{1}{2 + \delta} \\
2 + \delta &= 2 + 2 + \frac{3}{2 + \delta} = 4 + \frac{3}{2 + \delta}
\end{aligned}$$

となり、 $\frac{3}{2 + \delta}$ が再現することから、1, 1, 1, 4 が繰り返されることとなります。

ほかにも同様にして得られます。やってみてください。

整数の平方根の正則な連分数表示には周期が現れます。実は、周期性を持つ正則な連分数表示を持つ実数は、ある整係数の2次方程式の解であり、そのようなものに限ることが証明されます。一般に証明することは難しいので、簡単な周期の場合に考えてみましょう。

$$x = \frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \dots}}}}, \quad y = \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{a + \dots}}}}}$$

を考えると、

$$x = \frac{1}{a + x}, \quad y = \frac{1}{a + \frac{1}{b + y}}$$

となるから、

$$x^2 + ax - 1 = 0, \quad ay^2 + aby - b = 0$$

の正の解になるので、

$$x = \frac{\sqrt{a^2 + 4} - a}{2}, \quad y = \frac{\sqrt{a^2 b^2 + 4ab} - ab}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 + 4b/a} - b}{2}$$

となります。

例えば、 x で、 $a = 2$ であれば、 $x = \frac{\sqrt{a^2+4}-a}{2} = \frac{\sqrt{2^2+4}-2}{2} = \sqrt{2} - 1$ となって、 $\sqrt{2}$ の連分数表示が再現し、 $a = 1$ であれば、 $x = \frac{\sqrt{a^2+4}-a}{2} = \frac{\sqrt{1^2+4}-1}{2}$ つまり $x + 1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ となって、黄金比の連分数表示が再現する。また、 $a = 2n$ のとき、 $x = \frac{\sqrt{4n^2+4}-2n}{2} = \sqrt{n^2+1} - n$ となって、 $\sqrt{n^2+1}$ の連分数表示が周期 1 を持つことがわかる。

また例えば、 y で、 $a = 1, b = 2n$ と置けば、

$$y = \frac{\sqrt{b^2 + 4b/a} - b}{2} = \frac{\sqrt{4n^2 + 8n} - 2n}{2} = \sqrt{n^2 + 2n} - n$$

が得られ、 $\sqrt{3}, \sqrt{8}, \sqrt{15}, \dots$ が 2 を周期としていることがわかる。

一般に、ある所から先が周期的になる連分数はある有理数係数の 2 次方程式の解であることは納得されるであろう。また、平方数でない自然数の平方根がどういう形の周期を持つ連分数であるためには、上の表示で $[q_0; q_1, q_2, q_3, \dots]$ と書くとき、ある k があって、循環節が $q_1, q_2, \dots, q_{k-1}, q_k = 2q_0$ となることが必要十分であることが、知られています (ルジャンドル* の定理)。

4.2 立方根の連分数表示

平方根の連分数展開は周期性があったが、立方根にはないということでした。実際に、立方数を除いて、立方根を少し計算してみると、

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2} &= [1; 3, 1, 5, 1, 1, 4, 1, 1, 8, 1, 14, 1, 10, 2, 1, 4, 12, 2, 3, 2, 1, 3, \\ &\quad 4, 1, 1, 2, 14, 3, 12 \dots] \\ \sqrt[3]{3} &= [1; 2, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 1, 6, 2, 5, 8, 3, 3, 4, 2, 6, 4, 4, 1, 3, 2, 3, 4, 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4, 9, 1, 8 \dots] \\
\sqrt[3]{4} &= [1; 1, 1, 2, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 3, 1, 30, 1, 4, 1, 2, 9, 6, 4, 1, 1, 2, 7, 2, 3, \\
& 2, 1, 6, 1 \dots] \\
\sqrt[3]{5} &= [1; 1, 2, 2, 4, 3, 3, 1, 5, 1, 1, 4, 10, 17, 1, 14, 1, 1, 3052, 1, 1, 1, 1, \\
& 1, 1, 2, 2, 1, 3, 2 \dots] \\
\sqrt[3]{6} &= [1; 1, 4, 2, 7, 3, 508, 1, 5, 5, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 24, 1, 1, 1, 3, 3, 30, 4, \\
& 10, 158, 6, 1, 1, 2 \dots] \\
\sqrt[3]{7} &= [1; 1, 10, 2, 16, 2, 1, 4, 2, 1, 21, 1, 3, 5, 1, 2, 1, 1, 2, 11, 5, 1, 3, 1, \\
& 2, 27, 4, 1, 282, 8 \dots] \\
\sqrt[3]{9} &= [2; 12, 2, 18, 1, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 24, 1, 9, 1, 2, 19, 1, 2, 2, 12, 3, 2, 1, \\
& 3, 1, 2, 1, 2, 1 \dots] \\
\sqrt[3]{10} &= [2; 6, 2, 9, 1, 1, 1, 2, 4, 1, 12, 1, 1, 1, 1, 1, 57, 4, 2, 16, 1, 1, 1, 1, 9, 6, 2, \\
& 3, 1, 1, 12, 1 \dots] \\
\sqrt[3]{11} &= [2; 4, 2, 6, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 9, 88, 2, 1, 2, 1, 8, 1, 1, 3, 4, 1, 7, 1, 40, 1, 1, \\
& 36, 2, 3, 1 \dots] \\
\sqrt[3]{12} &= [2; 3, 2, 5, 15, 7, 3, 1, 1, 3, 1, 1, 96, 7, 2, 6, 3, 36, 1, 17, 25, 2, 4, 9, \\
& 24, 9, 1, 3, 2, 34 \dots] \\
\sqrt[3]{13} &= [2; 2, 1, 5, 1, 1, 1, 43, 3, 2, 1, 1, 3, 10, 7, 1, 12, 2, 20, 3, 1, 3, 9, 1, 6, 1, \\
& 1, 22, 1, 2, 2 \dots] \\
\sqrt[3]{14} &= [2; 2, 2, 3, 1, 1, 5, 5, 9, 6, 21, 1, 1, 54, 1, 22, 1, 1, 3, 2, 1, 5, 3, 237, \\
& 2, 20, 1, 1, 3, 3 \dots] \\
\sqrt[3]{15} &= [2; 2, 6, 1, 8, 1, 10, 8, 12, 1, 719, 4, 2, 5, 2, 2, 3, 3, 2, 1, 46, 4, 2, \\
& 11, 2, 1, 3, 11, 2, 1 \dots] \\
\sqrt[3]{16} &= [2; 1, 1, 12, 10, 18, 1, 6, 1, 21, 1, 2, 2, 24, 1, 6, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, \\
& 3, 1, 28, 1, 1, 1, 5 \dots] \\
\sqrt[3]{17} &= [2 : 1, 1, 3, 138, 1, 1, 3, 2, 3, 1, 1, 207, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 4, 9, 1, \\
& 2, 4, 1, 1, 3, 4 \dots] \\
\sqrt[3]{18} &= [2; 1, 1, 1, 1, 1, 3, 22, 1, 2, 2, 2, 24, 64, 2, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 4, 24, 1, \\
& 1, 1, 2, 2, 1, 16 \dots] \\
\sqrt[3]{19} &= [2; 1, 2, 63, 1, 2, 2, 2, 1, 95, 2, 1, 1, 2, 7, 4, 2, 3, 1, 2, 3, 127, 1, 4, \\
& 1, 3, 1, 4, 4, 12 \dots] \\
\sqrt[3]{20} &= [2; 1, 2, 1, 1, 154, 6, 1, 1, 1, 6, 231, 1, 15, 8, 3, 1, 10, 3, 2, 1, 1, 17, \\
& 1, 2, 77, 42, 1, 4, 8 \dots] \\
\sqrt[3]{21} &= [2; 1, 3, 6, 1, 3, 17, 1, 7, 3, 3, 11, 2, 92, 1, 3, 1, 3, 1, 2, 2, 26, 2, 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 20, 1, 4, 2, 10, 43 \dots] \\
\sqrt[3]{22} &= [2; 1, 4, 19, 2, 2, 2, 2, 2, 29, 56, 35, 49, 39, 4, 2, 56, 1, 97, 2, 11, 1, \\
& 5, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1 \dots] \\
\sqrt[3]{23} &= [2; 1, 5, 2, 2, 7, 1, 16, 4, 1, 8, 10, 7, 1, 4, 5, 1, 2, 2, 3, 1, 1, 1, 1, 3, 7, \\
& 1, 12, 1, 1 \dots] \\
\sqrt[3]{24} &= [2; 1, 7, 1, 1, 1, 12, 13, 1, 10, 4, 6, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, \\
& 1, 1, 7, 1, 6 \dots] \\
\sqrt[3]{25} &= [2; 1, 12, 6, 4, 1, 2, 2, 2, 5, 1, 1, 4, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 3, 3, 610, 3, 10, \\
& 1, 14, 1, 5, 1, 1 \dots] \\
\sqrt[3]{26} &= [2; 1, 25, 1, 1, 1, 39, 12, 1, 1, 4, 4, 13, 93, 3, 17, 3, 1, 85, 1, 3, 5, 1, \\
& 1, 8, 1, 6, 1, 2, 1 \dots] \\
\sqrt[3]{28} &= [3; 27, 3, 40, 1, 10, 1, 1, 21, 13, 1, 2, 2, 1, 7, 2, 2, 63, 1, 1, 2, 1, 5, \\
& 3, 3, 1, 1, 1, 11, 4 \dots] \\
\sqrt[3]{29} &= [3; 13, 1, 4, 1, 4, 2, 2, 2, 3, 1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 3, 2, 3, 8, 7, 2, 2, 1, 2, \\
& 8, 1, 3, 12 \dots] \\
\sqrt[3]{30} &= [3; 9, 3, 13, 1, 9, 1, 2, 5, 4, 1, 1, 3, 1, 18, 3, 2, 4, 5, 3, 4, 1, 2, 2, 22, \\
& 1, 3, 1, 3, 79 \dots]
\end{aligned}$$

となります。もちろんこれは手でやったわけではなく、Mathematica という数式処理ソフトを使って求めたものです。

周期性がありそうもないことが視認できるでしょう。なにかしらの構造があるかどうかも分かっていません。

4.3 平方根・立方根以外の連分数表示

いくつか正則連分数の例をあげておきましょう。

$$(5) \quad e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \dots}}}}}}}}$$

$$(6) \quad \frac{e-1}{e+1} = \frac{1}{2 + \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \frac{1}{14 + \dots}}}}$$

$$(7) \quad \pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}$$

e や $(e-1)/(e+1)$ に対する商は、規則的な振る舞いをしています。このことは、 $(e-1)/(e+1)$ に対しては、これが $\tanh(1/2)$ であることから以下で説明します ((31) 式参照)。 e に対する規則性はもっと巧妙に示されます (A. フルヴィッツ* 『著作集』第2巻, p.130)。 π に対しては、たとえ何千項計算したとしても規則性は見つかりません (ランベルト (1770a) が 27 項、ロクス (1963) が 968 項計算しています)。

$\pi/4$ に対するブラウナー* の分数 π に対するウォリスの積 (1655)

$$(8) \quad \boxed{\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 9} \cdot \frac{10 \cdot 10}{9 \cdot 11} \cdot \dots}$$

が発見されて1年後に、ブラウナーはそれを変形して、面白い連分数に変えることに成功しました。この結果から、ウォリスはその書『無限算術』(1655、『全集』第1巻, pp.474-475 参照) の最後の2ページに連分数の理論を含める気持ちになりました。

J. ウォリス* の気分を『代数論』(1685) の p.318 から引用すると、

それゆえ、円¹ と直径の2乗との比は1対 $1 \times \frac{9}{8} \times \frac{25}{24} \times \frac{49}{48} \times \frac{81}{80} \times \dots$ (無限に続く)、または、1対

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{9}{2 + \frac{25}{2 + \frac{49}{2 + \frac{81}{2 + \dots}}}}}$$

(無限に)

であるということが出来ます。どのようにしてこのような近似を得たのかを...ここに書き込むには長すぎるでしょうが、その論文を喜んで調べようとする人には理解されるでしょう。

¹ ここで円とは円の面積のこと。したがって、この比は $\pi r^2 : (2r)^2 = \pi : 4 = 1 : 4/\pi$ のことである。

ということになります。ブラウナーの連分数は、

$$(9) \quad \frac{\pi}{4} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{9}{2 + \frac{25}{2 + \frac{49}{2 + \dots}}}}}}$$

というのですが、彼がどのようにしてこれを導いたかは知られていません。
もちろん現在では、ライプニッツ*の級数

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

から、連分数の一般論で導くことは出来るのですが。

5 無理数性

5.1 近似分数

連分数 (2) を k 番目の商で打ち切ったとすれば、その連分数の k 次の近似分数と呼ばれる有理数

$$(10) \quad q_0 + \frac{p_1}{q_1 + \frac{p_2}{q_2 + \dots + \frac{p_k}{q_k}}}$$

が得られます。連分数 (2) がある実数を定めるならば、その実数に収束する k 次の近似分数を k 番目とする数列が定まります。

これまでに挙げた例で考えると、それぞれ有理数の列

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} &\approx \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \frac{144}{89}, \dots \\ \sqrt{2} &\approx \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, \frac{1393}{985}, \frac{3363}{2378}, \dots \\ \sqrt{3} &\approx \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{19}{11}, \frac{26}{15}, \frac{71}{41}, \frac{97}{56}, \frac{265}{153}, \frac{362}{209}, \frac{989}{571}, \dots \\ e &\approx \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{19}{7}, \frac{87}{32}, \frac{106}{39}, \frac{193}{71}, \frac{1264}{465}, \frac{1457}{536}, \dots \\ \pi &\approx \frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{104348}{33215}, \dots \end{aligned}$$

が得られますが、これらは元の無理数に急速に近づいていきます。

$\sqrt{2}$ と $\sqrt{3}$ を近似する分数は古代でも知られていました (アルキメデス* は注釈もなく $265/153 < \sqrt{3} < 1351/780$ を使っています)。 π に対する 2 つの近似分数 $22/7$ (アルキメデス) と $355/113$ (中国では祖冲之* (480 年頃)、ヨーロッパではアドリアヌス・メチウス* (1571–1635)) は平均よりはよい近似になっています。その理由は、無視する最初の分母 q_{k+1} が大きい (それぞれ 15 と 292) ことです。

一方で、黄金比 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ の場合、(すべての分母が $q_k = 1$ で) 収束は遅く、各項の分母・分子をよく見れば、フィボナッチ* 数列になっています。

5.2 無理数性

前節の終わりの表示 (9) から、 π が無理数であることはすぐには分かりません。無限の連分数で表現されてはいても、正則な表示になっていないからです。と言って、 π の正則な表示 (7) は不規則なので、(7) 式を無限に与えることも出来ません。

無限の連分数表示を持つことから無理数性を導くには 2 つの困難があります。

最初の困難 連分数がどんな数も表わさないことがあること。このことを見るために、級数

$$(11) \quad \frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \frac{6}{5} - \frac{7}{6} + \dots$$

を考えます。各項は ± 1 に近づいていきますから、級数は明らかに収束しません。これに対応する連分数が

$$(12) \quad \frac{2}{1 + \frac{3}{1 + \frac{32}{1 + \frac{135}{1 + \dots}}}}$$

であることは、近似分数を作ってみれば分かりますが、この連分数ははどんな実数にも収束しないこととなります。

第2の困難 有理数を表わす無限連分数が存在すること。たとえば、 $2 = 1 + 2/2$ であり、分母の 2 へ次々に代入して得られる連分数

$$(13) \quad 2 = 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{1 + \dots}}}}$$

は有理数です。

一般に周期を持つ連分数は整係数の 2 次方程式の解であったのですが、有理数もそのような方程式の解になり得たのです。

ここで、次の定理を証明なしに引用させてください。証明はハイラー-ワナー [6] 第 I 章第 6 節定理 6.4 とその後の注意を見てください。

定理 1 p_j, q_j が整数で、ある数 j_0 から先の $j \geq j_0$ に対して

$$(14) \quad 2|p_j| \leq q_j - 1$$

であったら、連分数 (2) はある無理数 α に近づく。

5.3 π の無理数性 (ランベルトの証明)

$\tan x$ に対するランベルトの連分数

ランベルト*(1768) は $\tan x$ の $x = 0$ での無限級数展開を考えました。もちろん、関数 $\tan x = \sin x / \cos x$ の展開は特に単純な無限級数にはなっていませんが、 $\sin x, \cos x$ の展開は非常に規則的です。これを使って連分数を作ることを考えました。

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - x^3/6 + x^5/120 - \dots}{1 - x^2/2 + x^4/24 - \dots} = \frac{x}{1 - \frac{x^2/2 + x^4/24 - \dots}{1 - x^2/6 + x^4/120 - \dots}}$$

となっています。 $x \rightarrow 0$ とすると分母は 1 に近づくから、1 を引けば

$$\tan x = \frac{x}{1 - \frac{x^2/3 - x^4/30 + \dots}{1 - x^2/6 + x^4/120 - \dots}} = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{1 - x^2/6 + \dots} \frac{1}{1/3 - x^2/30 + \dots}}$$

が得られます。ここで $x \rightarrow 0$ とすると最後の分母は 3 に近づくので、3 を引けば

$$\tan x = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{\dots}}}$$

が得られることとなります。これを続けていけば、分母が 5, 7, ... というように得られていきます。18 世紀の人 (ランベルト 1768) にとっては、これでもう、

$$(15) \quad \tan x = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{7 - \frac{x^2}{9 - \dots}}}}} = \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{3 - \frac{1}{x} - \frac{1}{5 - \frac{1}{x} - \frac{1}{7 - \dots}}}}$$

という式が一般に成り立つことは、疑う余地もないことだったので。20 年ほど後に、ルジャンドル (1794) はこの式の完全な証明を与えています。

ここで、次の定理が成り立ちます。

定理 2 (ランベルト (1768, 1770a)、ルジャンドル (1794)) 有理数である $x (x \neq 0)$ に対する値 $\tan x$ は無理数である。

証明 $x = m/n$ を有理数として (10) 式に代入すると、

$$(6.31) \quad \tan \frac{m}{n} = \frac{m/n}{1 - \frac{m^2/n^2}{3 - \frac{m^2/n^2}{5 - \frac{m^2/n^2}{7 - \dots}}}} = \frac{m}{n - \frac{m^2}{3n - \frac{m^2}{5n - \frac{m^2}{7n - \dots}}}}$$

となります。右辺には整数係数の連分数が得られています。すると、

$$p_1 = m, \quad p_i = m^2 \quad (i \geq 2); \quad q_i = (2i - 1)n \quad (i \geq 1)$$

となるので、すべての m と n に対して、条件 (14) はある数 i_0 より先では満たされることとなります。□

同じ結果が \arctan 関数に対しても成り立ちます。つまり、有理数 y に対する値 $x = \arctan y$ は無理数になります。もしもそうでないなら、 $y = \tan x$ は定理 2 によって無理数ということになります。特に、 $\pi = 4\arctan 1$ は無理数でなければなりません！

解析学ではよく無限和と無限積が使われますが、連分数は「無限」のプロセスの第 3 の可能性である無限商を考えることになっています。それが数の性質を明らかにしてくれるプロセスは、とても魅力的なものに見えませんか。

6 人名豆事典と文献

講演に出てきた人の簡単な人物紹介である。項目の長さは必ずしもその人の重要さに比例してはいない。『解析教程』の付録として作成したもののなので、かなり趣味的なもの。定番風の記述になっている項目はむしろ調査不足を表している。

アルキメデス、シラクサの Archimedes of Syracuse, 紀元前 287?-212. シシリー島、シラクサに生まれ、シラクサに死す。父フェイディアスも天文学者。アレキサンドリアに学び、エラトステネス、コノン、ドシテオスらと交流。ラセン式水揚げ機、テコ、滑車、投石機などの発明。浮力の原理を発見したとき、裸で浴場を飛び出したり、ローマ軍と戦う軍師でありながら島に攻め込まれたとき、ローマ兵士に地面の上に描いた図を消すなどと言って殺されたり、エピソードは豊富。死ぬ直前に描いていた図は何だったのか。「支点を与えてくれれば世界を動かしてみせる。」

日本人の好きな学者の一人で、現存する著書のほとんどは日本語訳がある。『方法』(佐藤徹訳、東海大学出版会)、『科学の名著9 アルキメデス』(朝日出版社,1981)の中に『球と円柱について、第1巻』(佐藤徹訳)、『機械学』(佐藤徹復元)、『世界の名著9ギリシャの科学』(中央公論社,1980)の中に「球と円柱について1,2」「浮体について1」など11論文の抄訳(三田博雄訳)がある。

ウォリス、ジョン John Wallis, 1616.11.23-1703.10.28.

イギリス、ケント、アシュフォードに生まれ、オックスフォードに死す。ニュートン以前の最も影響力のあったイギリス人数学者。

ケンブリッジのエマニュエル・カレッジ(1632-1637)で学びBAを取得。英国国教会の牧師としてヨークシャーとエセックスで過ごす(1640-1643)。チャールズI世と議会との内乱(1642-52)の際、王党派の暗号を解読する。チャールズI世の処刑に反対する署名をしたにもかかわらず(1648)、議会派への貢献を認めたクロムウェルにより、オックスフォード大学サヴィル幾何学教授(1649-終身)に任ぜられる。このうち本格的に数学の研究を始め、1955年の『無限算術』の出版後国際的な数学者として知られる。

ガリレイの弟子のトリチェリ(1608-47)の影響を受け、ニュートンに強い影響を与える。不可分量に対して、デカルトの代数解析的手法を応用し、また始めて円錐曲線を座標を使い2次曲線として考察した。無限大の記号 ∞ や補間法の用語を導入。ロンドン王立協会の創立者(1660)。数学以外にも、『力学』(1669)、宗教書、語源学、英語の文法書(1653)、論理学(1687)などの本を出している。

オイラー、レオンハルト Leonhard Euler, 1707.4.15-1783.9.18.

スイス、バーゼルに生まれ、ロシア、サンクト・ペテルブルグに死す。ヨハン・ベルヌーイの弟子。ペテルブルグ(27-41)、ベルリン(41-66)、ペテルブルグ(66-83)のアカデミーに。66年に全盲となるも、死ぬまで活発な研究を続ける。朴訥な人柄で、子供は13人。赤ん坊を抱え、子供を足元で遊ばせながら数学をしたと言われている。また、お茶をすすりながら孫と話をしているとき、突然に死んだという。

数学史上最大の多作家。ケーニヒスベルクの橋を一筆書きする問題や多面体の面・

辺・頂点の数の関係式(オイラー標数)で、グラフ理論とトポロジーの祖となる。フランスの物理学者アラゴー(1786.2.26-1853.10.2)は、オイラーを「解析学の化身」と称え、「人が息をするように、鷲が空を舞うように、オイラーは計算をした」と言っている。

グレゴリウス 13 世 Gregorius XIII, 1502.1.1-1585.4.10.

イタリア、ボローニャに生まれ、ローマに死す。

ボローニャ大学法律学教授を数年務めた後、ローマに移住し(1539)、駐スペイン教皇特使枢機卿(1565)を経て、ローマ教皇(1572-85)。反宗教改革や教会内部の改革運動を推進した。クラヴィウスの進言により、ユリウス暦をグレゴリウス暦に改める(1582.2.24)。インド・日本の布教に尽力し、大友・大村・有馬諸侯の遣欧使節を接見(1585)。コレッジョ・ロマーノ(ローマ学院)とグレゴリウス大学をローマに設立。

祖冲之 Tsu Ch'ung -Chih, 429-500(430-501 という説あり)。

字は文遠。南朝、宋・斉の人。天文学・数学・機械技術者。大明暦を作成し、宋の孝武帝に献じ(462)、梁のときから使用。指南車の復元(478)、『綴術』(唐代には教科として教えられたが、高度過ぎて習う者がなくなり、失われたという。 π の値のみ『隋書・律歷志』に約率 $22/7$ 、密率 $355/113$ と転載されている)。

ディオファントス、アレキサンドリアの Diophantos = Diopantus,

246?-330?(200?-284?)。アレキサンドリアに住んでいたことがあることしか分らない。他には 33 才で結婚し、息子が 42 才で死んだ時から 4 年後 84 才で死んだということが解答である算術の問題が残っており(5 ないし 6 世紀の『古代ギリシャ詩華集』)、生没年そのものは全くあてにならないのだが、84 年間生きていただろうということにはなっている。

『算術』全 13 巻。前半の 6 巻のみ現存。アラビア語を通し、ラテン語に翻訳されたものの余白にフェルマーが書き込みをする。

フィボナッチ=ピサのレオナルド Leonardo da Pisa, Leonardo Pisano (= Fibonacci), 1170?(1174?)-1250.

イタリア、ピサに生まれ、ピサに死す。

父はピサの外交係で、アルジェリアに赴任(12 才)、父と共に地中海沿岸各地をイスラム側も含めて旅行する。土地土地の計算法・記数法を身に付けた。1200 年にピサに戻り、出版した『算盤の書』(*Liber Abaci*, 1202)で 10 進記数法をインド・アラビア数字と共にヨーロッパに紹介。0 を Zephirum と呼んでいる。フィボナッチ数列。1220 年の『幾何学演習』は当時の幾何学の集大成で三角法も含んでいた。今は失われたユークリッドの本(図形の分割に関する事)に基づく部分もある。1224 年の『精華』では不定方程式も論じている

ブラウンカー、ウィリアム Lord William Brouncker, 1620-1684.4.5.

アイルランド、ライアン・カスルに生まれ、イギリス、オックスフォードに死す。2 代目ブラウンカー子爵。王立協会初代会長(1662-77)。ロンドンのグレシャム・カ

レッジの学長('64-67)。オイラーによって誤ってペルの方程式と呼ばれている、2元2次不定方程式の解を与えた。業績はウォリスと共同のものが多く、ウォリスの書の中で発表されたので、誤解されている。

フルヴィッツ Adolf Hurwitz, 1859.3.26-1919.11.18.

ドイツ、低地サクソン、ヒルデスハイムに生まれ、スイス、チューリッヒに死す。始めシューベルトに学び、ベルリン大学で、クンマー、ワイエルシュトラス、クロネッカーの講義を受ける。F. クラインとライプツィヒに移り、彼のもとでモデュラー関数に関する博士論文。ケーニヒスベルク大学(1884-92)でヒルベルト、ミンコフスキーを教え、長く親交。フロベニウスの後任として、チューリッヒ工科大学教授(1892)。

実係数方程式の根の実部がすべて負になる条件を求めるのをフルヴィッツの問題という。多元数論、 e の超越性の証明の簡易化(1853)、等周問題の三角級数による美しい解答(1901)。日本語に訳されたものに、R. クーラントとの共著の『楕円関数論』(足立恒男+小松啓一訳)シュプリングァー数学クラシックスがある。

ボンベリ Rafaele Bombelli, 1526.1.20-1572.5.5.

イタリア、ボローニャに生まれ、恐らくはローマに死す。メルフィの司教ルフィーニ(Alessandro Rufini)に仕えた技術者。大学教育は一切受けず、技術者・建築家のP.F. クレメンティによって教えられる。『代数学』(1572,1929)はルネサンス・イタリアの代数学の集大成。複素数の加法・乗法の規則を初めて記述。

メチウス、アドリアヌス Adrianus Metius, 1571.12.3-1635.

オランダ、アルクマールに生まれ、フリジア、フラネカー(現在オランダ領)に死す。オランダの地図制作者・軍事技術者でアルクマール市長を務めたこともあるアドリアン・アントーニッツ(Adriaen Anthonisz=Adriaan Metsue, 1543-1620.11.20)の第2子として生まれる。結婚は2度したが、子供はない。

1589年フラネカー大学に入学、1594年からライデン大学で学ぶ。ルドルフ・スネリウスとファン・ケーレンに数学を学ぶ。チコ・ブラーエの元で働いたこともある。1595年オランダに帰り、軍事技術に関し父の助手。1598年以降その死まで、フラネカー大学教授。国際的な知名度があり、1629年にはデカルトが聴講していたという記録もある。

π の近似値として、 $3 + \frac{15}{106} < \pi < 3 + \frac{17}{120}$ という評価の小数部分の分母・分子それぞれの平均をとって $3 + \frac{16}{113} = \frac{355}{113}$ という値を得た(5世紀中国の祖冲之がこの値を得ている)。この値はアドリアンの数と呼ばれている。父が彼の結果をそのパンフレット(1584)に書いたので、誤ってこれを父の業績としているものもある。

ユークリッド=エウクレイデス、アレキサンドリアの Euclides =

Euclid of Alexandria = ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ, 紀元前 330?-275?(365?-300?). エジプト、アレキサンドリアの生まれ。プラトンのアカデミアに学ぶ。

幾何学以外にも著作は多い。アレキサンドリアでプトレマイオス一世に「幾何学に王道はない」と言った言葉は数学者にとっては誇りであるが。

ライプニッツ Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646.7.1-1716.11.14.

ドイツ、ライプツィヒに生まれ、ハノーヴァーに死す。哲学・数学・法学・経済学者・政治家・外交官。父はライプツィヒ大学道徳哲学教授。早熟の天才。ライプツィヒ大学で法律を学ぶも若すぎると学位を拒まれ(1666)、ニュルンベルグのアルトドルフ大学で法律の学位を得る(1667)。教授になるよう望まれるが辞退し、ヨーロッパを遍歴、マインツ選帝候の外交官となる(1666)。ルイ XIV 世に会見のためパリを訪問するが会えないまま3年を過ごす。その際ホイヘンスに数学と物理学を学ぶ。マインツ選帝候の死後(1673)、ロンドンに滞在し、ニュートンとバローの研究に接する。1676年以降ハノーヴァーのブラウンシュヴァイク家の図書館長。1700年ベルリン選帝候の招きで、ベルリンを訪れた際、ベルリン科学アカデミーを創設し、初代総裁となる。

微積分学の発見。数学記号の整備。「モナド論」「普遍言語」。

ラグランジュ Joseph-Louis Lagrange, 1736.1.25-1813.4.10.

サルディニア・ピエモン、トリノ(現在イタリア領)に生まれ、パリに死す。トリノ王立砲兵学校数学教授(1755)、オイラーの後任としてフリードリヒ大王に招かれ、ベルリン科学アカデミー数学・物理学主任に(1766-86)。翌年ルイ 16 世の招きで、パリへ(1787)。パリの科学アカデミー会員となる。エコール・ポリテクニク初代校長(1794)。メートル法制定委員長。解析学、整数論、解析力学(力学を解析学の1分野に変える)。群論への萌芽としての置換の研究。

フランス革命を生き残り、化学者ラヴォアジエがギロチンに消えたとき、「この頭を落すには一瞬しか掛からないが、このような頭脳が生まれるのには百年でも足りない。」と言った。

ランベルト Johann Heinrich Lambert, 1728.8.26-1777.9.25.

フランス、アルザス、ミュールハウゼンに生まれ、プロシャ、ベルリンに死す。哲学・物理学・数学・天文学者。光度計・熱度計・湿度計の発明。画法幾何・非ユークリッド幾何の先駆者。 e, π の無理数性の証明(1766)、素数表を102000まで拡張(1770)。

ルジャンドル Adrian Marie Legendre, 1752.9.18-1833.1.10.

パリに生まれ、パリに死す。パリのコレージュ・マザランで学ぶ。ダランベールの推薦でパリの陸軍士官学校で教える(1775-1780)。科学アカデミー(会員1783-1793)。エコール・ポリテクニク教授(1816-)。経度調査局員(1818-33)。『整数論』、『楕円関数論』はよく読まれた。フェルマー予想の部分的解決。40年以上平行線の公準を証明しようとした。

参考文献

- [1] 蟹江幸博 『美杉セミナーについて - 特に'94と'95のまとめ - 』 「数学を楽しむ高校生のためのセミナー」(94年度、95年度)のまとめ, 三重県高等学校数学教育研究会(1996), 8-33.

- [2] 蟹江幸博 『複素数を巡って (美杉セミナー'95)』 '96 年度数学研究会誌 40 号、三重県高等数学教育研究会 (1996),2-55.
- [3] 蟹江幸博 『初等・中等教育に数学を取り戻す』 '97 年度数学研究会誌 41 号、三重県高等数学教育研究会 (1997),2-37.
- [4] 蟹江幸博 『ニュートン以前 -美杉セミナー'96-』 第 6 回 ('96 年度) 「数学を楽しむ高校生のためのセミナー」 三重県高等学校数学教育研究会 (1997),16-49.
- [5] 蟹江幸博 『数学教育にできることは』 '98 年度数学研究会誌 41 号、三重県高等数学教育研究会 (1998).
- [6] E. ハイラー、G. ワナー 『解析教程 上下』 (蟹江幸博訳) シュプリンガー・フェアラーク東京 (1997 年)、Analysis by Its History, Springer Verlag(1996), by E.Hairer & G.Wanner.
- [7] ユークリッド 『ユークリッド原論』 (中村幸四郎他訳、共立出版)。 EYKΛEΙΔOY : ΣTOIXEIA . 多くの翻訳と版がある。印刷された最初の数学の本 (ヴェニス、1482), 現在の定本は J.L. ハイベルグによるもの (1883-1888)。注釈付きの英訳がトーマス・L・ヒースにより 1908 年と 1925 年に出版され、1956 年に Dover 出版社から 3 巻本で再版されている。