複素数を巡って
-美杉セミナー'95-

蟹江　幸博
三重大学教育学部

はじめに

複素数に関連した話をという三重県高校数学研究会の会長である中条先生からの要請で、２題の話を考えてみました。

高校生向けの美杉セミナーでの話は、対象がどうしても高校１、２年生ということで、微積分を原則として使えませんので、複素数を使った解析幾何の話をすることにしました。お引き受けした当座は、もう少し翔んだ話にしようかと思っていました。つまり、リーマンの写像定理の具体例として扇形や色々な多角形を単位円に等角に写したり、モジュラー群の基本領域で出来る球面の上の模様を見せたりすれば、人工的でない綺麗な図がたくさん出てきて喜んでもらえるだろうかと思い、少しは準備もしたのです。

しかし、やはり２時間しかない講演で、複素数の導入から始めなければならないとあっては、そのような構想は現実的ではないと思い、あきらめました。

その代わり、初等幾何の部分だけでもすべてを納得の行くように解説したいと思って準備しましたが、なかなかまとまる迄にならないうちにセミナーの日が来てしまいました。準備した原稿が物足りないと思っていたのですが、実際にはそのとき準備したものの半分ほどしか話せませんでした。

第１節はその時のレジュメの気になった所を更に敷衍したものですので、これを改めて高校生に話すとすれば、４倍ほどの時間はかかるかもしれません。三重大学の数学教育の大学院生に、証明も付け、関連事項も説明しながら講義してみましたが、その倍ほどの時間が掛かっ

てしまいました。適当に演習問題を付け加えて１年のコースに組むとか、幾つかの証明を演習問題に逃げれば、逃げ方によって、２時間２コマから８コマくらいの連続講演には出来ると思いますが、１コマというのはやはり時間が足らなさそうです。

第２節は、高校の先生を対象とする、県の総合教育センターでの２時間弱の講演のためのレジュメに補筆したものです。最初は丁寧に話していましたが、段々と話しているうちにリズム感が出て、準備したものは大体話すことが出来ました。レジュメを配布してあったこともあって、適当な省略はしましたが、聴いてくださった先生方には、数学のシャワーを浴びたという感じではなかったでしょうか？シャワーの水温が多少高かったかも知れませんが。年に一度くらい、数学に接したという感じを持っていただけたらそれで良いのではないかと思います。

講演をお引き受けした春には、実は何のお話をしたら良いのかまるで分かりませんでした。センターからのご依頼の電話をお聞きしていて、講演すべき趣旨が一向に分からず、冗談ではなく、「数学の話をしても良いのですか？」と聞き返したくらいです。数学の話でなければ断るというつもりはなかったのですが、数学教育の話をする場合ならもう少し内容についての注文を付けてもらわないと却って困るなと、感じて質問をしたのです。

そのときの質問のご返事は、実は僕にはよく分からないものでした。数学の話をしても良いのか、悪いのか、分からないままお引き受けしてしまいました。センターの方でもあまりはっきりしていないようなニュアンスが感じられ、問い詰めるようなことになっても僕を推薦してくださった方に悪いような気がしてしまって、お引き受けしたのです。

次回の電話までにははっきりするだろうと思いましたが、やはり心配で、推薦して下さった高校の先生に連絡をしてみました。これもまた要領を得ない返事で、適当にやってくれれば良い、というものでした。「適当」に、とは、「どのようにも」ということではない筈ですが、下駄を預けられた当方は「途方に暮れる」、ということになってしまいました。

「時が解決してくれる」と、問題を放り出して置きました。何処かで誰かが決めてくれればそれでもいいし、そうでなければ僕が何かで覚悟すれば良いだけのことだと思うことにしました。

その後も、センターの方や高校の先生方と話す機会のあったときに

訊ねてみましたが結局要領を得ず、引き受けてしまった以上、自分で決めるほかないようでした。察するところ、本当に「適当に」することが望まれていたような気がします。

題材を決めたきっかけは二つで、一つはもちろん中条先生の「複素数」に関係してという美杉セミナーへの注文ですが、もう一つは僕の専門にも関係があります。

僕は大学時代から色々な分野に興味があるのですが、トポロジストと呼ばれるほどにはトポロジーを知らず、表現論屋と呼ばれるほどにはリー群を知らず、力学系屋と呼ばれるほどには古典力学を知らず、数理物理学者と言われるほどには素粒子論を知りません。体についても、実数以外の体には、感性を持っていないと言った方が良いくらいです。

弦模型と言われる素粒子論の理論の数学的定式化の一つに共形場理論というものがありますが、それにかかわりをもつ数学が近ごろの僕のテーマです。

理論に対称性があればあるほど、理論は詳細に規定され美しいものが得られます。そのため共形場理論を記述する体は、複素数体になります。しかし、共形場理論も複素射影直線（実数体上では射影平面と同じもの）上で展開する限りそんなに複素数に関する感性は必要ありません。そのため、理論がジーナス（示性数）の高い複素直線（実数体上では向きのある曲面）の上に移行した行ったときに取り残されてしまいました。

１９９５年７月に関係した研究集会があり、そこで、若い研究者の養成のためのコースに紛れ込んで、リーマン面のモジュライの話を聞きました。関数論ではリーマン面と言うものが代数幾何では（複素）直線と言うのです。モジュライとはその同型類の空間のことで、元々はリーマン面の変形の理論を記述する場として用意されたものですが、穴開き空間の共形場理論はこの上で展開されるということになります。

今更ということもありますが、それなりに面白いのです。重要なものだから、モジュライに関する専門家の書いた本は何冊かあるのですが、素人が、というかユーザーの立場で書いた本も面白いかもしれないと言う話になって、具体的で実用的な本を書いたらどうだと、冗談交じりにけしかける人がいました。

「歳を取ると、きっかけがないと働かない」と、少しその気になってみることにしました。けしかけた人は忘れているかもしれません。

ま、そのため迂遠な話ではありますが、楕円関数を勉強しているう

ちに、ごく初歩の部分なら高校の数学を知っていれば理解できるように話せるのではないと思うようになりました。三角関数の見直しという視点で押し通して、もっとも簡単な楕円関数であるレムニスケート・サイン関数の話をしてみることにしました。

実際に分かるものになるかどうか、高校の先生方に実験台になって頂くことにしようと思ったら、とても気が楽になって、内容について思い悩むことはなくなりました。

さて、実験の結果はどうだったのでしょうか？

目 次

1　複素数と幾何 (美杉セミナー'95 のレジュメ)

複素数の重要性も理論の美しさも、代数閉体であるという代数的な部分ばかりでなく、正則性を支える解析の部分がそれ以上に強調されるべきなのだが、高校１、２年を対象とする講演では微積分を使うことはできない。せめて初等幾何で、複素数での記述の簡潔さや美しさを鑑賞してもらいたい。

1.1　いろいろな数

数といってもいろいろあって、複素数というのはまことに程良い位置にある。四則演算がそれなりに可能な「数の体系」を挙げて、程の良さを味わって貰うことにする。

数の世界の深さと広がりの一端だけでも味わってほしかっただけだが、この 1.1 小節はすこぶるペダンティックになってしまった。それも遊び。

体とか、環とか、群とか、半群とかいう言葉は、どんな演算がありどんな性質を満たすかということを表している[1] 。

$\mathcal{N}$: 自然数の全体（加法についても、乗法についても半群）

$\mathcal{Z}$: 整数環（整数の全体；加法については群、乗法については半群）

$\mathcal{Q}$: 有理数体（整数比の分数の全体）

$\mathcal{R}$: 実数体（数直線の点に対応）可換連続な順序位相体

$\mathcal{C}$: 複素数体（平面の点に対応）可換連続な位相体

$\mathcal{H}$: 四元数体（４次元の空間の点に対応）非可換連続な位相体

注意ここで「連続」というのは、数学的にきちんと言うなら、「離散でなく、局所コンパクトでハウスドルフなもの」ということだが、厳密な定義は大学で数学を勉強する時に。

ここでは、複素数 $\mathcal{C}$ が特別なものでないことが分かればいい。と言って、このような数の体系が幾らでもあるというものでもない。ポント

[1] 大学でこれらの言葉を習う人は沢山いないかもしれないが、それでもこれはあったほうがいい教養。もちろんなくても生きるのには何の支障もない。

リャーギンの「連続群論」[20] には、『連続で、連結な位相体は、$\mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{H}$ 以外にはない』という定理が証明されている。

この短い話の中では、複素数 $\mathcal{C}$ は集合としては平面 $\mathcal{R}^2$ と同じものであり、複素数の演算、操作、関数などにより、平面の図形がどのように写され、変形されるかを見てみることにしよう。

1.2 複素数の定義

実数 $\mathcal{R}$ は分かっているものとして、複素数 $\mathcal{C}$ の形式的な定義から始めよう。

複素数 $z \in \mathcal{C}$ とは、二つの実数 $x, y \in \mathcal{R}$ に対して、

$$z = x + iy$$

と書かれるもののことで、$i = \sqrt{-1}$ は 虚数単位 と呼ばれるあるシンボルと考えておく。$i^2 = -1$ を満たす実数はないのだから、ともかく i は実数ではない。

二つの複素数 $z_1 = x_1 + iy_1$ と $z_2 = x_2 + iy_2$ が等しいとは、$x_1 = x_2$ かつ $y_1 = y_2$ の時と定める。

だから、複素数 $z = x + iy$ は、平面 $\mathcal{R}^2$ の点 (x, y) と同一視することが出来、平面の点に四則演算を定義したものとして、複素数を考えることが出来る。何故そんなことを考えなければならないのかという疑問に対しては、今はまだ、虚数単位 i は実数ではないからとだけ答えておこう。

実数 $\mathcal{R}$ は、$\mathcal{R} + i0$ として、複素数 $\mathcal{C}$ の一部だと考えることが出来るが、これは実数直線 $\mathcal{R}$ を平面 $\mathcal{R}^2$ の中では x 軸と考えていることにあたる。

演算を以下のように定義した後では、平面 $\mathcal{R}^2$ は複素平面 $\mathcal{C}$ と呼ぶことになるが、そのとき、x 軸は 実軸、y 軸は 虚軸 という。虚軸上の数を 純虚数 と言う。

二つの複素数 $z_1 = x_1 + iy_1$ と $z_2 = x_2 + iy_2$ に対して、

加法： $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

減法： $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

乗法： $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

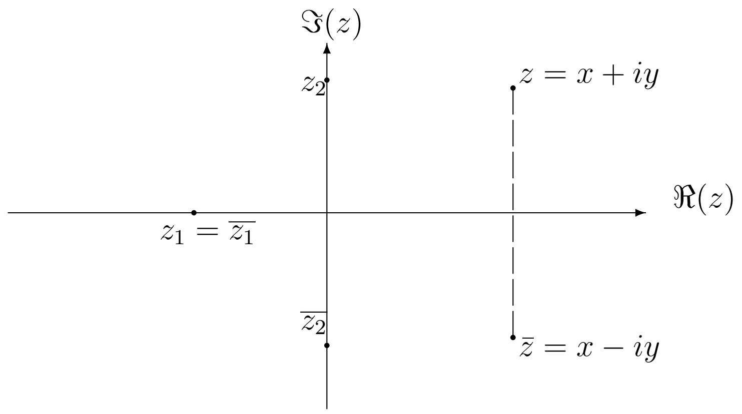
除法： $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$

(ただし、$z_2 \neq 0$ つまり $x_2^2 + y_2^2 \neq 0$)

と定めれば、$0, 1$ をそれぞれ加法、乗法の単位元として、体の公理を満たすことが分かる。つまりそれぞれの、結合法則、交換法則、単位元の存在、逆元の存在、そして分配法則を満たすのである。

複素数 $z = x + iy$ に対して、 x を z の 実部、y を z の 虚部 と言い、$x = \Re(z), y = \Im(z)$ と書く。このとき、 $\Im(z) = 0$ である複素数 z が実数であり、$\Re(z) = 0$ である z が純虚数である。

$\bar{z} = x - iy$ を $z = x + iy$ の 共役 複素数と言う。これを使えば、 z が実数であることは $\bar{z} = z$ 、純虚数であることは $\bar{z} = -z$ で与えられることになる。



更に、実部と虚部は共役複素数を用いて

$$\Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

と表すことが出来る。また、

$$\bar{\bar{z}} = z, \ \ \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \ \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2, \ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \ (z_2 \neq 0)$$

であることもすぐに分かる。

$z\bar{z}$ を考えると、 $\overline{z\bar{z}} = \bar{z}\bar{\bar{z}} = \bar{z}z = z\bar{z}$ だから、実数である。実部 x と虚部 y を使って計算すると $z\bar{z} = x^2 + y^2$ となり、$z \neq 0$ である限り、正の実数になる。この平方根は、原点 0 と点 z との距離を表して

おり、 $|z|$ と書き、z の絶対値と呼ぶ。つまり、

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

である。覚えにくい割り算の定義式も、共役複素数を使ってみれば

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z_2}}{z_2\bar{z_2}} = \frac{z_1\bar{z_2}}{|z_2|^2}$$

となって、分かり易いものになる。

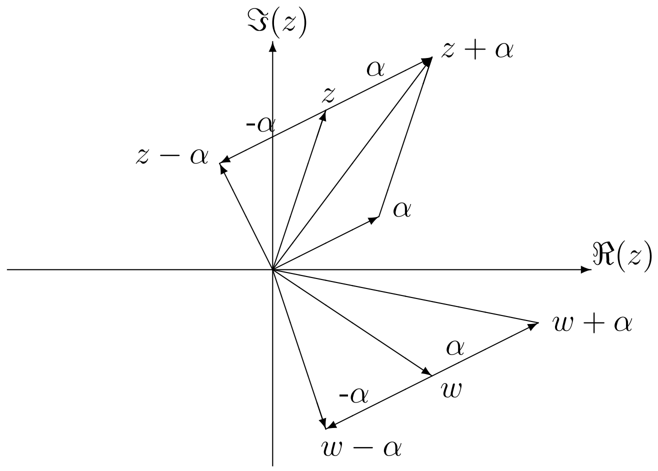
1.3 平面の変換と複素数の演算

複素数の加減法はベクトルの平行移動にあたっている。

ベクトル $\vec{OA} = (a, b)$ に対する平行移動は、$\alpha = a + ib \ (a, b \in \mathcal{R})$ を加えることで実現される。

$$\begin{array}{ccc}
\vec{OP} = (x, y) & \longrightarrow & \vec{OP} \pm \vec{OA} = (x \pm a, y \pm b) \\
\updownarrow & & \updownarrow \\
z = x + iy & \longrightarrow & z \pm \alpha = (x + a) \pm i(y + b)
\end{array}$$

これを図に描いてみれば、



のようになる。

また、z をその絶対値 $|z|$ で割れば、つまり、$\dfrac{z}{|z|}$ の絶対値は 1 となり、単位円周

$$S^1 = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1\} = \{z; |z| = 1\}$$

上の点となる。円周 S^1 の点は、x 軸 (実軸) からの角 θ によって指定され、この時実部 x と虚部 y は

$$x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta$$

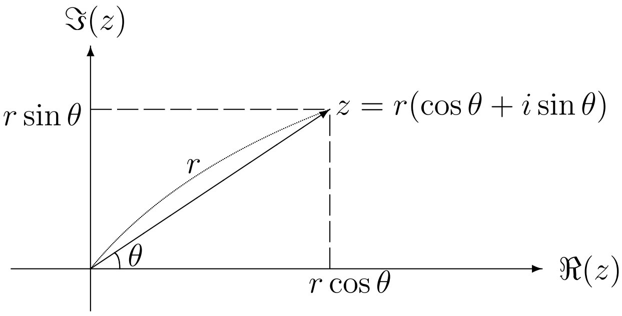
と表現される。θ は、$1 = (1, 0)$ から $z = (x, y)$ までの、円周 S^1 上の弧の長さとして表しておくのが都合が良い。角度の単位にラジアンを用いるのである[2]。

また θ は、2π の整数倍を除いて定まるが、通常は $[0, 2\pi)$ か、$[-\pi, \pi)$ かのどちらかにとることが多い。もちろん議論していく際必要があればどんなに大きな値でも構わないが、いつでも 2π の整数倍ずらして考えていても良い。また、θ は複素数 z の <u>偏角</u>(argument) と呼ばれ、$\theta = \arg z$ と表す。

こうすれば、複素数 z はその絶対値 $r = |z|$ と偏角 $\theta = \arg z$ を用いて、

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

と表される。これを複素数 z の <u>極形式</u>と言う (平面の点 (x, y) の極座標表示 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ に対応するもの)。



[2] この講の中では微積分の話をしないが、知っている人のために、言っておくことにすると、ラジアンを単位にすると $\sin x$ の微分が $\cos x$ になるが、度数法で量ると $\sin x$ の微分は $\dfrac{2\pi}{360}\cos x$ になるから、不便だというのである。

さて、極形式を使えば、複素数の積と商に簡明な意味がつく。極形式で、 $z_j = r_j(\cos\theta_j + i\sin\theta_j)\quad (j=1,2)$ とおけば、

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)) \\ &= r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)) \end{aligned}$$

となる。つまり、複素数の積は絶対値は積、偏角は和になるのである。同様に、商も

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2))$$

となり、商は絶対値の商、偏角の差となるのである。

z を掛けることは、偏角 $\theta = \arg z$ の回転をし、絶対値 $r = |z|$ の倍率の（全方向への）拡大縮小をすることになる。

また、共役複素数をとるという操作は、実軸に関する折り返し（鏡映）であり、極形式で表せば、

$$\bar{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$$

となり、偏角の符号を変えるという操作になる。

こうして、加減乗除と共役をとるという操作によって、平面の合同変換はすべて実現されることになる。平面の合同変換と全方向への拡大縮小ができるが出来るということは、つまり平面の相似変換は複素数の操作で出来るということである。

相似変換以外の変形を与える複素変数の関数（複素数値の）を考えたいのだが、その前に、２次元のベクトルで出来ることが複素数で出来るのかを見ておこう。

<u>内積</u>については、$(z_1, z_2) = \overline{z_1} z_2$ とおけば、ベクトル $\overrightarrow{OP_j}\ \ (j=1,2)$ の二つの積が、実部と虚部に現れる (ここに、点 P_j は複素数 z_j が表す平面の点)。つまり、

$$(z_1, z_2) = (x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_1y_2 - x_2y_1) = r_1r_2(\cos(\theta_2-\theta_1) + i\sin(\theta_2-\theta_1))$$

となり、実部はベクトル $\overrightarrow{OP_1}$ と $\overrightarrow{OP_2}$ の普通の内積 (各ベクトルの長さとそのなす角の余弦の積) であり、虚部はベクトル $\overrightarrow{OP_1}$ と $\overrightarrow{OP_2}$ の作る平行四辺形の（符号付きの）面積である。

平面 $\mathcal{R}^2$ をベクトルの空間と見たときの一般的な写像は、２行２列の行列を掛けることで得られる１次変換であるが、これには平行移動は含まれないものの、回転、折り返し、拡大縮小は含まれている。

更に、この拡大縮小は、２つの方向に対して別々の率で行うことが出来、その倍率も 0 であることを許している。その時、平面はある直線につぶれもするし、１点（原点）につぶれもする。もっとも、１点につぶれるのは、複素数でも 0 を掛けることに当たっている。

この２つの方向に対する別々の率での拡大縮小は、実は複素数の世界には馴染まない。

複素数の世界には等角性という見事な秩序がある。その秩序に従いながらも豊かで多様な現象を見ることが出来る。

色々な平面図形を複素数で表わすことを考えよう。「複素数で」ということは、「実部虚部に戻らないで」ということ、つまり直接に複素数の複素数としての演算や性質だけを用いて表すというつもりである。一言でいうなら $z = x + iy$ の言葉で書き、 x, y は使わずに済ますということである。

x, y を使った式で表すのが解析幾何であった。この節は、複素数を使って解析幾何を書き直してみようということである。幾何のままやるのが易しいことも、解析幾何が易しいこともあるけれど、複素数を使っての幾何が易しいこともあって、それはそれで面白いこともあるというのがテーマである。

1.4　直線を複素数で表す

まず、原点 0 を始点とするベクトルとして α と β が

平行 $\alpha \parallel \beta \Longleftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} \in \mathcal{R} \Longleftrightarrow \alpha\bar{\beta} = \bar{\alpha}\beta$

垂直 $\alpha \perp \beta \Longleftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} \in i\mathcal{R} \Longleftrightarrow \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta = 0$

「平行」は、原点と β を結ぶ直線は、実数 t をパラメータとして、$z = t\beta$ と書けるということを直接表しており、t が実数であることを表す式 $t = \bar{t}$ を利用して、t を消去すれば得られる。

「垂直」も同様で、原点を通り β に垂直な直線は、実数 t をパラメータとして、$z = it\beta$ と書けるということであり、it が純虚数であることを表す式 $it + \overline{it} = 0$ を利用すれば良い。

始点を原点 0 から一般の点 γ にするのは、座標変換をするだけのことで、すべての変数を $-\gamma$ すれば良いから、

$$
\begin{aligned}
&\text{線分 } \alpha\gamma \text{ と } \beta\gamma \text{ が平行} \Longleftrightarrow (\alpha-\gamma) \parallel (\beta-\gamma) \\
&\quad \Longleftrightarrow (\alpha-\gamma)(\bar{\beta}-\bar{\gamma}) = (\bar{\alpha}-\bar{\gamma})(\beta-\gamma)
\end{aligned}
$$

これは α, β, γ が共線（一直線上にある）ということ。

$$
\begin{aligned}
&\text{線分 } \alpha\gamma \text{ と } \beta\gamma \text{ が垂直} \Longleftrightarrow (\alpha-\gamma) \perp (\beta-\gamma) \\
&\quad \Longleftrightarrow (\alpha-\gamma)(\bar{\beta}-\bar{\gamma}) + (\bar{\alpha}-\bar{\gamma})(\beta-\gamma) = 0 \\
&\quad \Longleftrightarrow |\alpha-\beta|^2 = |\beta-\gamma|^2 + |\alpha-\gamma|^2
\end{aligned}
$$

これは α, β, γ が直角三角形をなすということ。

となる[3]。

これらのことを使えば、パラメータ表示された直線は、複素数の言葉で方程式として表されることになる。

色々な方法で与えられた直線の方程式を挙げてみることにしよう。始めの 2 つは、x, y 平面上の直線としての一般形と Hesse の標準系に対応する方程式としてあげてあるが、他のものは、幾何的な意味を素直に複素数で表現したものになっている。 x, y 平面上の直線として表すことは、簡単な演習問題である。

1. 一般形 $(ax+by+c=0,\ a,b,c \in \mathcal{R})$

   $\alpha = a+ib \in \mathcal{C}$ と置くとき

   $\alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + 2c = 0 \Longleftrightarrow \Re(\alpha\bar{z}) = c$

2. Hesse の標準形 ($x\cos\theta + y\sin\theta = p$; 原点からその直線へおろした垂線の長さが $p > 0$ で傾きの角度が θ)

   $\pi = p(\cos\theta + i\sin\theta) = pe^{i\theta}$ はこの垂線の足であり、

[3] これはピタゴラスの定理の別証明になっているわけではない。$|\alpha|$ が原点と点 α との距離であること、ひいては $|\alpha-\beta|$ が線分 $\alpha\beta$ の長さであるとする定義そのものの中に、ピタゴラスの定理が既に潜んでいるのである。つまり、ピタゴラスの定理が成り立つ世界に最初からいるのである。

$$\begin{aligned} e^{-i\theta}z + e^{i\theta}\bar{z} &= 2p \\ \bar{\pi}z + \pi\bar{z} &= 2|\pi|^2 \end{aligned}$$

一般形 $\alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + 2c = 0$ との対応を考えれば、
$\pi = -\frac{c}{\bar{\alpha}},\ p = \frac{|c|}{|\alpha|},\ e^{i\theta} = -\frac{c\alpha}{|c\alpha|}$
となり、垂線の足 π が一般形の係数からこんなも簡単な式で書き下せる。もちろん、 $\pi = -\dfrac{c}{\bar{\alpha}} = -\dfrac{c\alpha}{|\alpha|^2}$ と書いてみれば、実数での計算と全く同じことであるのだが。

$$\pi = -\frac{ca}{a^2+b^2} - i\frac{cb}{a^2+b^2}, \qquad p = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\tan\theta = \frac{\Im e^{i\theta}}{\Re e^{i\theta}} = \frac{-i(c\alpha - c\bar{\alpha})}{c\alpha + c\bar{\alpha}} \;=\; \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{\alpha + \bar{\alpha}} = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a}$$

3. 原点と点 $\alpha \neq 0$ を通る直線　$\alpha\bar{z} = \bar{\alpha}z$

4. ２点 $\alpha \neq \beta$ を通る直線

$$\begin{aligned} (z-\alpha) \parallel (z-\beta) & \qquad \text{平行 } (z, \alpha\beta\text{が共線}) \\ (\alpha-\beta)(\bar{z}-\bar{\beta}) &= (\bar{\alpha}-\bar{\beta})(z-\beta) \\ (\beta-\alpha)\bar{z} - (\bar{\beta}-\bar{\alpha})z &= \beta\bar{\alpha} - \alpha\bar{\beta} \end{aligned}$$

5. ２点 $\alpha(\neq 0)$ と 0 との垂直２等分線

$$\begin{aligned} |z-\alpha| &= |z| \\ \frac{z}{\alpha} + \frac{\bar{z}}{\bar{\alpha}} &= 1 \\ \alpha = 2pe^{i\theta}\text{とおけば、このまま} & \qquad Hesse\text{ の標準形} \\ \frac{z}{2pe^{i\theta}} + \frac{\bar{z}}{2pe^{-i\theta}} &= 1 \end{aligned}$$

6. 2点 α と β $(\alpha \neq \beta)$ との垂直2等分線

$$\begin{aligned} |z-\alpha| &= |z-\beta| \\ (\beta-\alpha)\bar{z}+(\bar{\beta}-\bar{\alpha})z &= \beta\bar{\beta}-\alpha\bar{\alpha} \end{aligned}$$

7. $\angle\alpha 0\beta$ の2等分線

$$\begin{aligned} 0\text{ と }\frac{\alpha}{|\alpha|}+\frac{\beta}{|\beta|}\text{を結ぶ直線} &\Leftrightarrow 0\text{ と}\alpha|\beta|+\beta|\alpha|\text{ を結ぶ直線} \\ (\bar{\alpha}|\beta|+\bar{\beta}|\alpha|)z &= (\alpha|\beta|+\beta|\alpha|)\bar{z} \end{aligned}$$

とくに、$|\alpha|=|\beta|$ の時は、0 と $\alpha+\beta$ を結ぶ直線ということになり、方程式は

$$(\bar{\alpha}+\bar{\beta})z=(\alpha+\beta)\bar{z}$$

である。

1.5 オイラーの公式、角を複素数で表すために

オイラーの名で呼ばれる公式は幾つかあるが、複素数の導入の何処かで必ず触れればならず、といって、それには何かしらの予備知識が必要となるため、誰もが述べ方に苦慮するのが、

オイラーの公式 I $$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

である[4] 。$\theta=\pi$ での値だけを見れば、

オイラーの公式 II $$e^{i\pi}+1=0$$

となる。こちらの方が、特別な数 $e,\pi,1$ が虚数 i を使うことによって結び付いている、という言い方によって、有名かもしれない。

しかし、この特別な値でだけの式を、それだけで説明するということは出来ない。$e^{i\pi}$ の値をどのように与えるかという問題がある。

複素変数 z の複素数値の指数関数 e^z があって、その $z=i\pi$ での値と思うことも出来るし、純虚数 $i\theta$ を変数とする指数函数 $e^{i\theta}$ の $\theta=\pi$ での値と思うことも出来るし、単独に $e^{i\pi}$ での値を定義しても良い。

[4] 前節 1.4 の Hesse の標準形のところでスペースの節約のためにこの公式を既に使っている。

定義しても良いのだが、その手間は本質的には何も変わらない。つまり、単独に $e^{i\pi}$ での値を定義するとして、それを単に -1 と置くだけなら、そこには何の神秘もない。実変数の関数として非常に重要な指数函数 e^x が複素領域に 自然に 拡張され、その特殊な値として特別な数が関係しあう所に神秘が感じられるのである。

だから、オイラーの公式はスローガンとしての公式 II、数学的実質としての公式 I と考えておけばよいだろう。

オイラーの公式の理解の仕方は色々あるだろうけれど、複素数 z に対してその偏角 $\theta = \arg z$ を z の関数として直接的に表すための手段だという観点がある。

角を複素数で表すといっても、偏角は極形式を通して複素数と結び付いているのだから、特別なことが出来るわけではない。

複素数 z の極形式で何が言えるか、考えてみよう。偏角 θ は、原点 0 から点 z を見込む方向を実軸の正の方向から測った角であった。

極形式を使うと便利なことは何だっただろう。極形式で、$z_j = r_j(\cos\theta_j + i\sin\theta_j) \quad (j = 1, 2)$ とおけば、

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)) \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)) \end{aligned}$$

であった。角のことだけ考えたいので、絶対値 $|z|$ は 1 で考えることにし、さらに $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ とおけば、$z = \cos\theta + i\sin\theta$ に対し、

$$z^2 = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

となる。さらには、数学的帰納法により、すべての自然数 n に対して、

$$z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad \text{(ドモアヴルの公式)}$$

になることが分かる。$n = 0$ のときは $z^0 = 1 = \cos 0 + i\sin 0$ であり、負巾に対しても、

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \cos(0 - n\theta) + i\sin(0 - n\theta) = \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)$$

であり、すべての整数 n, m に対して

$$z^m z^n = \cos(m+n)\theta + i\sin(m+n)\theta$$

であることが分かる。

何とか複素変数 z の指数関数 e^z を持ち出さずにオイラーの公式 I を納得してもらおうと、公式 I の右辺が θ の指数関数であることの風景を色んな角度から眺めてみようとしたのだが、結局は積の公式そのものより説得力が増すわけではないようだ。積の公式だけからやり直そう。

恒等的に 0 でない実関数 $y = f(x)$ が連続で、指数法則 $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$ を満たせば、$f(x) = a^x,\ (a = f(1))$ であった。また、x が実数なら、a が複素数でも指数関数 a^x を考えるのは難しいことではない。

そこで、$f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ を実変数 θ の関数と考え、さらに実関数ではないものの、実関数が二つならんでいるだけだから「同じことだ」と思うことにすれば、積の公式は $f(\theta_1)f(\theta_2) = f(\theta_1 + \theta_2)$ を意味しており、

$$f(\theta) = f(1)^\theta = (\cos 1 + i\sin 1)^\theta$$

となると思って良いだろう[5] 。

まだオイラーの公式にならない。$\cos 1 + i\sin 1 = e^i$ となってくれる必要がある。

ここで少しだけ、微分の知識を使わせてもらうことにしよう。三角関数と指数関数の微分公式

$$\begin{array}{rl} (e^x)' = e^x & \quad (a^x)' = a^x \log a \quad (a \neq 0) \\ (\sin x)' = \cos x & \quad (\cos x)' = -\sin x \end{array}$$

だけを使わせてもらう。$f(\theta) = a^\theta$ として $a = f(1)$ を求めることにすれば、θ で微分して、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}a^\theta = f'(\theta) &= (\cos\theta)' + i(\sin\theta)' \\ &= -\sin\theta + i\cos\theta \\ &= i(\cos\theta + i\sin\theta) = if(\theta) = ia^\theta \end{aligned}$$

が得られる。それゆえ、上の２つ目の微分公式から

$$i = \log a = \log(\cos 1 + i\sin 1)$$

が得られる。従って、

$$e^i = a = \cos 1 + i\sin 1$$

[5] 証明するには大学以降の数学が必要で、ここでは納得して貰うことだけを考えている。

となる。

実関数での議論がどれほど複素関数でも通用するかは慎重にならなくてはいけないが、こういう形式的な部分はできる限り同様になっている[6]。

対数微分を知っていれば、そしてそれに抵抗がなければ次のようにしても良い。

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta}\log f(\theta) &= \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = i \\ \log f(\theta) &= i\theta + C\end{aligned}$$

$\theta = 0$ での値を比較して、$C = 0$ が分かり、

$$\begin{aligned}\log f(\theta) &= i\theta \\ f(\theta) &= e^{i\theta}\end{aligned}$$

となるのである。

オイラーの公式を使えば、極形式を使った計算が簡単に出来る。どうしても納得しないという人は、$\sin\theta, \cos\theta$ を使ってやっても構わないし、それでも同じ結論が得られる。一つ一つの式が長くなるだけのことである。便利だから使う。それだけで良いことです。

さて、オイラーの公式を使えば、偏角 θ は z の関数として書けてしまう。$z = |z|e^{i\theta}$ なのだから

$$\theta = \frac{1}{i}\log\frac{z}{|z|}$$

である。偏角は、定義から、z だけで値は確定していたのではなかった。つまり、2π の整数倍を除いてしか決まらなかったのだった。そう、複素関数としての対数 $\log z$ は１価の関数ではなく、多価の関数になるのである[7]。

[6] なっているように定義するのだし、それでもならないときは、ならないことを調べることに意義が出てくる、ということで納得してもらうことにしよう。

[7] 関数は本来１価のもので、多価のものは関数ではないのではないかと思うのは正しいのだが、自然がこうなっているものは仕方がない。しかし、やはり多価であるのは気持ちが悪く、１価であると考えたいとすることで、（独立変）数の棲む場として空間概念を広げることが、リーマンが 多様体 を発明する動機であった。

多価関数がいやなら、初等幾何に応用する範囲では、

$$\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$$

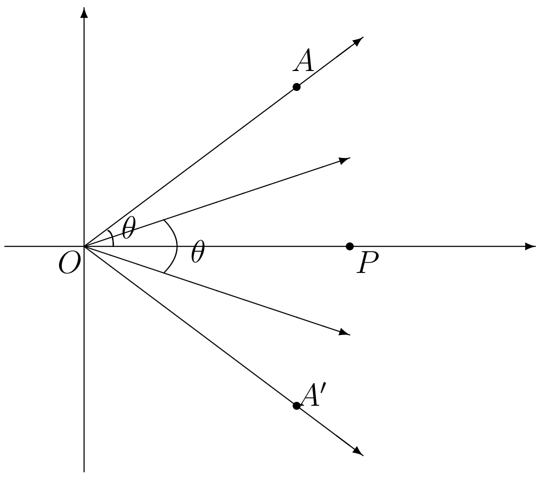
となる θ が偏角だと思っていれば良い。

1.6 角の等分線

複素数 $\alpha = re^{i\theta}$ の偏角 θ は、$0, 1, \alpha$ の表す点をそれぞれ O, P, A と書けば、$\angle POA$ のことである。O から A 方向への半直線は $te^{i\theta}$ $(t \geq 0)$ と表される。同様に偏角 2θ の点のなす半直線は $te^{2i\theta}$ $(t \geq 0)$ と表され、偏角 $\phi = \dfrac{\theta}{2}$ の点のなす半直線は $te^{i\phi}$ $(t \geq 0)$ と表されることになる。後者は $\angle POA$ の 2 等分線だから、このパラメータ表示は方程式 $(\bar{\alpha} + |\alpha|)z = (\alpha + |\alpha|)\bar{z}$ と一致する筈である。

確かめてみよう。角のことだから、$|\alpha| = 1$ としておく。$\gamma = e^{i\phi}$ とおけば、$\alpha = \gamma^2$ であり、パラメータ表示は $z = t\gamma$ である。方程式 $(\bar{\alpha} + 1)z = (\alpha + 1)\bar{z}$ の方は、原点と $\alpha + 1$ を結ぶ直線で、これは菱形の対角線だから、頂角を 2 等分している筈である。

パラメータ表示 $z = t\gamma$ から t を消去すれば、 $z = \alpha\bar{z}$ となる。A を実軸に関して折り返した点を $A'(\bar{\alpha})$ とすれば、 $\bar{z}$ は $\angle POA'$ の 2 等分線上にあり、その二つの 2 等分線のなす角が元の角 $\theta = \angle POA$ になるということを表している。



そして、 $(\bar{\alpha} + 1)z = (\alpha + 1)\bar{z}$ と $z = \alpha\bar{z}$ が同じ式であることは、$\bar{\alpha} = \alpha^{-1}$ (なぜなら $\alpha\bar{\alpha} = 1$) を使えばすぐに分かることである。

また、$|\alpha| \neq 1$ のときは、$\dfrac{\alpha}{|\alpha|}$ を $(\bar{\alpha}+1)z = (\alpha+1)\bar{z}$ に代入すれば、1.4 節で得た公式 $(\bar{\alpha}+|\alpha|)z = (\alpha+|\alpha|)\bar{z}$ が導かれる。

角の辺の一方が x 軸でないときには、一方の辺を x 軸の正の方向に回せば良い。やってみよう。$\angle AOB$ の 2 等分線を考える。α, β を極形式で $\alpha = re^{i\theta_1}, \beta = se^{i\theta_2}$ と表しておく。全体に $\alpha^{-1} = r^{-1}e^{-i\theta_1}$ を掛ければ、A は P に、B は $\beta\alpha^{-1} = sr^{-1}e^{i(\theta_2-\theta_1)}$ になり、z も $z\alpha^{-1}$ となる。これを、$(\bar{\alpha}+|\alpha|)z = (\alpha+|\alpha|)\bar{z}$ に代入すれば、$(\bar{\alpha}|\beta|+\bar{\beta}|\alpha|)z = (\alpha|\beta|+\beta|\alpha|)\bar{z}$ が得られる[8]。

$\angle POA$ の 3 等分線、ひいては n 等分線もパラメータ表示で良いなら、易しい。$z = te^{i\frac{\theta}{n}}$ $(t \geq 0)$ とすればよい。方程式で書いても、$z = \alpha^{\frac{2}{n}}\bar{z}$ と書けはするが、n 乗根をとらないといけない。もっとも、絶対値の部分は無視してよく、偏角を n で割ればいいので同じことなのだが。

1.7 色々な三角形

さて、いよいよ幾何をやってみることにする。

平面の点 $A(x, y)$ は、複素数 $\alpha = x + iy$ で表せば良い。線分 AB は、複素数の組みで $\alpha\beta$ と表せば良いだろう。三角形 ABC は、複素数の 3 つ組みを使って三角形 $\alpha\beta\gamma$ と書いても誤解を産むことはないだろう。

ほかも同様に、点に対応して複素数を並べておけば、幾何の方で分かっている限り間違うことはないだろう。

さて、三角形を扱うのだが、繁雑になるだけなので、頂点の一つは原点 0 にあるとしておく。

必要ならば、座標を平行移動すれば良い。

考えてみれば、この座標変換こそが解析幾何の利点なのであった。初等幾何で簡単に分かる事柄を解析幾何に置き換えると大抵は面倒になるばかりで、御利益がとんと分からない、といった気分を味わった人も多いだろう。

それはその通りなのである。そのかわり、初等幾何で簡単に分からないことが、解析幾何を使えば解決されたり見通しが付いたりすることがある。それが利点である。

[8] このとき当然のことだが、z は角だけ回して $ze^{-i\theta_1}$ として代入しても同じ式が得られる。確かめるのはよい演習問題である。

しかし、残念なことは「そういうことがある」というだけで、いつもそうなるというわけではないということだ。

しかし、問題解決の方法は沢山知っておいて悪いことはない。そして、面白いと感じることの出来ることが一つでもあれば良いのじゃないだろうか。もちろん沢山あればもっと良い。感性のあるなしでも、意味合いが違ってくる。

複素数でやりきるという試みをしたことがなかったからか、僕にはこれがとても新鮮で面白かった。

幾何に戻ろう。

解析幾何は図形の問題を代数的な式の変形で解決しようとするものであった。多くの場合、却って繁雑になるが、座標変換によって、簡単な表式が得られ、計算も容易で、証明の見通しよくなることがある。しかし、うまい座標変換をとってやる必要があって、これは一種、初等幾何での補助線の発見のようなスリルと感動があるものである。

座標変換で、一番簡単なのは平行移動で、それだけでも随分状況が易しくなることがある。

一般に三角形 $\alpha\beta\gamma$ を考えるとき、一つの頂点 γ を原点 0 に移動させると、他の頂点 α, β はそれぞれ $\alpha-\gamma, \beta-\gamma$ に移る。対応する点を ABC と表すとき、例えば辺 $AB = AC$ は元々 $|\alpha-\beta| = |\alpha-\gamma|$ と表されるが、C を原点に置けば $|\alpha-\beta| = |\alpha|$ と表せばよい。$AC = BC$ なら $|\alpha| = |\beta|$ と表せばよい。

名前を知っている三角形のリストと、それを複素数でどのように表すかと挙げておく。

三角形 $0\alpha\beta$ は

二等辺三角形 $\Longleftrightarrow |\alpha| = |\beta|$ または、$|\alpha| = |\alpha-\beta|$ または $|\alpha-\beta| = |\beta|$

正三角形 $\Longleftrightarrow |\alpha| = |\beta| = |\alpha-\beta|$

直角三角形 ($\angle 0$ を直角とする) $\Longleftrightarrow \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta = 0$

直角二等辺三角形 ($\angle 0$ を直角とする) $\Longleftrightarrow \alpha = \pm i\beta \Longleftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 0$

２等辺三角形の等辺はどの対でも良いのだけれど、それで何かを示そうとすれば、表式が簡単な方が良い。例として、

「２等辺三角形の底角は等しい」

ことを示してみよう。

まず等しい辺は $OA = OB$ としよう。必要なら、回転させてもいいし、等辺に挟まれる頂点を原点に移動しても良い。

$|\alpha| = |\beta|$ としたことになった。

両辺を 2 乗して、$\alpha\bar{\alpha} = \beta\bar{\beta}$。その両辺から $\alpha\bar{\beta}$ を引いて $\alpha\bar{\beta}$ で割れば、

$$\begin{aligned}\frac{\alpha-\beta}{\alpha} &= \frac{\bar{\beta}-\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}\\ \arg\frac{\alpha-\beta}{\alpha} &= -\arg\frac{\beta-\alpha}{\beta}\end{aligned}$$

となり、$\angle OBA = \angle OAB$ が示されたことになる。

1.8 色々な四角形

四角形 $0\alpha\gamma\beta$ は

台形 $\iff \alpha \| \gamma - \beta$ または $\beta \| \gamma - \alpha$ $\iff \alpha(\bar{\gamma} - \bar{\beta}) = \bar{\alpha}(\gamma - \beta)$ または $\beta(\bar{\gamma} - \bar{\alpha}) = \bar{\beta}(\gamma - \alpha)$

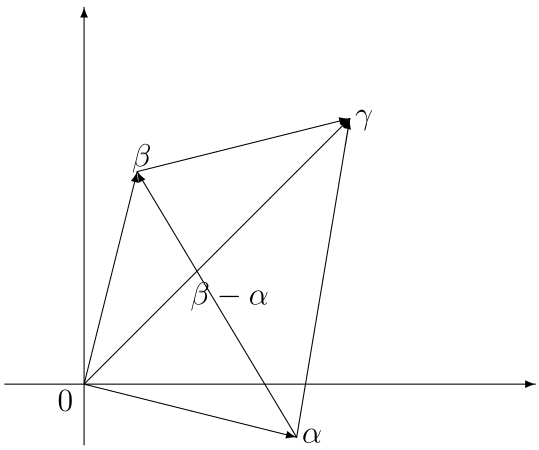
平行四辺形 $\iff$

$$\alpha = \gamma - \beta \iff \gamma = \alpha + \beta \iff |\alpha| = |\gamma - \beta| \text{ かつ } |\gamma - \alpha| = |\beta|$$

菱形 $\iff \gamma = \alpha + \beta$ かつ $|\alpha| = |\beta|$

長方形 $\iff \gamma = \alpha + \beta$ かつ $\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta = 0$

正方形 $\iff \gamma = \alpha + \beta$ かつ $\alpha = \pm i\beta$



四角形では、γ は対角線であり、$\beta-\alpha$ はもう一つの対角線である。

平行四辺形のときは、$\gamma=\alpha+\beta$ であり、$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ は2つの対角線の中点であり、「平行四辺形の対角線は互いに他を2等分する」のである。

菱形の場合は更に、$(\alpha+\beta)(\bar\beta-\bar\alpha)+(\bar\alpha+\bar\beta)(\beta-\alpha)=2\alpha\bar\alpha-2\beta\bar\beta=$ $=2(|\alpha|^2-|\beta|^2)=0$ となるから、対角線は直交することになる。さらに、 0 と $\alpha+\beta$ を結ぶ直線は $\angle\alpha0\beta$ の2等分線だから、「菱形の対角線は頂角を2等分し、もう一つの対角線を垂直2等分する」ことが分かる。

この時 $\triangle 0\alpha\beta$ を考えれば2等辺三角形で、「2等辺三角形の頂角の2等分線は底辺に垂直であり、交点は底辺の中点である」という事実を表している。

1.9　三角形の5心を複素数で表す。

三角形 $\alpha\beta\gamma$ の5心を表してみよう。$\triangle\alpha\beta\gamma$ の

内心 $\dfrac{\alpha|\beta-\gamma|+\beta|\gamma-\alpha|+\gamma|\alpha-\beta|}{|\beta-\gamma|+|\gamma-\alpha|+|\alpha-\beta|}$

外心 $z \iff |z-\alpha|=|z-\beta|=|z-\gamma|$
$$\iff z=\frac{(\alpha-\beta)\gamma\bar\gamma+(\beta-\gamma)\alpha\bar\alpha+(\gamma-\alpha)\beta\bar\beta}{(\alpha-\beta)\bar\gamma+(\beta-\gamma)\bar\alpha+(\gamma-\alpha)\bar\beta}$$

重心 $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$

垂心 (外心を 0 とする座標では) $H=\alpha+\beta+\gamma$

傍心 3つあるが、 $\gamma=0$ として $\angle\alpha0\beta$ の2等分線上にあるものを求めると
$$\frac{\alpha|\beta|+\beta|\alpha|}{|\beta|+|\alpha|-|\alpha-\beta|}$$

内心と傍心を示すためには角の2等分線の方程式を2つ書いて解けば良く、外心のためには2つの辺の垂直2等分線の方程式を解けば良い。定義方程式はそれぞれもう一つずつあるのだが解の形を見れば α,β,γ

に関して対称で、もう1つの方程式の解にもなっていることが分かる。傍心についても同様である。

内心の式でも $\gamma=0$ とすれば、$\dfrac{\alpha|\beta|+\beta|\alpha|}{|\beta|+|\alpha|+|\alpha-\beta|}$ となって、傍心の式とは符号が一つしか違わない[9]。

垂心の証明。外心を 0 にすれば、$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|$ となるから、例えば、$H-\alpha=\beta+\gamma$ は $\beta-\gamma$ に垂直であり、各頂点と H を結ぶ直線は対辺に垂直であることが分かる。

原点がどこにあっても重心の式は変わらないのだから、重心が外心と垂心を $1:2$ に内分することも同時に示せたことになる。

$\triangle\alpha\beta\gamma$ が正三角形のとき、傍心以外の4心が一致することが知られているが、これを示してみよう。

内心の場合、すべての辺の長さ $|\beta-\gamma|, |\gamma-\alpha|, |\alpha-\beta|$ が同じならば、重心 $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ に一致することは式からすぐに分かる。

また、外心を0にする座標では、1 の原始3乗根 $\omega=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ に対して、$\beta=\omega\alpha, \gamma=\omega^2\alpha$ となっており[10]、$\alpha+\beta+\gamma=(1+\omega+\omega^2)\alpha=0$ となるから、重心も垂心も外心0と一致する。

1.10 円を複素数で表す。

1. 円 (α を中心、$\rho>0$ を半径とする円)

$$
\begin{aligned}
|z-\alpha| &= \rho \\
z\bar{z}-\alpha\bar{z}-\bar{\alpha}z+\alpha\bar{\alpha} &= \rho^2 \\
z\bar{z}-\alpha\bar{z}-\bar{\alpha}z+c &= 0 \ (\text{ただし}\ \rho^2=\alpha\bar{\alpha}-c>0)
\end{aligned}
$$

2. 円または直線 ($\alpha=a+ib\in\mathcal{C}, d, c\in\mathcal{R}$ に対して)

$$
\begin{aligned}
dz\bar{z}+\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z+c &= 0 \ (\text{ただし}\alpha\bar{\alpha}>dc) \\
d=0\ \text{のとき} & \quad \text{直線}
\end{aligned}
$$

[9] 1.4 節の結果を使えば、それほど面倒な計算ではない。

[10] 外心を 0 にする座標では3頂点はある定円の上にあり、各辺を見込む角は等しく、従って、120° になるということを表しただけである。$\omega=\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ$ である。

$$d \neq 0 \text{のとき} \qquad \text{円、中心} -\frac{\alpha}{d}\text{、半径}\frac{\sqrt{\alpha\bar{\alpha}-dc}}{|d|}$$

3. アポロニウスの円（２定点 α, β からの距離の比が一定 (c)）

$$\begin{aligned}\frac{|z-\alpha|}{|z-\beta|} = c & \qquad (c>0) \\ (1-c^2)z\bar{z}+(\alpha\bar{\alpha}-c^2\beta\bar{\beta}) &= (\alpha-c^2\beta)\bar{z}+(\bar{\alpha}-c^2\bar{\beta})z \\ c=1\text{のときは} & \qquad \text{垂直２等分線}\end{aligned}$$

4. ２点 (α, β) を見込む角が一定 $(\theta(\neq 0, \pm\pi))$（同じ弧を見込む円周角は等しい）

$$\begin{aligned}\arg\frac{z-\alpha}{z-\beta} &= \theta\ (\text{一定}) \\ \frac{(z-\alpha)|z-\beta|}{(z-\beta)|z-\alpha|} &= e^{i\theta}\end{aligned}$$

両辺を２乗すると

$$\frac{(z-\alpha)(\bar{z}-\bar{\beta})}{(z-\beta)(\bar{z}-\bar{\alpha})} = e^{2i\theta}$$

これを展開すると

$$(e^{-i\theta}-e^{i\theta})z\bar{z}+(e^{-i\theta}\beta-e^{i\theta}\alpha)\bar{z}+(e^{i\theta}\bar{\alpha}-e^{-i\theta}\bar{\beta})z = e^{i\theta}\bar{\alpha}\beta-e^{-i\theta}\alpha\bar{\beta}$$

となり、中心が $\dfrac{e^{i\theta}\beta-e^{-i\theta}\alpha}{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}$ で 半径が $\dfrac{|\beta-\alpha|}{2\sin\theta}$ の円になる

円周角 θ だけで図形を定めようとすると、幾何的には、円にならず、線分 $\alpha\beta$ に関して対称な２つの円弧ということになる。しかし、 arg は角を測る向きも指定出来るので、角の正負を考慮にいれると、そのうちの片方だけが得られる。つまり、 $\{z \in \mathcal{C}; \arg\dfrac{z-\alpha}{z-\beta} = \theta\}$ は $\overrightarrow{0\beta}$ から $\overrightarrow{0\alpha}$ の向きに測った角が θ であるような円弧ということになる。これを円にしようと思えば、弦 $\alpha\beta$ に関して反対側の弧の上にある点も考えて、

$$C_\theta(\alpha,\beta) = \{z \in \mathcal{C}; \arg\frac{z-\alpha}{z-\beta} = \theta\text{または}\theta-\pi\}$$

とすればよい。θ を $[0,\pi)$ で動かせば、$\theta=0$ を除いて（この時は α,β を通る直線に対応している）、$C_\theta(\alpha,\beta)$ は α と β を通る円のすべてを表すことになる。

α と β を固定して $0 \le c \le \infty$ を動かしてアポロニウスの円群 $A_c(\alpha,\beta)$ と一緒に、平面 $\mathcal{C}$ 上に図示すれば、互いに直交する円群になり、円の網 とか シュタイナーの円 とか呼ばれるものになる。

また、２点 γ,δ が $C_\theta(\alpha,\beta)$ に属すれば、

$$\begin{aligned}\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}\left|\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}\right| = \pm e^{i\theta} &= \frac{\delta-\alpha}{\delta-\beta}\left|\frac{\delta-\beta}{\delta-\alpha}\right| \\ \frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)} &= \pm\left|\frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}\right|\end{aligned}$$

となり、４点　$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ が共円である（同一円周上にある）ための条件は 非調和比

$$(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}$$

が実数であることになる。

４点のうちの一つ (たとえば δ) が無限遠点 ∞ のとき、この条件は

$$(\alpha,\beta,\gamma,\infty) = \frac{(\alpha-\gamma)(\frac{\beta}{\infty}-1)}{(\frac{\alpha}{\infty}-1)(\beta-\gamma)} = \frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma} \in \mathcal{R}$$

となるが、これは α,β,γ の共線条件である。

この意味でも、直線は無限遠点 ∞ を通る円のことであると考えておいた方が良いことがあることが分かるだろう。

1.11　曲線を複素数で表す。

２つの異なる点 α,β を固定して考える。しかし、$\alpha=c,\beta=-c$ $(c>0)$ と標準的な場所にとっておくことができる。複素数の加減乗除で運動が実現されているので、α と β の中点が原点になるように平行移動し、次に $\arg\alpha=0$ となるように回転するのは、簡単な座標変換である。

1. 楕円 (点 α と β に焦点を持つ)

$$\begin{aligned}
|z-\alpha|+|z-\beta|=|z-c|+|z+c| &= 2a \quad (a>c>0) \\
c^2(z^2+\bar{z}^2)+2(c^2-2a^2)z\bar{z} &= 4a^2(c^2-a^2) \\
\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} &= 1 \quad (\text{ここで}\ b^2=a^2-c^2)
\end{aligned}$$

2. 双曲線 (点 α と β に焦点を持つ)

$$\begin{aligned}
|z-\alpha|-|z-\beta|=|z-c|-|z+c| &= \pm 2a \ (a\in\mathcal{R},\ |a|<c) \\
c^2(z^2+\bar{z}^2)+2(c^2-2a^2)z\bar{z} &= 4a^2(c^2-a^2) \\
\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} &= 1 \quad (\text{ここで}\ b^2=c^2-a^2)
\end{aligned}$$

3. レムニスケート (２定点からの距離の積が一定で、２点の中点を通るもの)

$$\begin{aligned}
|z-c||z+c| &= c^2 \\
r^2 &= 2c^2\cos 2\theta
\end{aligned}$$

1.12　１次分数変換

$a,b,c,d\in\mathcal{C}$ に対して

$$w=\phi(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

の形の $\mathcal{C}$ 平面の変換を１次分数変換という。この変換は、円または直線は、円または直線に写し、またこうした変換として特徴づけられる。このことを、円-円対応 と言うことがある。

二つの１次分数変換の合成を考えてみる。$u=\dfrac{ew+f}{gw+h}$ との合成を計算してみると、また１次分数変換になり、

$$\begin{aligned}
u &= \frac{ew+f}{gw+h}=\frac{e\dfrac{az+b}{cz+d}+f}{g\dfrac{az+b}{cz+d}+h} \\
&= \frac{e(az+b)+f(cz+d)}{g(az+b)+h(cz+d)}=\frac{(ea+fc)z+(eb+fd)}{(ga+hc)z+(gb+hd)}
\end{aligned}$$

となって、係数の行列の積と対応していることが分かる。

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{pmatrix}$$

そこで、$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、

$$\phi_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

と置く。すると、 $B = \lambda A\ (\lambda \neq 0)$ に対しては $\phi_B(z) = \phi_A(z)$ となり、１次分数変換 $\phi_A(z)$ が逆変換を持つためには行列 A が正則であることが必要十分になることはすぐに分かるだろう。そして、そのとき

$$z = \phi_A^{-1}(w) = \phi_{A^{-1}}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}$$

となる。以下、対応する行列 A は正則、つまり、 $\det A = ad - bc \neq 0$ であると仮定しよう。

すべての $z \in \mathcal{C}$ に対して値をとらせるために、分母 $cz+d$ が 0 となるとき、つまり $z = -\frac{d}{c}$ の時の値は ∞ としておこう (同時には $az+b=0$ とはならない)。逆に ∞ での値は

$$\phi_A(\infty) = \frac{a+\frac{b}{z}}{c+\frac{d}{z}}\Big|_{z=\infty} = \frac{a}{c}$$

と考えることができる。つまり、１次分数変換は複素平面 $\mathcal{C}$ の変換というよりリーマン球面 $\hat{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cup \{\infty\}$ の変換と考える方が良い。リーマン球面 $\hat{\mathcal{C}}$ は図形としては普通の３次元空間の中の単位球面 S^2 と思って良いが、そこに複素構造（つまり、代数的にも解析的にも複素数が棲んでいることを保証するようなこと）を同時に考えておくのである。

さて、１次分数変換は、 $\hat{\mathcal{C}}$ の変換として、どのようなものだろうか。特別な値 $1, 0, \infty$ に対しては、

$$\phi(1) = \frac{a+b}{c+d}, \quad \phi(0) = \frac{b}{d}, \quad \phi(\infty) = \frac{a}{c}$$

となる。

例えば、 $\phi(\infty)=\infty$ という条件は、 $c=0$ ということになり、このとき A の正則性から、 $a,d\neq 0$ だから、 ϕ は

$$\phi(z)=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}$$

となり、平面 $\mathcal{C}$ の相似変換になる。またそれ以外では必ず、無限遠点 ∞ は平面の点 $\dfrac{a}{c}$ に写り、無限遠点 ∞ に写る平面の点 $-\frac{d}{c}$ があることになる。

また、互いに等しくない3点 β,γ,δ がそれぞれ $1,0,\infty$ に写されるという条件を書けば、

$$\begin{aligned}
1=\phi(\beta)=\frac{a\beta+b}{c\beta+d} &\iff \frac{a\beta+b}{c\beta+d}=1\\
0=\phi(\gamma)=\frac{a\gamma+b}{c\gamma+d} &\iff a\gamma+b=0\\
\infty=\phi(\delta)=\frac{a\delta+b}{c\delta+d} &\iff c\delta+d=0
\end{aligned}$$

となって、このような1次分数変換は存在する。このとき、点 α は ϕ によって

$$\phi(\alpha)=\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}=\frac{a}{c}\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\delta}=\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\delta}\times\frac{\beta-\delta}{\beta-\gamma}$$

つまり、非調和比 $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ に写される。これが非調和比の定義だと言っても良い。

また、3点が写される先を決めたら1次分数変換は一意的に決まってしまうことも意味している。

$$\phi(\beta)=1,\phi(\gamma)=0,\phi(\delta)=\infty\Longrightarrow\phi(z)=(z,\beta,\gamma,\delta)$$

さらに、1次分数変換が非調和比を変えないことも分かる。実際、$\phi(z)$ を1次分数変換、 β,γ,δ を互いに異なる ($\hat{\mathcal{C}}$ の) 3点とする。$\psi(z)$ を $\psi(z)=(z,\beta,\gamma,\delta)$ で定まる1次分数変換とすると、$\psi\circ\phi^{-1}$ は点 $\phi(\beta),\phi(\gamma),\phi(\delta)$ をそれぞれ $1,0,\infty$ に写すことになる。したがって、

$$(\phi(\alpha),\phi(\beta),\phi(\gamma),\phi(\delta))=(\psi\circ\phi^{-1})(\phi(\alpha))=\psi(\alpha)=(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$$

となる。

普通の証明は、１次分数変換が、平行移動 $(z \mapsto z+\beta)$、回転相似 $(z \mapsto \alpha z)$、反転 $(z \mapsto \dfrac{1}{z})$ の３種の変換の合成であること

$$\phi(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{bc-ad}{c}\frac{1}{cz+d} + \frac{a}{c}$$

を示して、それぞれの変換で非調和比が変わらないことを示すのだが、計算を定義に押し込めたこの形の証明が気に入っている。

そして、これだけから、１次分数変換が円円対応であることが分かる。実際、 z が β, γ, δ で定まる円上にある条件は $(z, \beta, \gamma, \delta) \in \mathcal{R}$ であり、従って、１次分数変換 ϕ での像 $w = \phi(z)$ は $\phi(\beta), \phi(\gamma), \phi(\delta)$ で定まる円上にあることになる。

2　楕円関数へ

こちらの話は高校の先生が対象なので、微積分を使った話にしてみた。レムニスート曲線の弧長からレムニスケートサイン関数 $s(z)$ を複素関数として定義し、楕円関数の特徴である２重周期性を示すことが目標である。２時間の講演では無理があることは分かっていたが、挑戦してみることにした。

曲線の弧長の逆関数としてある区間上の関数 $s(x)$ を定義し、実軸全体に拡張し、加法定理を示し、純虚数での値を定め、加法定理で複素平面上に拡張し、正則であることを示し、その零点と特異点を調べるという順序である。

その際、天下りの定義ではなく、高校数学との関りを重視し、三角関数や指数関数での対応物をよく見ることによって、出来る限り必然性を示そうという試みをしてみた。

2.1　レムニスケート曲線

前節で考えたレムニスケート曲線を考えてみよう。２定点からの距離の積が一定で２点の中点を通る曲線は、中点を原点とし、２点を x 軸上におけば、

$$|z-c||z+c| = c^2$$

と書ける。両辺を２乗すれば、

$$z^2\bar{z}^2 - c^2(z^2+\bar{z}^2) = 0 \iff |z|^4 = 2c^2\Re(z^2)$$

となり、極形式で表せば、

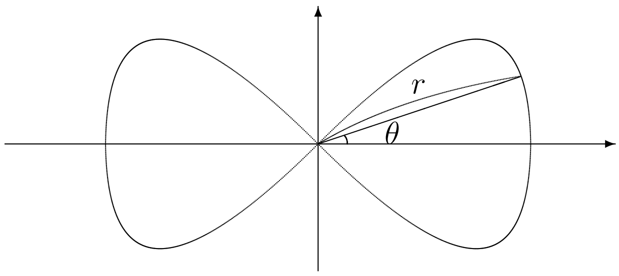
$$\begin{aligned} r^2(r^2-2c^2\cos 2\theta) &= 0 \\ r^2 &= 2c^2\cos 2\theta \end{aligned}$$

となる。実軸との交点は、 $0, \pm\sqrt{2}c$ であり、 c は曲線全体を相似に拡大縮小するだけなので、交点が $0, \pm 1$ になるように正規化する。つまり、 $c = \sqrt{2}^{-1}$ とおく。

以下、レムニスケート曲線を

$$r^2 = \cos 2\theta \geq 0$$

の形で考えよう。θ の存在する範囲は、 $\mathrm{mod} 2\pi$ で、$-\dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$ または $\pi - \dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq \pi + \dfrac{\pi}{4}$ である。概形は次の図のようになる。



レムニスケート曲線

$\cos 2\theta$ が偶関数で、周期 π の周期関数だから、曲線は x 軸対称であり、かつ原点対称である。したがって、第１象限で曲線を調べておけば良い。

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ で考える。 θ で微分すると、

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{\sin 2\theta}{r} \leq 0$$

であって、 0 となるのは $\theta = 0$ の時だけだから、この範囲で r は θ の１価の減小関数であり、従って、$\theta = \theta(r)$ も $r (0 \leq r \leq 1)$ の１価減小関数である。さらに、 $\theta(0) = \dfrac{\pi}{4}$, $\theta(1) = 0$ である。

ここで、曲線の弧長を量ってみよう。弧長は次の積分で求められる。

$$\begin{aligned} \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} &= \int \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} dx \\ = \int \sqrt{(dr)^2 + r^2 (d\theta)^2} &= \int \sqrt{1 + r^2 (\frac{d\theta}{dr})^2} dr \end{aligned}$$

従って、 0 からの弧長 $\ell(s)$ は、

$$\begin{aligned} \ell(s) &= \int_0^s \sqrt{1 + r^2 \frac{r^2}{\sin^2 2\theta}} dr \\ &= \int_0^s \sqrt{1 + \frac{r^4}{1 - \cos^2 2\theta}} dr \\ &= \int_0^s \sqrt{1 + \frac{r^4}{1 - r^4}} dr = \int_0^s \frac{dr}{\sqrt{1 - r^4}} \end{aligned}$$

となる。端の値は、

$$\ell(0) = 0, \qquad \ell(1) = \omega = \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}$$

である。ω の具体的な値が $\omega = 1.3110\cdots$ であることは、今はあまり重要ではない。 また

$$\frac{d\ell}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1-s^4}} > 0 \qquad (0 \le s < 1)$$

だから、 $\ell(s)$ は $0 \le s \le 1$ で単調で、したがって逆関数がとれて、それを $s = s(\ell)$ と書こう。これを $\mathcal{R}$ 全体に、ひいては $\mathcal{C}$ 全体に拡張した関数をレムニスケート・サイン関数 $s(x)$ と呼ぶ。複素変数の複素数値関数 $s(\ell)$ をきちんと定義しその性質を調べるのがこの話の目的である。

$s(\ell)$ は楕円関数の一種である。楕円関数の理論は１９世紀数学史のハイライトの一つで、俳優達の名もオイラー、ガウス、アーベル、ヤコービ、ワイエルシュトラス、クライン、ポアンカレなど挙げ尽くすことが出来ない。

行き詰まった楕円積分の研究が、逆関数である楕円関数を考えることで決定的な進歩を遂げたと、高校生のころ E.T. ベルの数学者列伝 [19] を読んで興奮したものだった。楕円積分も楕円関数も何も分かっていなかったのだけれど。閑話休題。

変数が弧長という意味を持つことを忘れて、 x と書くことにすると、$s(x)$ について分かっていることは、

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{ds}} = \frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{1-s^4}}} = \sqrt{1-s^4} \qquad (0 \le x \le \omega)$$

であることと、 $s(0) = 0, s(\omega) = 1$ であることだけである。これだけから出発することにする。

$s(x)$ をまず実数 $\mathcal{R}$ に拡張してみよう。レムニスケート曲線の全長は 4ω だから、周期 4ω の周期関数にすることは出来るはずで、$0 \le x \le 4\omega$ での値を決めれば良い。

$s(x)$ $(0 \le x \le \omega)$ のグラフの概形は $\sin x$ $(0 \le x \le \frac{\pi}{2})$ に似ている。レムニスケート曲線が実軸対称であることを用いれば、$s(0) = 0, s(\omega) = 1$

を留めて、グラフを実軸の回りにまわせば良いから、$\omega \leq x \leq 2\omega$ の範囲では、

$$s(x) = s(2\omega - x) \qquad\qquad (\omega \leq x \leq 2\omega)$$

とおけば良いだろう。

$s(2\omega) = 0$ となっているから、このあと周期 2ω の周期関数にしても良いのだが、 x が原点からの距離だったことを思えばそうするべきなのかもしれないが、そうしたことを忘れ、素敵な関数を作るという気持ちになろう。

$x = 2\omega$ での左微分を見てみる。

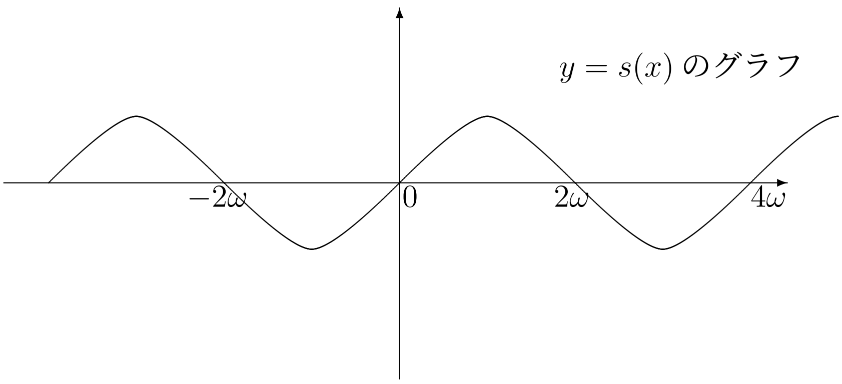
$$\frac{ds}{dx_-}(2\omega) = -\frac{ds}{dx_+}(0) = -\sqrt{1 - s^4(0)} = -1$$

である。周期を 2ω にすると、導関数 $\dfrac{ds}{dx}$ が連続でなくなってしまう。ここは $\sin x$ のグラフを見習って、負の値になってよいことにする。2ω だけ戻って値を負にするか、原点対称で全長が 4ω であることを使って値を負にするかで、

$$s(x) = -s(x - 2\omega), \qquad s(x) = -s(4\omega - x) \qquad\qquad (2\omega \leq x \leq 4\omega)$$

の二通りの定義の仕方があるようだが、 $\omega \leq x \leq 2\omega$ での定義から同じ値になることが分かる。

あとは、周期 4ω の周期関数にしてしまえば、無限回連続微分可能な実関数であるレムニスケート・サイン関数 $s(x)$ が得られるのである。継ぎ目の点 $\{n\omega; n \in \mathcal{Z}\}$ でも、各導関数が連続につながっていることを確かめることが出来るということである。



これを複素関数に拡張するのには、更に準備がいる。

まず、レムニスケート・サイン関数の、すぐに分かる関数等式を挙げておこう。

$$
\begin{aligned}
&(1) & s(x+4\omega) &= s(x) \\
&(2) & s(x\pm 2\omega) &= -s(x) \\
&(3) & s(-x) &= -s(x) \\
&(4) & s(x+\omega) &= s(\omega - x)
\end{aligned}
$$

証明は、 $s(x)$ の $[0,4\omega]$ 上での定義から、まず $[0,4\omega]$ の上で成り立つことを示し、一般の x に対しては、 4ω 周期性を使って、$[0,4\omega]$ の場合に帰着させれば良い。

加法定理を述べたいのだが、そのためにはレムニスケート・コサイン関数 $c(x)$ を定義しないといけない。三角関数の場合に倣うならば、$c(x)=s(\omega-x)$ とすることになるが、それで良いのだろうか。三角関数の場合を思い出してみよう。

2.2 三角関数の場合

$\sin x$ も弧長の逆関数と考えることが出来る。もちろん問題にすべき曲線は単位円 $S^1=\{z\in\mathcal{Z};|z|=1\}=\{(x,y)\in\mathcal{R}^2;x^2+y^2=1\}$ である。

$1=(1,0)$ からの弧長を $y(=\sin\theta)$ で量ったもの弧度法（ラジアン）での角度 θ であり、

$$
\begin{aligned}
\theta=\theta(y) &= \int_0^y \sqrt{1+(\frac{dx}{dy})^2}dy = \int_0^y \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}dy \\
&= \int_0^y \sqrt{1+\frac{y^2}{1-y^2}}dy = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}
\end{aligned}
$$

である。分かっている値は $\theta(0)=0, \theta(1)=\dfrac{\pi}{2}=\displaystyle\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$ だけである。

$0\le y<\dfrac{\pi}{2}$ では $\dfrac{d\theta}{dy}=\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}>0$ で単調増加だから、$0\le y\le\dfrac{\pi}{2}$ では逆関数が存在し、$y=\sin\theta$ の定義はこの逆関数であるとするので

ある。もちろん前小節と同様に実数全体 $\mathcal{R}$ には次のように拡張する。

$$
\begin{aligned}
\sin\theta &= \sin(\pi-\theta) && (\frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi)\\
\sin\theta &= -\sin(2\pi-\theta) && (\pi\le\theta\le 2\pi)\\
\sin\theta &= \sin(\theta\pm 2n\pi) && (n\in\mathcal{Z})
\end{aligned}
$$

すると、前小節と同じようにして、

$$
\begin{aligned}
\sin(\theta+2\pi) &= \sin(\theta) && (5)\\
\sin(\theta\pm\pi) &= -\sin(\theta) && (6)\\
\sin(-\theta) &= -\sin(\theta) && (7)\\
\sin(\theta+\frac{\pi}{2}) &= \sin(\frac{\pi}{2}-\theta) && (8)
\end{aligned}
$$

が得られる。

$\sin\theta$ の導関数を $\cos\theta$ とおくと、$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ では

$$\cos\theta=\frac{d\sin\theta}{d\theta}=\frac{1}{\frac{d\theta}{dy}}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}=\sqrt{1-y^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}$$

であり、

$$\frac{d\cos\theta}{d\theta}=\frac{d\sqrt{1-\sin^2\theta}}{d\theta}=\frac{-2\sin\theta}{2\sqrt{1-\sin^2\theta}}\frac{d\sin\theta}{d\theta}=-\sin\theta$$

である。

$\sin\theta$ 自身導関数 $\frac{d\sin\theta}{d\theta}=\cos\theta$ が連続になるように $\mathcal{R}$ 全体に定義されているので、$\cos\theta$ も $\mathcal{R}$ 全体で定義され、

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\quad \frac{d\sin\theta}{d\theta}=\cos\theta,\quad \frac{d\cos\theta}{d\theta}=-\sin\theta$$

が成り立っていると思って良い。

分かっている値は、$0\le\theta\le 2\pi$ では

$$
\begin{aligned}
&\sin 0=0,\ \sin\frac{\pi}{2}=1,\quad \sin\pi=0,\quad \sin\frac{3\pi}{2}=-1,\ \sin 2\pi=0,\\
&\cos 0=1,\ \cos\frac{\pi}{2}=0,\quad \cos\pi=-1,\quad \cos\frac{3\pi}{2}=0,\ \cos 2\pi=1
\end{aligned}
$$

である。

　さて、三角関数の種々の性質は加法定理

$$\begin{aligned}\sin(\theta+\phi) &= \sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi \\ \cos(\theta+\phi) &= \cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi\end{aligned}$$

から得られるが、高校数学ではなかなかすっきりした証明がない。

　ほんの少し多変数の微積分を使わせてもらえば、簡単な証明がある。使う事実は次のものだけである。

　「2 変数の関数 $p(x,y)$ が $\dfrac{\partial p}{\partial x}=\dfrac{\partial p}{\partial y}$ を満たせば、p は $x+y$ の関数である。」

　実際、$u=x+y, v=x-y$ という変数変換をしたものを $h(u,v)=p(x,y)$ とおけば、

$$\frac{\partial h}{\partial v}=\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{2}(\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y})=0$$

であり、h は v に関して一定となって、$u=x+y$ だけの関数となる。

　サイン関数の加法定理の右辺を $h(\theta,\phi)=\sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi$ とおき、偏微分してみると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial\theta} &= \cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi \\ \frac{\partial h}{\partial\phi} &= -\sin\theta\sin\phi+\cos\theta\cos\phi\end{aligned}$$

で等しくなり、

$$\sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi=h(\theta+\phi)$$

となる。ここで $\phi=0$ を代入すれば、

$$\sin\theta=\sin\theta\times1+\cos\theta\times0=h(\theta+0)=h(\theta)$$

となって証明は終わる。

　コサインの加法定理はサインと同じようにしても証明出来るが、サインの加法定理からも得られる。

まず、サインの加法定理で、$\phi=\dfrac{\pi}{2}$ と置けば、

$$
\begin{aligned}
(9)\qquad \sin(\theta+\frac{\pi}{2}) &= \sin\theta\cos\frac{\pi}{2}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{2}\\
&= \sin\theta\times 0+\cos\theta\times 1=\cos\theta
\end{aligned}
$$

が得られ、また式 (7) から、$\cos\theta$ が偶関数であることも分かる。また、サインの加法定理で ϕ に $\phi+\dfrac{\pi}{2}$ を代入すれば、コサインの加法定理が得られるのである。

さらに、式 (9) から $c=\cos\theta=\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)$ に対して、

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{2}-\theta &= \int_0^c\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\\
\theta &= \frac{\pi}{2}-\int_0^c\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}-\int_0^c\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\\
(10)\qquad \theta &= \int_c^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}
\end{aligned}
$$

となり、この逆関数として $\cos\theta$ を定義することも出来る。

なお、加法定理をうまく用いて、解ける代数方程式に持ち込むことで幾つかのサイン・コサインの特殊値が求められる。

例えば、$\theta=\frac{\pi}{3}$ での値 $y=\sin\frac{\pi}{3}>0$ を求めたいとする。$x=\cos\frac{\pi}{3}=\sqrt{1-y^2}>0$ とおき、分かっている π での値を x,y で表すことにすると、

$$
\begin{aligned}
0 &= \sin\pi=\sin 3\theta=\sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta\\
&= 2\sin^2\theta\cos\theta+(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\sin\theta\\
&= 2x^2y+(x^2-y^2)y=y(3-4y^2)=y(1-4x^2)
\end{aligned}
$$

となるから、$x=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2},\ y=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ が得られる。

さて、レムニスケート関数に戻って加法定理を示しても良いのだが、もう少し三角関数の議論をしておこう。複素関数にするためには、適切に純虚数での値を定め、それを加法定理を用いて $\mathcal{C}$ 全体に矛盾なく定義し、正則であることを示す必要がある。

三角関数の純虚数での値を定義するためには、指数関数の知識が必要となる。指数関数もこの話の文脈の中で考えておいた方が、結局は早道になるだろう。次小節で、それを纏めて置くことにする。

2.3　指数関数の場合

よく知られているように、自然対数

$$\log u = \int_1^u \frac{1}{t} dt \qquad (u > 0) \tag{11}$$

の逆関数として指数関数を定義するのだが、今はこの事だけしか分かっていない立場で議論を進めたいので、この逆関数を取り敢えず $u(x)$ と書くことにしよう。

分かっている値は $\log 1 = 0$ すなわち $u(0) = 1$ だけである。導関数は、

$$\frac{d \log u}{du} = \frac{1}{u}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{du}} = \frac{1}{\frac{1}{u}} = u > 0$$

であり、$\log u$ の定義域が $u > 0$ で値域が $\mathcal{R}$ であることから、$u(x)$ の定義域は $\mathcal{R}$ 全体で値域は $u > 0$ である。

加法定理（指数法則）

$$u(x + y) = u(x)u(y)$$

も、右辺を $h(x, y)$ と置くとき、

$$\frac{\partial h}{\partial x} = u(x)u(y) = \frac{\partial h}{\partial y}$$

からすぐに従う。

したがって、$e = u(1)$ とおけば、$u(x) = e^x$ と表されることになる。当たり前のことだが、e^x は指数法則を無意識に使えるようにするための便利な記法だということであって、関数の本体はあくまでも逆関数 $u(x)$ だと思っている。

さて、指数関数の純虚数での値をどう定義したら良いだろうか。複素関数の微分の知識を最小限にとどめるために、$v(y) = u(iy)$ という実変数の複素数値関数があったとすると、$v(0) = u(0) = 1$ で導関数は

$$\frac{dv}{dy}(y) = i\frac{du}{dy}(iy) = iu(iy) = iv(y)$$

となるが、このような関数を実は知っていたわけで、$v(y) = \cos y + i \sin y$ とおけば、$v(0) = 1, \frac{dv}{dy} = iv$ を満たすことになる。実関数では 1 階の常微分方程式は初期値だけで決定されるから、この場合も多分そうで

あろうと思っても良いし、非常に適切な候補が見つかったのだからこう決めておいて様子をみようという立場をとっても良い。

何はともあれ、$u(iy) = \cos y + i \sin y$ とおき、

$$e^{x+iy} = u(x+iy) = u(x)u(iy) = e^x(\cos y + i \sin y) \tag{12}$$

と定義すれば、加法定理（指数法則）は複素領域でも成り立っている。

さて、この定義で指数関数は正則になるだろうか。

正則の定義を議論している暇はないので、複素関数 $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ が正則であるとは、実関数 u, v が連続偏微分可能であって、コーシー・リーマンの方程式

$$\frac{\partial u}{dx} = \frac{\partial v}{dy}, \quad \frac{\partial u}{dy} = -\frac{\partial v}{dx} \tag{13}$$

を満たすことであるとしておこう。

(12) で定義された関数に対して、コーシー・リーマンの方程式を確かめてみよう。$u(x,y) = e^x \cos y,\ v(x,y) = e^x \sin y$ であり、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

となる。

こうして、複素関数としての指数関数 e^z が得られたことになる。

周期性については、明らかなもの

$$e^{z+2n\pi i} = e^z$$

以外には存在しないことが分かる。

また定義から三角関数が

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \tag{14}$$

と表されることが分かる。

三角関数を複素領域に拡張するには、(14) の右辺の指数関数が複素変数で定義されていることから、直接に

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{15}$$

としてもよいし、純虚数での値を

$$(16)\quad \cos iy = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \cosh y, \quad \sin iy = \frac{e^{-y} - e^y}{2i} = i \sinh y$$

と置き、加法定理を信じて

$$\begin{aligned}
(17) \qquad \sin(x+iy) &= \sin x \cos iy + \cos x \sin iy \\
&= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \\
(18) \qquad \cos(x+iy) &= \cos x \cos iy - \sin x \sin iy \\
&= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y
\end{aligned}$$

としても同じ関数を与えることが分かる。指数関数の正則性から、正則であることは従う。

　また、加法定理を含めた三角関数の諸公式（少なくとも前小節に上げたもの）が実変数の場合と同様に成り立つことが容易に示される。例えば、

$$\begin{aligned}
& \sin^2(x+iy) + \cos^2(x+iy) \\
= \ & \cosh^2 y(\sin^2 x + \cos^2 x) - \sinh^2 y(\sin^2 x + \cos^2 x) \\
= \ & \cosh^2 y - \sinh^2 y = 1
\end{aligned}$$

となる。

　周期性については、 $2n\pi$ が周期であることは明らかだが、それ以外のものがないことも容易に示される。

　周期の定義をきちんとしておこう。ω が複素関数 $f(z)$ の周期であるとは、すべての $z \in \mathcal{C}$ に対して、

$$f(z+\omega) = f(z)$$

が成り立つこととする。

　$\sin z$ の周期が $2n\pi$ $(n \in \mathcal{Z})$ しかないことは、次のように示される。ω を周期とすれば、

$$\sin(z+\omega) - \sin z = 2 \sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{2z+\omega}{2}$$

が恒等的に 0 であるから、 $\sin \frac{\omega}{2} = 0$ である。一方、式 (18) から $\sin z$ の零点が $n\pi$ しかないことが分かるから、 $\frac{\omega}{2} = n\pi$ である。

次いでながら、指数関数 e^z は零点も極も持たないし、周期は $2ni\pi$ しかない。$\sin z,\ \cos z$ は極を持たず、周期は $2n\pi$ のみであり、$\cos\theta$ の零点は $\dfrac{\pi}{2}+n\pi$ しかない。

長い回り道だった。レムニスケート関数に戻ろう。

2.4 レムニスケート関数

2.1 の最後に述べたように $c(x)=s(\omega-x)$ としてレムニスケート・コサイン関数を定義することは、 $\cos\theta$ の時と同様に、

$$x=\int_c^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} \tag{19}$$

の逆関数として $c(x)$ を定めることと同じである。（注意： $c(x)$ の定義を論じる間は、符号の問題が面倒だし、他は適当に拡張すれば良いから、 $0\le x\le\omega$ でだけ考えている。）

しかし、 $s(x)$ と $c(x)$ を結ぶ最も重要な関係式

$$s(x)^2+c(x)^2+s(x)^2c(x)^2=1 \tag{20}$$

が出てこない。

cos の時のように、$s(x)$ の微分を使って定義しようとしても、

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1-s^4},\quad \frac{d^2s}{dx^2}=-2s^3$$

となって、(20) を満たすように定義しようとすれば

$$c(x)=\frac{1}{1+s(x)^2}\frac{ds}{dx}=\frac{\sqrt{1-s(x)^4}}{1+s(x)^2}=\sqrt{\frac{1-s(x)^2}{1+s(x)^2}} \tag{21}$$

とすることになり、 $c(x)$ の定義のどこにも必然性が見当たらないようにみえる。しかし、(19) を見れば $s(x)$ との結び付きはいかにも自然で、何か定義に理由はないかと思って考えていたら、導関数の間に、

$$\frac{ds}{dx}=(1+s(x)^2)c(x),\quad \frac{dc}{dx}=(1+c(x)^2)s(x) \tag{22}$$

という対称性が見つかった。この対称性を満たすようにと、$c(x)$ を定義したのだと、後知恵では言えるけれど、やはりこれを見つけた人は天才だったに違いない。

$c(x)$ の定義は (21) と言っても良いし、(20) と言っても良い。

$c(x)$ を実数 $\mathcal{R}$ 全体に拡張するのは、$s(x)$ は既に定義されているので、基本的には (20) によって定義し、符号の問題は (22) を満たすようにすれば良い。$c(x)$ も周期 4ω の周期関数で、無限回微分可能な関数である。

$s(x),\ c(x)$ の値で分かっているものを挙げておくと、 $0 \leq x \leq 4\omega$ では

$$\begin{aligned} &s(0)=0,\ s(\omega)=1,\quad s(2\omega)=0,\quad s(3\omega)=-1,\ s(4\omega)=0,\\ &c(0)=1,\ c(\omega)=0,\quad c(2\omega)=-1,\quad c(3\omega)=0,\ c(4\omega)=1 \end{aligned}$$

である。

やっと加法定理が述べられる (オイラーは偉い!)。

$$s(x+y) = \frac{s(x)c(y)+c(x)s(y)}{1-s(x)c(x)s(y)c(y)} \tag{23}$$

$$c(x+y) = \frac{c(x)c(y)-s(x)s(y)}{1+s(x)c(x)s(y)c(y)} \tag{24}$$

である。分子だけ見れば、 $\sin,\ \cos$ の加法定理と同じである。

$c(x)$ の加法定理 (24) は $s(x)$ の加法定理 (23) から得られる。実際、(23) で $y=\omega$ とおけば、(4) から

$$c(x)=s(x+\omega)=s(\omega-x) \tag{25}$$

が得られる。これから、 $c(-x)=c(x)$ も一目で分かる。そして、

$$\begin{aligned} c(x+y)=s(x+y+\omega) &= \frac{s(x)c(y+\omega)+c(x)s(y+\omega)}{1-s(x)c(x)s(y+\omega)c(y+\omega)}\\ &= \frac{c(x)c(y)-s(x)s(y)}{1+s(x)c(x)s(y)c(y)} \end{aligned}$$

となる。しかし、 $s(x)$ の加法定理は簡単にはいかない。オイラーが苦労したと言い、アーベルが改善したという証明のアイデアは、前小節で述べた方法である。

(23) の右辺を $h(x,y)$ と置いて、$\dfrac{\partial h}{\partial x}=\dfrac{\partial h}{\partial y}$ を確かめれば、 h は $x+y$ の関数でそこに $y=0$ を代入すれば、

$$h(x)=\frac{s(x)c(0)+c(x)s(0)}{1-s(x)c(x)s(0)c(0)}=s(x)$$

となって、証明は終わる。

さて、 $\dfrac{\partial h}{\partial x}=\dfrac{\partial h}{\partial y}$ を確かめることは容易ではない。

$\dfrac{\partial h}{\partial x}=\dfrac{p(x,y)}{(1-s(x)c(x)s(y)c(y))^2}$ の分母は x,y に関して対称だから、分子の $p(x,y)$ も対称であることを示せば、 $\dfrac{\partial h}{\partial y}$ に等しいことが分かる。$p(x,y)$ を計算しよう。

$$
\begin{aligned}
& p(x,y)= \\
= \ & \frac{d}{dx}(s(x)c(y)+c(x)s(y))(1-s(x)c(x)s(y)c(y)) \\
& -(s(x)c(y)+c(x)s(y))\frac{d}{dx}(1-s(x)c(x)s(y)c(y)) \\
= \ & (s'(x)c(y)+c'(x)s(y))(1-s(x)c(x)s(y)c(y)) \\
& +(s(x)c(y)+c(x)s(y))(s'(x)c(x)+s(x)c'(x))s(y)c(y) \\
= \ & ((1+s^2(x))c(x)c(y)+(1+c^2(x)s(x))s(y))(1-s(x)c(x)s(y)c(y)) \\
& +(s(x)c(y)+c(x)s(y))(1+s^2(x)c^2(x))s(y)c(y) \\
= \ & (c(x)c(y)+s(x))s(y))(1-s(x)c(x)s(y)c(y)) \\
& +s(x)c(x)(s(x)c(y)+c(x)s(y))(1-s(x)c(x)s(y)c(y)) \\
& +(s(x)c(y)+c(x)s(y))(1+s^2(x)c^2(x))s(y)c(y) \\
= \ & (c(x)c(y)+s(x))s(y))(1-s(x)c(x)s(y)c(y)) \\
& +(s(x)c(y)+c(x)s(y))\times \\
& \times\{s(x)c(x)(1-s(x)c(x)s(y)c(y))+(1+s^2(x)c^2(x))s(y)c(y)\} \\
= \ & (c(x)c(y)+s(x))s(y))(1-s(x)c(x)s(y)c(y)) \\
& +(s(x)c(y)+c(x)s(y))(s(x)c(x)+s(y)c(y))
\end{aligned}
$$

と、対称になる。加法定理の証明が終わった。

さて、純虚数 ix でのレムニスケート・サイン s の値は

$$s(ix)=is(x) \tag{26}$$

と置かれる。あまりに安直なようだが、根拠はある。

$$x(s)=\int_0^s\frac{ds}{\sqrt{1-s^4}}$$

であったことを思い出して、形式的に、$s = it, ds = idt$ と置いた計算をすると、

$$x(it) = \int_0^t \frac{idt}{\sqrt{1-(it)^4}} = i\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = ix(t)$$

ということになり、この逆関数をとれば (26) が得られる。

　では、$c(ix)$ はどう定義したら良いだろうか。(20) は最も基本的な関係式だから、これが成り立つように定義したいというのは自然なことだろう。(20) に ix を代入すると

$$1 = s(ix)^2 + c(ix)^2(1+s(ix)^2) = -s(x)^2 + c(ix)^2(1-s(x)^2)$$

だから、

$$c(ix)^2 = \frac{1+s(x)^2}{1-s(x)^2} = (\frac{1-s(x)^2}{1+s(x)^2})^{-1} = \frac{1}{c(x)^2}$$

となる。そこで、

$$s(ix) = is(x), \quad c(ix) = \frac{1}{c(x)} \tag{27}$$

と定義し、一般の $z = x + iy$ での値は加法定理 (23),(24) に強引に代入して、

$$\begin{aligned} s(z) = s(x+iy) &= \frac{s(x)c(iy)+c(x)s(iy)}{1-s(x)c(x)s(iy)c(iy)} \\ &= \frac{s(x)+ic(x)s(y)c(y)}{c(y)-is(x)c(x)s(y)} \qquad (28) \\ c(z) = c(x+iy) &= \frac{c(x)c(iy)-s(x)s(iy)}{1+s(x)c(x)s(iy)c(iy)} \\ &= \frac{c(x)-is(x)s(y)c(y)}{c(y)+is(x)c(x)s(y)} \qquad (29) \end{aligned}$$

と定義することにする。

　これでうまく行くのである。つまり、実変数のときの $s(x),\ c(x)$ に対する関係式

$$s(z+4\omega) = s(z), \qquad c(z+4\omega) = c(z) \tag{30}$$

$$(31)\ s(-z) = -s(z) = s(z+2\omega), \qquad c(-z) = c(z) = -c(z+2\omega)$$

$$(32) \qquad s(\omega - z) = s(z+\omega) = c(z)$$

$$(33) \qquad s(z)^2 + c(z)^2 + s(z)^2 c(z)^2 = 1$$

$$(34) \qquad s(z+w) = \frac{s(z)c(w) + c(z)s(w)}{1 - s(z)c(z)s(w)c(w)}$$

$$(35) \qquad c(z+w) = \frac{c(z)c(w) - s(z)s(w)}{1 + s(z)c(z)s(w)c(w)}$$

が複素変数でも成り立っていることが確かめられる。

(30),(31) は定義式 (28),(29) に代入すればすぐに分かる。(32) をやってみよう。

$$\begin{aligned} s(\omega - z) &= s((\omega - x) - iy) \\ &= \frac{s(\omega - x) + ic(\omega - x)s(-y)c(-y)}{c(-y) - is(\omega - x)c(\omega - x)s(-y)} \\ &= \frac{c(x) - is(x)s(y)c(y)}{c(y) + ic(x)s(x)s(y)} = c(z) \\ &= \frac{s(\omega + x) + ic(x+\omega)s(y)c(y)}{c(y) - is(\omega + x)c(x+\omega)s(y)} = s(z+\omega) \end{aligned}$$

ここで、$c(\omega - x) = s(x),\ c(x+\omega) = -s(x)$ の形を使っている。

加法定理や (33) を直接示すのには可成の腕力が必要で、あまり書き上げることはしない。普通は（複素）正則関数の性質、一致の定理、を使う。つまり、正則であることが分かっている範囲では、実軸上の関係式はそのまま複素領域でも成り立つことが分かる、という議論をする。

もちろん、正則性は示さなければならないが、加法定理以外は具体的に証明を与えたいと思う。

(33) を示してみよう。(33) は

$$(36) \qquad (1 + s(z)^2)(1 + c(z)^2) = 2$$

と変形される。この形で証明を与えよう。また、実変数 x に対する (33) の変形

$$(1 + s(x)^2)(1 + c(x)^2) = 2, \qquad (1 + s(x)^2)(1 - c(x)^2) = 2s(x)^2$$
$$(1 - s(x)^2)(1 + c(x)^2) = 2c(x)^2, \quad (1 - s(x)^2)(1 - c(x)^2) = 2s(x)^2 c(x)^2$$

を計算の中で使うことになる。さて、記号が繁雑になりすぎるので、

$$s = s(x), \quad c = c(x), \quad p = s(y), \quad q = c(y) \tag{37}$$

と略記させてもらうことにすると、

$$\begin{aligned}
1 + s(z)^2 &= 1 + \frac{(s + icpq)^2}{(q - iscp)^2} \\
&= 1 + \frac{s^2 - (cpq)^2 + 2iscpq}{q^2 - (scp)^2 - 2iscpq} \\
&= \frac{s^2 + q^2 - (cpq)^2 + (scp)^2}{q^2 - (scp)^2 - 2iscpq} \\
&= \frac{(s^2 + q^2)(1 - (cp)^2)}{q^2 - (scp)^2 - 2iscpq} \\
1 + c(z)^2 &= \frac{(c^2 + q^2)(1 - (sp)^2)}{q^2 - (scp)^2 + 2iscpq}
\end{aligned}$$

となる。(36) の左辺の分母は

$$\begin{aligned}
& (q^2 - (scp)^2 - 2iscpq)(q^2 - (scp)^2 + 2iscpq) \\
= & (q^2 - (scp)^2)^2 - 4(scpq)^2 \\
= & (q^2 + (scp)^2)^2
\end{aligned}$$

となり、分子は

$$\begin{aligned}
& (s^2 + q^2)(1 - (cp)^2)(c^2 + q^2)(1 - (sp)^2) \\
= & (q^2(1 + s^2) + (sp)^2(1 - s^2))(q^2(1 + c^2) + (cp)^2(1 - c^2)) \\
= & q^4(1 + s^2)(1 + c^2) + (pq)^2(s^2(1 + s^2)(1 - c^2) + c^2(1 + c^2)(1 - s^2)) \\
& +(scp^2)^2(1 - s^2)(1 - c^2) \\
= & 2q^4 + (pq)^2(2(sc)^2 + 2(sc)^2) + 2(scp^2)^2 s^2 c^2 \\
= & 2(q^4 + 2(pqsc)^2 + (scp)^4) = 2(q^2 + (scp)^2)^2
\end{aligned}$$

となって、(36) の証明が終わる。

正則性はコーシー・リーマン方程式を満たすこととしたのだが、$s(z)$ の定義で実部と虚部を求めた上で方程式をチェックするのは面倒である。コーシー・リーマン方程式 (13) は

$$(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})f(x, y) = 0 \tag{38}$$

と同値であって、この方がチェックしやすい。(36) の証明と同じ略記法を使うことにすると、

$$\begin{aligned} s'c+sc' &= (1+s^2)c^2+s^2(1+c^2)=1+s^2c^2 \\ p'q+pq' &= 1+p^2q^2 \end{aligned}$$

となる。 $s(z)$ の偏微分は

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial x} &= \frac{(s'+ic'pq)(q-iscp)+ip(s+icpq)(s'c+sc')}{(q-iscp)^2} \\ \frac{\partial s}{\partial y} &= \frac{ic(p'q+pq')(q-iscp)-(s+icpq)(q'-iscp')}{(q-iscp)^2} \end{aligned}$$

となり、 $(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y})s(z)$ の分子は

$$\begin{aligned} & (s'+ic'pq-c(p'q+pq'))(q-iscp) \\ & \quad +i(s+icpq)(p(s'c+sc')-q'+iscp') \\ = & ((1+s^2)c+i(1+c^2)spq-c(1+p^2q^2))(q-iscp) \\ & +i(s+icpq)(p(1+s^2c^2)-(1+q^2)p+isc(1+p^2)q) \\ = & (c(s^2-p^2q^2)+i(1+c^2)spq)(q-iscp) \\ & \quad +i(s+icpq)(p(s^2c^2-q^2)+isc(1+p^2)q) \\ = & qc(s^2-p^2q^2)+(1+c^2)(sp)^2qc-s^2qc(1+p^2)-qcp^2(s^2c^2-q^2) \\ + & i\{spc^2(p^2q^2-s^2)+(1+c^2)spq^2+sp(s^2c^2-q^2)-sp(cq)^2(1+p^2)\} \\ = & qc\{s^2-p^2q^2+(1+c^2)(sp)^2-s^2(1+p^2)-p^2(s^2c^2-q^2)\} \\ & +isp\{-c^2(s^2-p^2q^2)+(1+c^2)q^2+(s^2c^2-q^2)-(cq)^2(1+p^2)\} \\ = & qc\times 0+isp\times 0=0 \end{aligned}$$

となり、$(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y})s(z)=0$ であり、$s(z)$ が正則であることが分かる。

2.5 レムニスケート関数の２重周期性

(30), (31) と同じように、

(39) $$s(z+4\omega i)=s(z) \qquad c(z+4\omega i)=c(z)$$

(40) $$s(z\pm 2\omega i)=-s(z) \qquad c(z\pm 2\omega i)=-c(z)$$

は簡単に示すことが出来る。例えば、

$$\begin{aligned} s(z+4\omega i)=s(x+(y+4\omega)i) &= \frac{s(x)+ic(x)s(y+4\omega)c(y+4\omega)}{c(y+4\omega)-is(x)c(x)s(y+4\omega)} \\ &= \frac{s(x)+ic(x)s(y)c(y)}{c(y)-is(x)c(x)s(y)}=s(z) \\ s(z\pm 2\omega i)=s(x+(y\pm 2\omega)i) &= \frac{s(x)+ic(x)s(y\pm 2\omega)c(y\pm 2\omega)}{c(y\pm 2\omega)-is(x)c(x)s(y\pm 2\omega)} \\ &= \frac{s(x)+ic(x)s(y)c(y)}{-c(y)+is(x)c(x)s(y)}=-s(z) \end{aligned}$$

である。したがって、

$$s(z+2\omega(1+i)) = -s(z+2\omega)=s(z) \tag{41}$$

$$s(z+2\omega(1-i)) = -s(z+2\omega)=s(z) \tag{42}$$

となる。これで少なくとも

$$\Omega=\{2m\omega(1+i)+2n\omega(1-i); m,n\in \mathcal{Z}\}=\mathcal{Z}\omega_1+\mathcal{Z}\omega_2 \tag{43}$$

が、周期の全体のなす加群の部分加群であることがわかる。ここで、

$$\omega_1=2\omega-2\omega i,\quad \omega_2=2\omega+2\omega i \tag{44}$$

である。

$w=s(z)$ はトーラス $T=\mathcal{C}/\Omega$ からリーマン球面 $\hat{\mathcal{C}}$ への連続写像と考えられる。2 次の分岐被覆で、分岐点の集合は $\{w\in\hat{\mathcal{C}}; s^{-1}(w)$ が 1 点 $\}=\{\pm 1,\pm i\}$ である。素直に考えれば、

$$E=\{z=p\omega_1+q\omega_2; 0\le p,q<1\}$$

は $s(z)$ の基本領域だが、

$$E'=\{z=2p\omega(1+i)+2q\omega(1-i)-\omega; 0\le p,q<1\}$$

を $s(z)$ の基本領域とした方が都合が良い。

$$F=\{z=p\omega(1+i)+q\omega(1-i)-\omega; 0\le p,q<1\}\ni 0$$

と置くとき、

$$E'=F\cup(F+\omega(1+i))\cup(F+\omega(1-i))\cup(F+2\omega)$$

であり、$s(z)$ は正方形 F の内部を単位円盤内 $B^1 = \{w \in \mathcal{C}; |w| < 1\}$ に同相に写している。正方形 F の各頂点は

$$s(\omega) = 1, \quad s(i\omega) = i, \quad s(-\omega) = -1, \quad s(-i\omega) = -i$$

と写されている。

F の点 z と $(F + \omega_2)$ の点 ζ が境界の直線 $x + y = \omega$ に関して対称なら、$s(z)$ と $s(\zeta)$ は単位円 $S^1 = \{z \in \mathcal{C}; |z| = 1\}$ に関して鏡像になっている $(s(z)\overline{s(\zeta)} = 1)$。

F と $(F + \omega_1)$ でも同様の関係にあり、また $(F + \omega_2))$ と $(F + 2\omega)$ でも、$(F + \omega_1))$ と $(F + 2\omega)$ でも同様である。

$F \cap (F + \omega_2)$ 上の点 $z = x + iy$ は $x + y = \omega$ を満たしているので、

$$\begin{aligned} s(z) &= = s(x + iy) = \frac{s(x) + ic(x)s(\omega - x)c(\omega - x)}{c(\omega - x) - is(x)c(x)s(\omega - x)} \\ &= \frac{s(x) + ic(x)^2 s(x)}{s(x) - is(x)c(x)^2} \\ &= \frac{1 + ic(x)^2}{1 - ic(x)^2} = \frac{\overline{1 - ic(x)^2}}{1 + ic(x)^2} = \frac{1}{\overline{s(z)}} \end{aligned}$$

となり、従って $|s(z)|^2 = 1$、すなわち、F の右上の境界上の点は単位円周上に写っている。

2.6 ヤコービの楕円関数

$0 < k < 1$ に対して、$K = K(k) = \displaystyle\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2u^2)}}$ とおけば、ヤコービのエスエヌ関数 $u = sn(x)$ は $-K \leq x \leq K$ においては

$$x = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2u^2)}}$$

の逆関数として定義される。さらに、レムニスケート・サイン関数 $s(x)$ と同様な仕方で $4K$ 周期の無限回微分可能な関数に拡張したものである。

$$cn(x) = \sqrt{1 - sn(x)^2}, \quad dn(x) = \sqrt{1 - k^2 sn(x)^2} \quad (-K \leq x \leq K)$$

もそれぞれ $4K$ 周期、$2K$ 周期の滑らかな関数に拡張することが出来、シーエヌ、デーエヌ関数と言う。これらについても同様な関数等式

$$sn(x+4K) = sn(x), \qquad sn(-z) = -sn(z) \tag{45}$$
$$cn(x+4K) = cn(x), \qquad cn(-x) = cn(x) \tag{46}$$
$$dn(x+2K) = dn(x), \qquad dn(-x) = dn(x) \tag{47}$$
$$sn(x)^2 + cn(x)^2 = 1, \quad k^2 sn(x)^2 + dn(x)^2 = 1 \tag{48}$$

を示すことが出来、微分もまた

$$\frac{dsn(x)}{dx} = cn(x)dn(x), \quad \tfrac{dcn(x)}{dx} = -sn(x)dn(x),$$
$$\frac{ddn(x)}{dx} = -k^2 sn(x)cn(x) \tag{49}$$

となる。加法定理は

$$sn(x+y) = \frac{sn(x)cn(y)dn(y) + cn(x)dn(x)sn(y)}{1 - k^2 sn(x)^2 sn(y)^2} \tag{50}$$
$$cn(x+y) = \frac{cn(x)cn(y) - sn(x)dn(x)sn(x)dn(y)}{1 - k^2 sn(x)^2 sn(y)^2} \tag{51}$$
$$dn(x+y) = \frac{dn(x)dn(y) - k^2 sn(x)cn(x)sn(x)cn(y)}{1 - k^2 sn(x)^2 sn(y)^2} \tag{52}$$

$sn(x)$ に関するヤコービの虚数変換

$$w = i\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}, \quad dw = \frac{idv}{(1-v^2)\sqrt{1-v^2}}$$

により、

$$sn(iy,k) = \frac{isn(y,k^*)}{cn(y,k^*)}, \quad cn(iy,k) = \frac{1}{cn(y,k^*)}, \quad dn(iy,k) = \frac{dn(y,k^*)}{cn(y,k^*)}$$

とおくことになる。ここで $k^* = \sqrt{1-k^2}$ である。

加法定理を信じて，複素関数として定義することにすれば、

$$\begin{aligned} sn(z,k) &= sn(x+iy) \\ &= \frac{sn(x,k)dn(x,k^*) + icn(x,k)dn(x,k)sn(y,k^*)cn(y,k^*)}{1 - dn(x,k)^2 sn(y,k^*)^2} \end{aligned}$$

とおくことになる。

　こうすれば、複素関数としても

$$sn(z+2K) = -sn(z), \quad cn(z+2K) = -cn(z), \quad sn(z+K) = \frac{cn(z)}{dn(z)}$$

を満たすし、さらに独立な周期性

$$\begin{aligned} sn(z+2iK^*, k) &= sn(z, k) \\ cn(z+2K+2iK^*, k) &= cn(z, k) \\ dn(z+4iK^*, k) &= dn(z, k) \end{aligned}$$

も満たすことが確かめられるが、易しくはない。ここで $K^* = K(k^*)$ である。

　何はさておき、これが２重周期性であり、複素トーラス = 楕円曲線の重要性を保証している …… というようにさらに数学は続いていくのだが、今回はこれにて。

3　終わりに

昨年は TOSM の仲間の一人である福井大学の黒木哲徳氏がアメリカ・イギリスと出張で、まとまった活動が出来ませんでした。TOSM ポストにも、実質的な質問が投函されませんでした。個人的に返事を書き、この会誌にすべての質問と解答を載せてきてはいますが、何と言ってもパブリシティーがなさ過ぎるようです。需要がないとは思いたくないのですが、個人的に知っていても質問はしにくいもの、そこのバリヤーを取り除くように、何らかの方策を考える必要があると思っています。

TOSM の活動も多岐にわたり過ぎると結局何も訴えるものを作り出さないままということになり兼ねず、当面の活動のスパンを教師教育ないし教師支援の在り方の模索というあたりにしぼっていくつもりです。そのために、夏前にアンケート調査を一つお願いすることになると思います。また８月１１日（日）に岐阜大学で開く予定でおります第２回 TOSM シンポジウムでは、そのあたりの議論を主なテーマにしたいと考えております。興味のある方々の参加をお願いしたいと思っております。

また、これまでの TOSM の活動や私自身の三重県高校数学研究会との関わりにつきましては、会誌 [7],[8],[9],[10] に書かせて頂いておりますが、このたび研究会から美杉セミナーのまとめを出される折りに私から見たまとめを書かせて頂きましたので、それもご覧ください。

以下の文献の中の数学の本は、この二つの話を準備しているとき、準備のために読んだか、たまたまこの時期に読んでいたものです。どういう形で話に影響を与えているか見極める時間もないので、思い付く限り挙げておきます。

参考文献

[1] 足立恒雄 『フェルマーの大定理が解けた!』講談社ブルーバックス B1074(1995)

[2] L.V. アールフォルス 『複素解析』(笠原乾吉訳) 現代数学社 (1979)

[3] 上野健爾 『代数幾何入門』岩波書店 (1995)

[4] 飯高茂＋上野健爾＋波川幸彦 『デカルトの精神と代数幾何 (増補版)』日本評論社 (1993)

[5] アンドレ・ヴェイユ『数論　歴史からのアプローチ』(足立恒雄＋三宅克哉訳) 日本評論社 (1983)

[6] 梅沢敏夫＋後藤達生 『複素数と幾何学』培風館 (1993)

[7] 蟹江幸博 「数について（美杉セミナー ’９１）」’92 年度数学研究会誌 36 号、三重県高等数学教育研究会 (1992),3-41.

[8] 蟹江幸博 「TOSM ポスト」’93 年度数学研究会誌 37 号、三重県高等数学教育研究会 (1993),2-44.

[9] 蟹江幸博 「数学を語るのか、数学で語るのか（美杉セミナー ’93）」’94 年度数学研究会誌 38 号、三重県高等数学教育研究会 (1994),2-39.

[10] 蟹江幸博 「数学の危機なのか、数学教育の危機なのか（美杉セミナー ’94)」’95 年度数学研究会誌 39 号、三重県高等数学教育研究会 (1995),10-61.

[11] 蟹江幸博 『美杉セミナーについて – 特に’94 と’95 のまとめ – 』「数学を楽しむ高校生のためのセミナー」（９４年度、９５年度）のまとめ，三重県高等学校数学教育研究会 (1996),8-33 ページ。

[12] 桐村信雄＋渡部隆一 『関数論の演習』森北出版 (1961)

[13] 小平邦彦 『幾何への誘い』岩波書店 (1991/Oct.23)

[14] 佐藤宏樹『複素解析学』現代数学ゼミナール 15、近代科学社 (1991)

[15] 戸田盛和 『楕円関数入門』日本評論社 (1976/Dec.10)

[16] 難波誠 『複素関数　三幕劇』朝倉書店 (1990)

[17] 難波誠 『代数曲線の幾何学』現代数学社 (1991)

[18] A. フルヴィッツ＋ R. クーラント 『楕円関数論』(足立恒男＋小松啓一訳) シュプリンガー数学クラシックス (1964)

[19] E.T. ベル 『数学をつくった人々1-4』(田中勇＋銀林浩訳) 数学新書、東京図書 (1937)

[20] L.S. ポントリャーギン 『連続群論　上下』(柴岡泰光＋杉浦光男＋宮崎功訳) 岩波書店 (1954)

æ