

初等・中等教育に数学を取り戻す

蟹江 幸博
三重大学教育学部

目次

1	はじめに	1
2	学力の低下は数学離れなのか ¹	3
3	TOSM ポスト	10
3.1	TOSM ポストの質問集（1回から4回まで）	11
4	第5回 TOSM ポストの質問	13
4.1	アキレスと亀	13
4.2	$0.99999\dots = 1$ の問題	14
4.3	数学という教科について	16
4.4	角度の定義	17
4.5	小町算について	17
4.6	タレスの方法について	20
4.7	すうじってなんですか？	20
4.8	複素数平面	22
4.9	分数の割り算	23
4.10	ピタゴラスの定理は $c=a+b$ ？	28
4.11	大学の先生も悩ます初等幾何の問題	29
5	TOSM 活動について ⁴	31
6	ポスト問題 4.11 の解答の図と参考文献	34

1 はじめに

去年から美杉セミナーのレジメを会誌とは別に刊行するようになって、会員には両方配布されるということなので、重複しないようにテーマを分けることにしました。1996年8月の美杉村での高校生向けの講演と10月4日(金)の三重県総合教育センターでの高校の先生向けの講演の数学的部分の内容については、2つ分まとめてレジメ[16]の方に掲載することにしました。タイトルはレジメとこの記事をあわせたものに対して、とお考えください。

この会誌には、前回の会誌の記事[12]以降のトスム(TOSM)の活動と、センターの講演の教育活動に関する部分を掲載させていただくことにしました。2節は総合センターの講演序文を資料の再録したもので、5節は去年の8月に行った第2回TOSMシンポジウム資料の序文を再録したものです。多少内容に重複があることをお許しください。去年の秋以降のことを述べて、前書きにしたいと思います。

さて、去年の6月2日TOSM三重のホームページを作りました。現在のアドレスは

TOSM 三重 : <http://www.com.mie-u.ac.jp/~kanie/tosm/>です。これにより、TOSM活動の幅が広がったと思います。まだまだ利用できる人の数は少ないのですが、津高校をはじめホームページを持っている学校もちろほら見受けるようになり、進路指導上の必要性和便利さからインターネットを利用している学校も増えてきているようです。ぜひ、TOSMのホームページをご利用ください。

[3]の最後に挙げた「推薦図書」も内容を更新しています。本のデータだけではありませんが、当時の10倍以上の本のデータをホームページの中の「ほんの、本のリスト」というページに載せてあります。本の購入の際や生徒への読書指導の際にお役立てください。また、2枚の掲示板も用意し、教師の方の本の推薦文と児童・生徒の読書感想文を募っています。これもぜひご利用ください。

また去年の夏は、「数学的概念に対する教師と学生の自己認識について」のTOSMアンケートにも協力いただき有り難うございました。それらの結果については、[13], [14], [15]にまとめてあります。またホームページにも一部掲載してあります。ご意見をお寄せください。また、これからもご協力いただくことがあるかと思しますので、その節はよろしくお願いします。

また6月から、月に1度TOSM三重月例会を行っています。高数研の基礎数学部会の要請で始まったようなところがありますが、その経緯・毎回の報告・予定などもホームページに掲載してあります。小中学校の先生の参加も期待しているのですが、今まだは高校の先生のみ参加になっています。どなたでも結構ですので、奮ってご参加ください。

もちろん、TOSMポストへの質問も、ホームページの掲示板でできるようにしてあります。これについては節を改め、3,4節で述べたいと思います。

これまでは、僕の方からの働きかけの場が高数研を通してしかなかったのに比べると、まだまだ参加は少ないながらホームページを通して広がっている手応えを感じています。そのせいか、最近は会う人ごとにインターネットとかホームページとか言っているようですが、教育がインターネットに取って代わるなどというようなことは決して考えておりません。

クリフォード・ストールという天文学者がいます。以前バークレイで大型機に侵入するハッカーを追跡しその顛末を書いた本がベストセラーになりました。彼の最近の本『インターネットはからっぽの洞窟』[18]本の中には、繰り返しインターネットを過大に評価することの危険性を説いてあります。彼の言うことはほとんどそのまま同意できるものです。

インターネットに接続しているか、ホームページの更新をしているかの毎日ですが、インターネットの欠点も分かっているつもりです。しかし、補助として使うのなら十分に役に立つものと考えています。三重県高数研のような強い組織の中にも、数学教育上ふと困ったり悩んだりすることが起こると思います。そんな時ホームページをひっくり返してみてください。何かが発見できると思います。また期待するものがなければ、掲示板に書きこんでください。時間の許す限り、対処します。

2 学力の低下は数学離れなのか¹

¹ 1996年10月4日(金)に三重県総合教育センターで行われた講演資料の序文として書いたもの

いつも表題を書いてから中身とのギャップを感じて自分でも嫌になるのだが、そのギャップはしようとする事と現実に出来る事との違いなのかも知れない。三重県総合教育センターで高校の先生相手に話を頼まれるのはこれで2度目で、その度に何の話をしていいか悩むことになります。

前は少し数学でも良いということだったので、楢円積分の入り口の話をしてしまった([12]に記録がある)。多分難しすぎただろうと思います。それで良いと言ってくれる人もいましたが、中身が分かったからというより、たまにはこんな話で気分が変わるという感じだったのでないでしょうか。ある種のカタルシスがあって、数学に対する感性が少し刺激されたとしたらそれで良い、と僕も思っていました。

去年は4月の初めから、美杉セミナーとセットでずっと話すことを考えていて、だから結構準備もしたのです。しかし、今年は忙しくてほとんど準備が出来ませんでした。

ご存じの方も多いと思いますが、現場の教育(高校だけでなく)に対して何かしらのお手伝いをしようと、4年ほど前からTOSM(Teaching of School Mathematics)というグループを作って、活動を続けています。

他の二人のメンバーである福井大学の黒木哲徳氏と、岐阜大学の中馬悟朗氏はそれ以前からも数学教育に関わって来られていました。TOSM発足の年の秋、名古屋大学で数学会の集まりがありました。その会場のあちこちで、何人かの数学者に数学教育の現場に対する数学者の責任の問題を個別に議論しあいました。話す人を選んでいることもあり、あらかじめ賛同して貰えるのですが、現実に何か行動を起こすと、なかなか難しいものがあります。しかし、始めなければ何も出来ません。賛同を得た人の中からとにかくやれる人でと、始めることにしました。

しかし、何しろ素人(僕は特に)のこととて、何をすることが出来、何をすることが望まれているのかについて全く分かっていませんでしたし、それを知る手段もありませんでした。何をすべきなのか、ということばかり考えていたようです。そして、これまでは暗闇の中で手探りに進んできたような気がしています。

TOSM発足の1年前、旧知の四方さんから、数学コンクールの設立に加わるようにという電話を貰いました。その設立の会議で、松原さんを始めとする三重県高数研の方々と知り合うようになったのです。忙しい現場の教師の方々が意志を持った組織体として数学教育に関わっ

ておられるとは、もちろんそれが職業だとはいえ、実は思ってもいなかったことでした。何度か話し合ううち、僕が現場に対して持っていない絆をこの会を通して持つこと出来ると思い、会の方でも利用価値を認めていただいたようで、今日までの付き合いが始まったのです。

それでもこの間は、僕の方から主体的に取り組む場合の対象の不透明感にいらだつことが多かったようです。誰に語れば良いのかということですね。

始めの頃の試行錯誤の様子とTOSMの現況については、8月10日に岐阜大学で開催した第2回TOSMシンポジウムの資料の序文(5節に再録)を見てください。現実的に唯一の活動であったTOSMポストについては3年前の高数研の総会でその趣旨や状況を説明し、それ以降寄せられた質問の回答を毎年の会誌に書かせて貰っています。シンポジウム資料にTOSMポストの4回までの質問と5回目の質問を暫定的な答えと共に掲載しましたので、ここでも、それ以降に寄せられた質問を含めたものを含めて、再掲しておきます (§2,3 参照)

そんなわけで、始めはしたものの自分でも満足の出来ない状況にあったし、さらに去年はメンバーの一人である黒木氏が1年間外国へ出張することになり、TOSM活動も結局は自分一人で出来ることに限定されることになりました。そして、彼が帰国してまだ集まりをもていない今年の2月に、ある出来事が起こりました。

志賀浩二氏と上野健爾氏(京大)の呼びかけで熱海で、数学教育の現状に対して数学者が果たすべき役割について議論するシンポジウムが開かれました。彼らが数学会の中でこのことに関心を持ち打開すべき能力と責任を持っていると思った2,30人の数学者を集めて、この問題を掲げ、現況と各自の取り組みを話し合い、今後の問題点を討議するというシンポジウムでした。

討論の大半は大学における数学の講義の水準や内容などが問題になりはしたのですが、普段から持っていた不満を互いにぶつけ合いかなりの激論が戦わされました。こうした議論は散発的には色々な所で、いろいろな形でなされていましたが、こうした議論をしそうな数学者を一同に集めての会議は初めてだったのではないのでしょうか。しかも2泊の会議だったので、毎夜夜中まで話し合っ、(共通の)結論めいたものは何一つ得られはしませんでした。皆それぞれに決意を新たに、決意表明までせざるをえない状況が生まれたのです。

熱海シンポジウムから2カ月後の新潟大学での学会で、志賀浩二と上

野健爾の両氏から紹介されて、シュプリンガー社の本の翻訳をすることになりました。E. ハイラーと G. ワナー著の *Analysis by Its History* という本です。熱海シンポジウムの発言のせいで、引き受けざるを得ないような状況だったし、学会の会場に出展している本屋のブースでこの本をパラパラと眺めた所、訳す価値のある本だと思ったので引き受けることになりました。

実は、世界大戦が終わった頃に成立した大学の微積分のカリキュラム(それが僕らの世代の受けたカリキュラムなのですが)を実際に行うことが、今、日本ばかりでなく世界中の先進国でそのまま実施することが困難になってきています。そのため、ハイラーとワナーは何年もの講義の経験の集大成としてこの本を書いたのです。347 ページの本文は4章に分けられ、前の2つの章は解析学の生い立ちから成立までをその時代の厳密さにしたがって述べ、後半の2章は19世紀末の数学の基礎の反省の上に立って現代数学として再構築し直す、という書き方がしてあります。

ふんだんに原文の引用(多くはラテン語なので参っているのですが)がされ、数学そのものがいかに育ってきたかが体感できる内容になっています。日本人には決して書けそうにない本ですし、こういう文化を日本に移し替えるためにこの本の翻訳を引き受けることにしました。

これが忙しさの一つ。

また、後出の資料序文でも述べたようにTOSM 三重のホームページを開設しました。ページの中身を膨ませていくうち、新しい教育の可能性についてひしひしと実感するようになってきました。質問が減ってきたTOSM ポストのための掲示板を作り、直接質問を受けることが出来るようにもしました。少しずつ、これまでとは違った形の質問が入るようになってきています。ポストとは別に掲示板を用意し、直接に現場の方々との交流が出来るようになっていきます。

確かにまだまだインターネットは普及していませんが、去年までのことを考えれば急速に普及しつつあるのも確かです。100校プロジェクト以外は、全国的にも国立大学の付属学校以外には、特に積極的な私立学校位にしかホームページはなかったものです。それが、今年になって県下でもかなりの高校がホームページを持つようになりました。個別に色々な事情があるにしても普及のスピードはこれから増していくだろうと思われれます。

これらの学校でも、実際にどのような内容のページにし、どのよう

な利用をするのかという点については試行錯誤の域を出ていないものが多いようです。ホームページを開かなくとしても、ホームページを見に行くことが出来るようにすることは容易しいことです。ほとんどの大学はホームページを持っており、大学自体が自分自身の情報を発信しています。これを進路指導に生かさない手はありません。ということだけでも、ホームページを見ることのできるコンピュータを何台か、生徒に「自由に」使えるようになっていけば、教育のあり方はさらに変化していく可能性があります。

このセンターでもすでにすべてのスタッフが電子メールのアドレスを持つようになったと聞きました。ホームページ開設も間近でしょう²。県内の遠隔地の教育が、それほど地域の不利を感じないで済むような時代が、すぐそこに来ています。

そうした時代では、教師個人個人の能力と主体性・思想性が問題とされるようになるでしょう。生徒に何を伝えたいのか、それを持たないでいると、インターネットの向こう側の教師たちと比較されることも起こりえます。

生徒に何を伝えるかを問題にしようとするとき、教師それぞれが自分の中に伝えるべき何物かを持っているかどうかを自問しなくてはなりません。人間性もいいでしょう、生徒の面倒を見ることでの信頼感も大切でしょう、しかし、数学の教師は内なる数学をこそまず、豊かにしておくべきではないでしょうか。目まぐるしく変わる指導要領に振り回されないためにも、もしかすると来るかもしれない指導要領なしの時代に対応するためにも。

ホームページ作りは、面白いことも多いけれど、手間も時間もかかってなりません。これも忙しさの一つ。

さらに、直接に教師の方々との接触を持つべく、TOSMの月例会を始めました。県内の初等・中等教育での算数・数学教授者のためのTOSM マンスリー・セミナーの第1回は7月で、8月からは原則として月1回土曜日に、三重大学教育学部4階の数学講究室で開いています。

実は明日の10月5日(土)にも、第4回の月例会があります。興味を持たれた方は、是非参加してください。高数研の基礎教育部会の方から、翻訳中の本について話が聞きたいという要請があったことが切っ掛けになったものです。前半は数学に浸り、後半は教育の諸問題を討

² 1997年4月現在、既に開設されています。三重県総合教育センターのURLは <http://sky.mpec.tsu.mie.jp/> です。

論するということにしています。

そんなこんなで忙しく、講演を準備している時間がありません。そこで、翻訳中の本の一部から話題を拾ってお話しすることにしました。

数学教育の問題で、僕らに分かっていることは大学に入ってくる学生の数学の学力が極端に低下しているということです。多分、高校でも同じでしょう。そして中学でも。小学校はそれほどでもないようなのですが。

これは何の所為でしょうか。受験制度の所為でしょうか？指導要領の所為でしょうか。社会の変化の所為でしょうか？

理科離れや数学離れは、時代の流れなのでしょう？

数学がこの社会に必要でなくなったのでしょうか？

社会にとって必要でも、これからの社会を担う人々にとって学ぶ必要のないものになったのでしょうか？

いえ、益々科学技術が進み、それなくしては人口問題も環境問題も解決することは出来ず、そしてそれを支える数学は必須なものになっています。

この社会から疎まれなければならないような、どんな悪いことを数学はしたのでしょうか？

理科離れや数学離れは、本当にあるのでしょうか？

あるとしたら、放置しておいて良いのでしょうか？放置しておくことが出来ないのなら、何をすることが出来るのでしょうか？³

数学でも色々な試みがなされていないわけではありませんが、ほとんど成功していません。実は数学よりも物理の方が問題は深刻だという話もあります。しかも物理の方ではずっと前からこういう問題を考えてきています。

例えばワインバーグというノーベル賞物理学者の書いた『電子と原子核の発見』[19]という本があります。ハーバード大学での講義を本にしたものですが、その序文を少し見てみましょう。大学の講義でさえ悩んでいる様子が分かります。

「科学の歴史に関する書物の多くは、科学的知識の不十分な読者を対象に書かれているために、歴史の記述が概説

³ この当たりのことに関連して、数学セミナー 1997年5月号の巻頭言でも少し述べてみました。ご一読ください。

的で浅いものになっている。逆に科学の知識を十分に持った読者を対象としている本は、一般の読者にとっては、とっつきにくい内容となっている。…」

「…多くの科学者と同様、私も科学上の発見が二十世紀の文化の中で最も素晴らしいものであると思っている。それにもかかわらず、科学以外では十分教養のある人たちが、科学の基礎知識が不足しているために、文化のこの偉大な部分から切り捨てられているということは、一種の悲劇でさえあると思う。

しかし、よく考えると、これは当然なのかもしれない。というのは、物理学の教養を身につけようとしている人に対して、専門の科学者が受けるのと同じ昔ながらのたった一つの決まりきったコースしか用意されていないからである。…これは物理学者になろうとする学生には理想的かもしれないが、一般の人たちには渡り切ることのできない広大な砂漠のように見えるのではないかと思われる。

…私たち物理学者は奇妙な人種であって、標準的な物理学のコースで学んだ知識をもとに、いろいろな現象を計算することに非常な喜びを感じるのである。…ピアニストになるわけではない人に、単純な音階練習を楽しめと期待するようなものだからである。科学者になるわけではない人たちを対象に、物理学の基礎についての本を書くとき、このことが最大の障害になるのではないかと私には思われる。

この問題を解決するために…この本では長ったらしい古典物理学の紹介から始めるかわりに、直ちに、読者を二十世紀の物理学のトピックスへと招待することにした。そして、それぞれのトピックスを、それを理解するために必要な古典物理学の概念や方法への導入部であると位置づけたのである。

…この本では、素粒子物理学の原理を説明する順序にしても、物理学者がおなじみの論理的な順序になってはいない。…このような並べ替えは必ずしも欠点であるとは思わない。私の経験から言えば、物理学や数学について私が知っていることの大部分は、それがどうしても必要になったときとか、研究をやっていくために学ばねばならない時

に勉強したものである。…この本の書き方は、科学を専攻する学生を対象に企画された多くの本や講義のやり方より、「研究中の科学者が実際の知識を修得する方法」により近いといえるかもしれない。」

長い引用になりましたが、「物理」とあるのを「数学」と書き替えれば、ここでの問題点はそのまますの教育法に対する問題点になっています。この種の非難に正面から応えようとする努力は、数学においてもなかったわけではありませんが、成功している例があるとは言えません。

ここで提案されている「現代の成果を直接述べて、それに必要な事項への導入にする」という解決法は、数学ではあまり有効ではないのです。数学を学ぶうえで重要なのは、事実を沢山知ることよりも、その事実を得るためにどのようなプロセスが可能で必要なのかということだからです。ここで避けるべきだといったそのことこそが、数学を学ぶことの核心だからです。

「事実」が、現実に我々を取りまく世界の「事実」である以上、どんな難しい「事実」でも「事実」であるだけで面白いし、「事実」の提示だけで人を引きつけることができる自然科学と違って、数学の「事実」は我々を取りまく環境の「事実」とは思って貰えないという弱みがあります。「数学的自然」に分け行ったものでなければ、数学の「事実」の面白さを感じることも出来ない。数学には馬の前にぶら下げる人參がありません。

数学の重要性を認識することも、数学の面白さを感じることも、一定程度の数学の勉強の上でしか実現しません。

「広大な砂漠」の中にはオアシスもあり、「砂漠」の向こうに豊かな大地があることをどう納得させ、ラクダも連れていない旅人に「砂漠」に足を踏み入れさせることができるでしょうか？

高校生を数学へ取り戻すことは、かくも難しいことなのです。

高校生が教師を信じられるかを決めるのは、教師がラクダになれるのか、教師自身が「砂漠」を越えてきたことを信じさせられるのか？ということではないでしょうか。

3 TOSM ポスト

TOSM ポスト(算数・数学教育の質問箱)は続けてはいるのですが、ポストへの投函がなかなか増えませんでした。インターネットが普及し、ホームページに比較的簡単にアクセス出来るようになってきておりますので、TOSMのホームページを三重大学と岐阜大学に作りました。そこに、質問集と、回答の公刊されたものの雑誌、書籍等の情報を載せてあります。また、ポストへの投函(質問すること)も、「TOSM ポストの掲示板」(http://www.com.mie-u.ac.jp/~kanie/tosm/keiji03/k_main.htm)で出来るようにしました。おおい質問も増えて参りました。質問の数が飛躍的に増えていくようでしたら、人手が必要になるかもしれませんので、賛成して下さる方のTOSMグループへの参加を募ることも考えています。

さて、そうなるにはまだ多少の時間がかかるかもしれませんが、そうなったとしてもあくまでも通常の郵便物での質問の補助手段と考えております。郵便物での質問も「TOSM ポストの掲示板」に挙げていくことにします。8月10日に第2回TOSMシンポジウムを岐阜大学で開催しましたが、その資料としてポストの報告をするために、第5回のポストの質問に関して暫定的な回答をすることにした。掲示板にも暫定回答を与えたので、その後の質問にも出来るだけ早く暫定的な回答を与えていくことにしている。

正式な、というかきちんとした回答は、出来ればまた来年度の高数研の会誌に書かせていただきたいと思っています。

これからも奮って、算数・数学教育上の疑問点を、三重大学教育学部数学教室内TOSM三重ポストまでお送り下さるか、上記掲示板にお書き込み下さい。

3.1 TOSM ポストの質問集(1回から4回まで)

どんな質問を受け付けているかを示すために、ここまでに投函された質問のリストを挙げておきます。

1. 第1回TOSM ポストの質問

- (a) 辺の長さがすべて異なる直方体の展開図はどれだけあるか?

- (b) 円周上に n 点を取り互いに線分で結ぶとき、円内にできる領域は最大幾つか？ n だけで簡単に表わされるか？
- (c) 正多角形を描きたい。円を使って描くように指導してある教科書があるが 360° を辺の数で割って整数にならないもの、例えば正 7 角形や正 11 角形などを分度器とコンパスで描くことができるか？
- (d) 直三角柱がある。すべての側面を横断するように平面で切った切り口は三角形になるが、正三角形になることがあるか。あるとしたらその長さは底面の三角形だけで一意的に定まっているか。出来れば底面を与えたとき、その正三角形を簡単に描くことができるか？
- (e) $\sqrt{24x^2 + 8x + 1}$ が有理数となる有理数 x にはどんなものがあるか？

2. 第 2 回 TOSM ポストの質問

- (a) 正方形を縦横に並べて大きい正方形を作るとき、大小取り混ぜて多くの正方形ができる。 n 倍にしたときにできる正方形の数は分かるが、同じことを正三角形でしたら幾つになるか、公式があるか？
- (b) 三角形の辺上の点を通り、三角形の面積を 2 等分する直線を引く問題は中学の教科書にあるが、最初に与える点が辺の上にない場合にも出来るのか？
- (c) 1. 新しいカリキュラムに向かって、数学の目的は何なのか。どう設定するのがいいか。
2. ほとんどの生徒が文科系を志望しているので、1 年、2 年と学年が進むにつれ実力テストなどで成績が下がる。数学が好きになるような興味付けは出来ないか。

3. 第 3 回 TOSM ポストの質問

- (a) 高校数学で、数学的帰納法を $n \geq 0$ (n は整数) に対して証明する時、第 1 段を $n = 0$ で示して第 2 段を $n \geq k$ ($k \geq 0$) に対して示して良いでしょうか。それとも、高校では帰納法

は自然数である n に対するものなので、第 1 段で $n = 0, 1$ に対して示し、第 2 段を $n \geq k (k \geq 1)$ に対して示した方が良いでしょうか。

- (b) 長方形の縦と横はどうして決めるのですか。倒せば縦と横が変わりますし、斜めに置いたら、縦と横とをどうして決めたら良いのでしょうか。(円錐の場合などは、倒しても高さは変わらないのですが、長方形だと変わるような気がします。)
- (c) 円を投影したら何になるか。楕円になると思うが、元の円が内接する正方形を考えて、その投影が台形になる場合に、相対する接点を結ぶ線分の交点は一体何になるのか。

4. 第 4 回 TOSM ポストの質問

- (a) ハノイの塔の柱が 4 本になったらどうなるのか？
- (b) 空集合の記号 \emptyset はどう読むのですか。ギリシャ語のファイではないということですが。
- (c) 対偶が真だということと背理法は違うのだという話がありますが、本当はどういうことなのでしょう。

第 1-4 回の分についてはこれまでの会誌 [3], [4], [10] に解説を述べてあるので、第 5 回の質問についての解答を次節です。しかし、時間がないので、ホームページの掲示板でしておいた暫定解答を補足するだけで許していただきたい。しっかりした解答が望まれるものは機会を改めてということにしたい。

4 第 5 回 TOSM ポストの質問

ホームページでの質問を認めたので、古くから問題にされており、それなりの回答もいろんな角度からなされている問題が投函されることが多く、次年度の会誌の原稿の締切までゆっくりと考える、というか放って置くつもりでいつもは回答をしない、という方針です。半年も放っておくと、無意識のうちに考えるというより、どんな立場で語るの

かという覚悟が出来てくるからだ。慌てて回答を書いたりすると、兎角に、言い過ぎてしまう。

回答は質問者に応じた形でしています。ホームページ開設の記念と、丁度夏休みだったので、児童・生徒からの直接の質問も夏の期間だけ受け付けていましたが、その種の質問は一つだけでした。掲示板の形式が子どもには馴染まない形だったのかもしれないし、インターネットを自分で扱える環境にいる子どもが少ない所為なのかも知れません。子どもの代理で教師の方が質問していただいてもいいですが、まだまだ一般の教師が気軽にネットサーフィンできる状況にないようです。しかし、これは急速に改善していきたくらうと思っています。

4.1 アキレスと亀

「アキレスと亀の話はどうなっているのでしょうか？解決されたという話も聞きますし、解決されていないという話も聞きます。どちらが本当でしょうか？」

質問者：上垣 渉 (三重大学教育学部)

掲示板上の回答

この問題の本質は、「無限」と「無限の質」の意識化という点にある。19世紀末に集合論が確立されたとき、数学的には解決されたといつて良い。しかし、カントールの無限を手づかみにするその精神が、人類にとって受け入れられるものか否かという哲学的な懐疑が、それ以降連綿と続いている。ほとんど哲学の領域である。哲学を宥めるために、数学基礎論ないし数理論理学という数学の分野もあって、その間を埋めているのだが、面倒なことの嫌いな（僕を含めた）数学の大衆からは異端視されている、というのは言い過ぎかもしれない。

質問者が違えば、また別の解答をするだろう。丁寧に書けば、一冊の本になる。希望があれば考慮しましょう。

実は Zenon.tex というファイルの名前まで用意し、数ページにわたって議論する予定でしたが、時間がなくて断念。

この問題は有名な「ゼノンの逆理」と呼ばれるもので、4つあり、完全な形で残っているのは3つですが、どれも結局「無限の質」の混同によるものです。可算無限と連続無限の違いということもできるし、手

続きとしての無限と実無限との違いとも言える。論点の強調の仕方によって議論の分かれるところだが、所詮ニュアンスの問題にすぎない。

4.2 $0.99999\dots = 1$ の問題

「 $0.99999\dots = 1$ が分からない。 $0.111111\dots = \frac{1}{9}$ で $0.999999\dots = \frac{9}{9} = 1$ というのが納得できない。

$x = 0.11111\dots$ とおくと、 $10x = 1.11111111\dots$ で、これを引いて $10x - x = 9x = 1$ だから $x = 1/9$ という証明は、何だかおかしい。

例えば $0.11111111111\dots$ が、100 桁だったとしたら、 $10x - x$ の計算で 100 桁目に 1 が残るような気がする。」

このように言う中学生がいますが、どのように教えたら良いのでしょうか。

質問者：山田 健一 (三重大大学附属中学校)

掲示板上の回答

この問題は多くの場所で語られ、それなりに解決法が語られているが、本質的には中学生はこの問題に正しく取り組むだけ成熟していない(勿論、特別な生徒はいるので、その場合は別)ということに尽きる。従って、その種の議論ではいかに誤魔化すかという論点で語られることが多い。

数学的には、無限と向かい合えるかということであり、無限を実体として認識できるかということである。従って、ことは極めて難しいのである。中学生向けの説明が色々考案されているが、手品のような技術で誤魔化すべきではないと思っている。

実際に現場で生徒に説明を示してみても、どんな説明が受け入れられやすいか、経験をこの掲示板に書き込んでいただきたいと思う。

とは言うものの、山田氏に答えないで済ますわけにもいかない。とりあえず、まともに答えてみよう。(詳しくはまた別のところで)

答え方は2種類の方向があると思う。

一つは勿論、「例えば $x = 0.111111111\dots$ が、100 桁だったとしたら」 という仮定が間違っているということをお納得させること。100 などではなく無限に続いているのだということをお、いろんな形で納得させる。しかし、これが一番難しい。無限に続いてしかもそれがただ一

つの数を表すということを納得させなければならない。それでも、これが正しい方法なのである。

もう一つはいわば裏から攻める方法。つまり「100桁だとしたら、 $10x - x$ は100桁目に1が残る気がする」という生徒の主張を全面的に肯定するのである。そして、 x が100桁だとしたら x は $\frac{1}{3}$ とは違うが、その違いは小数点以下100桁でしかないことを納得させる。1000桁だとしたら、 x と $\frac{1}{3}$ との差は $\frac{1}{10^{1000}}$ であり、 $0.111111\dots$ がどれだけ続いていても有限の所で止まれば、 x は $\frac{1}{3}$ ではありえない。しかし桁数が増えていけばどんどん $\frac{1}{3}$ に近づいていく。だから、 $\frac{1}{3}$ を小数で表そうとすれば無限に続く $0.11111\dots$ と表す以外に方法はないことを納得させる。

数学は一つなのだから、突き詰めてみれば皆同じことなのだが、教育技術的には、生徒の心の中の障壁を如何に回避するかが問題だということである。

これも質問者がこの種の数学教育上の議論を熟知しているという前提でした、解答である。したがって、練達の教師以外には分かりにくいかもしれない。しかし、これは実数論をやる以外に解決できない問題であって、実数論の本質のどこを仮定するかで、解答も違ってくる。それは現場の教室で、生徒の顔を見ながら、実数に対して持っている観念を拾い上げるという形でしか対処できないのも事実である。それゆえにこそ、大学での数学の勉強をしっかりとっておいて欲しかったのだが。

4.3 数学という教科について

「数学なんて、なんの役に立つかわからないという質問をよくされます。数学の理論はいろいろなことに使われているから、大切なんだと言うことにしているのですが、そうすると、そういう仕事につく人だけ勉強すればよいといった返事が返ってきます。形式陶冶の面を言うのもなんだかなあ…とと思っているので、何かよい理由があれば教えてください。」

質問者：松井 真治 (福井県立盲学校)

掲示板への回答

実に答えにくい質問である。問題はこうした質問をする児童・生徒が本当に「数学を学ぶ」わけを訊ねているかどうか分からないとい

う点にもある。

教育を受けること全体に対して、学校に行くことに対して、この社会に生きさせられていることに対して、彼らの憤りと不満の槍玉に、勉強しないと成績が上がらない数学がなっているのに過ぎないことが多い。

そんな時、数学の美や有効性を説いても、逆効果であることが多い。こうした質問は相手を見て答える必要があるし、そうすることが現場の教師の役割なのである。

こうした質問に一律に答えることは出来ない、答えてはいけないのだというのが、一言で答える場合の回答になる。

半年、答えることを待って貰うことにしたい。生きていれば、答えることにする。

[1月経って、追加(9/25)]

第2回の月例会のときにもこの話題を話し合った。もちろん結論はない。

長い話の中で、結局「公教育」というものをどう考えるのかということが議論の根底にないと話がかみ合わないことのような気がしてきた。

「公教育」に携わっている人の中では少なくとも、時々意識し、論議しておく必要があると思います。その種の公開討論を新しい掲示板でしてみようかと考えています。

これは、「公開討論会1(公教育の意味) - - 何で、ボク、学校へ行くの? - 」というホームページ上のパネル討論・掲示板として実現している。TOSM 三重ホームページから掲示板メニューを選んでください。

現在は、「公開討論会2 - 飛び級飛び入学」というパネル討論・掲示板も開いています。ぜひ討論に参加してください。

4.4 角度の定義

「ベクトルの内積の定義の仕方に、二つのベクトルのなす角を用いる方法と、成分を用いる方法があるが、2次元、3次元では二つのベクトルのなす角が分かるが(?)、4次元以上ではなす角が分からない(?)から、成分を用いて内積が定義され、その内積を用いて、二つのベクトルのなす角を定義することになる。

そこで、一般に角度をどのように定義するかを教えてください。」

質問者：丸林 哲也 (三重県立津西高等学校)

掲示板上的回答

一言で言えば、ベクトルのなす角と、内積を用いて定義される角とは別のものであるということになる。実は「幾何的直感と対称性」という論文の中で、立体角の意味を論じたとき、角の問題を論じておくつもりになっていた。しかし、とても長くなりそうで、すでに80ページを越えていた論文の中では、書く元気が湧いてこなかった。今度は是非。

機会は来たのだが、時間がない。協力していただいたTOSMアンケートの各項目について、啓蒙的・啓発的な文章を書く予定もあるので、それまで待っていただきたい。

少しだけコメントをしておけば、2次元の角度とは何なのかということもそんなに簡単なことではなく、平面の等方性と等質性に深く関係している。3次元の時のベクトルのなす角が分かれば、原理的には何次元空間でもベクトルのなす角が分かることになる。

難しい議論をしなくて済まそうというのなら、内積を用いて2つのベクトルのなす角を定義することにし、それ以外に角は認めないことにすればよい。

4.5 小町算について

「小町算というのがあるそうですが、どんな本に載っていますか？」
質問者：家戸 昇一 (名張で学習塾経営)

掲示板上的回答

こういう質問の形が困るんですね。質問のポイントが分かりにくいのです。もっとストレートに質問して下さって結構です。

このままだと、「小町算」とは何かは知っているけれど、もっと詳しい文献が知りたいという意味にもとれるし、「小町算」が何か分からないが、その説明を求めるのが失礼とか悪いのじゃないかと思って文献だけ訊ねているのかもしれませんが。もしかすると、「小町算」という言葉の由来が知りたいのかも知れません。

ですから、質問は出来るだけはっきりとした形でしていただきたいのです。しかし、はっきりした形で質問が出来るときには、疑問の多

くは解消していることが多いということもありますので、曖昧な形の質問をしないようにとは言わないことにします。どんどん質問してください。

家戸さんという方は、何年か前、僕の一般教育の文科系向けの数学の講義を何度か聴講しに来られていました。好奇心旺盛で、熱心な塾の先生です。知人である彼に怒られ役になって貰いましたが、許してくださいと思います。

さて、「小町算」ですが、初耳でした。西洋数学の伝統下にあって、和算が成し遂げたものの多くは忘れられています。数学の研究の点からは振り返ってみても余り労に値しないと思われそうですが、算数・数学教育の示唆を与えるという点ではもっと省みられても良いのではないのでしょうか。

「小町算」は Four Fours(4つの4)と同様の、謂わば数字の語呂合わせの遊びのようです。数字を使って遊んでいるうち、数の世界に親しんで貰えば、それなりの教育効果が上がるというわけです。

Four Fours は、数字の4を4つ並べて、その間に四則の演算と括弧を好きな形で挟み込んで、いろんな値を得ようとするパズルです。

小町算は、1、2、3、4、5、6、7、8、9、10をこの順に並べてその間に四則の演算と括弧を好きな形で挟み込んで、得られた式の値が100になるように出来るか?という問題です。

1から10というのも、当時漢字文化圏では10進記数法がなかったので、漢字一字で表記できる最長の連として、一、二、三、四、五、六、七、八、九、十が選ばれ、次に一字で表現できる「百」にするという遊びが考案されたのでしょう。

逆順の、十、九、八、七、六、五、四、三、二、一に対して行う小町算もあります。

小町算という理由は、解法を語呂合わせで、和歌に読み込んだものが伝えられていて、歌詠みの代表としての小野小町の名前をとったということのようです。

最も簡単な答えをいくつか、Mathematicaの練習として求めてみました。

$$\begin{aligned}1 \times 2 + 3 \times 4 + 5 + 6 + 7 \times 8 + 9 + 10 &= 100 \\1 \times 2 \times 3 + 4 - 5 + 6 + 7 + 8 \times 9 + 10 &= 100 \\-1 + 2 \times 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \times 9 - 10 &= 100\end{aligned}$$

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 + 6 \times 7 - 8 \times 9 + 10 = 100$$

$$(1 - 2 - 3 + 4) \times 5 \times 6 - (7 - 8 - 9) \times 10 = 100$$

比較的容易に手に入る文献としては、平山諦著「増補新版 東西数学物語」恒星社、がある。この文献に載っていることは、上垣渉氏に教わった。

同著によれば、1から10ではなく、1から9までの数で作るのが本来の小町算らしい。そして、数の間に記号を挟まないことも許すものらしい。例えば、23とすれば二十三のこととするわけだ。代表的な小町算の文献、中根彦循著「勘者御伽双紙」に挙げられている20例では、記号は+ - しか使わず、むしろ演算記号の少なさを誇ってもいるようだ。

+、-、×、÷を使って、正順150例、逆順198例を作ったと平山氏は述べている。

小野小町に振られた深草の少将が、することもない夜長の徒然に、和を99にする小町算を考えたという由来を述べた本もあったが、その出典は明らかでない。99はまた、全てが満たされた数という意味を付けることも出来るためであろう。

小町算は更に一般化され、答えが99や100でなくても良く、またどんな順序でもよいという条件のものも小町算と言われている。

小町算は古くから、計算遊戯として親しまれてきたようであるが、数学的な意味はあまりなく、和算の有名な入門書「塵劫記」にも採られていない。しかし、四則演算の技術を習得させようとする初年度の教育において、計算そのものに、付加価値を与えるものとして活用することは可能であると思われる。

4.6 タレスの方法について

「タレスはピラミッドの高さをその影を測って求めたということを知りましたが、ピラミッド本体が邪魔になって、影のどの部分を測れば良いのか分かりません。実際にはどのようにしたのでしょうか？」

「数学の話題から」という講義の中で、影を測ってピラミッドの高さを求めたという話をしたら、あまり簡単に学生が納得したので、僕がへそを曲げて、学生に本当にそんなに簡単に納得できるのか？と訊いたというのが趣旨。

数学史の本を見れば書いてあるのだろうが、それとはかかわりなく自分の頭で考えてみたらどうなるのか、というのが、学生に対する質問。」

質問者：蟹江 幸博

コメント

これは本質的には水平面をどう決定するかという問題。それに気付けば、あとは方法を考えるだけ。

数学史の本を眺めてみても、三角形の相似でやるのだと書いてあるだけ。あまり安直に考えると実際には実行できないよというつもりだった。校庭に大きな木があったとして、木の根元あたりに障害物があったら、さてどうやるのでしょうか？教室でふと暇な時間ができたら（ないかも知れませんね）、やってみて下さい。

これも `Thales.tex` というファイル名を作って、教育的実験というスタイルの節を書く予定だったが、時間がなくて断念。

4.7 すうじってなんですか？

「学校で習う数字にはギリシャ数字、漢数字、アラビア数字がありますが、どうして計算にはアラビア数字を使うのですか？

できかたが違うのですか？

古い順番はどうですか？」

質問者：木全 知亜紀 (kkk5151@sag.bekkoame.or.jp)

[所属が e-mail アドレスだけなので、どんな人が質問したのか分からず、回答の仕方に困ったが、素直に小学生ぐらいとして回答を試してみた。]

掲示板への回答

質問者がどういう意識で、どういう知識のもとに訊いているのか、分らないので答えにくいのですが、額面どおり、個々の数字を知ってはいるが、他は何も知らないものとして答えることにします。

数字というのは数を表わす記号です。例えば、「あ」と書いて“あ”と読むのはそう決めたからで、決めないと“あ”と読むことはできません。同じことで、“いち”と読むものを「1」と書くのです。しかし数字はさらに意味を持っています。

「犬」と書いて、「いぬ」と読んでも、それが走り回ってキャンキャンと啼く犬であるかどうかは、どこかで決まっていなないといけません。

“どこで決まっているか”という質問はここで答えるようなことではないのですが、歴史が決めているとでも言うしかない....つまり、だんだんと時間をかけて、色々の理由からそう決まってきたということですね。

さて、「1」と書いて「いち」と読むだけならただの言葉ですが、「1」はまた数としての「1」を表わしているということが大切なのです。

色々な数があり、数が数を生み(計算できるということかな)、数の構造がある。というようなことを学校で勉強するのです。

さて、次の質問。「どうしてアラビア数字を使うのか?」ですが、今の所一番便利で、世界中の人が使っていて、これを変える理由がないからということです。

漢数字は古代中国で、ギリシャ数字は古代ギリシャで別々に作られました。ギリシャ数字のもとには、エジプトの数字で、メソポタミアのくさび形文字での数字も数の構造という意味では影響を与えています。でも、学校で習うのは多分ローマ数字のことではないでしょうか?ローマ帝国が世界文明だったギリシャの文化を取り込んでいく際、ある意味で断固として変形したものです。

これらには0を表わす数字がありませんでした。アラビア数字が出来るのはイスラム文化の時代ですが、その前にインドにも古い文明があって、数字も別にありました。そこでは0を表わす数字があったのです。吉田洋一という人の書いた「零の発見」という岩波新書を見るとよく分かると思います。そして、アラビア人がそれまでのすべての数字の良い所を取り入れて便利な数字の体系を作ったのです。だから、もうそれ以上誰も変える気が起こらないのです。

しかし、大切なのは数そのもので、数字はそれを理解するための道具なのです。道具は使ってみないと、その良さが分からないものです。どんどん、道具を使って、数の勉強をしてください。

4.8 複素数平面

「どうして、新しい教科書では、複素平面ではなく、複素数平面になったのでしょうか?一文字でも長いと書くのが面倒です!

また、諸外国ではなんというのでしょうか？英米では、Gauss 平面ではなく Argand Diagram というようですが、」

質問者：古川 昭夫 (SEG)

掲示板への回答

何故、新しい教科書で複素数平面と呼ぶようになったかというのは、非常に難しい問題です。指導要領を決めるのが合議制なら多分こうはならなかったのではないのでしょうか。

しかし、複素数平面と呼んで悪い理由はありませんし、数学的にはその方が言葉の意味としては正しいともいえます。直線に1点とそこからの距離を(向きとともに)付加したものを数直線といいますね。直線と実数とを対応させたものなわけです。したがって、数平面と言ってしまえばいいようなものですが、いかんせん、複素数は数学者が思っているほどにはポピュラーなものではないのです。そこで、複素数と対応しているのだよというわけで、複素数平面という言葉があるのです。

ちょっと、「娘の姫と武士の侍が」といった嫌いはありますが。

それから、ガウス平面ともいうのは、もちろんガウスがこの取り扱いを1832年に発表して以来、数学の世界で認知されるようになったからですが、実はそれより以前、1806年に『虚数を幾何学的に表示する試み』というパンフレットをアルガン Argand というフランス人が発表しているのです。しかし、アマチュア数学者だった彼の主張は数学界には認知されなかったのです。知らない人の方が多かったのでしょうか。

近年、歴史研究も進み、これが明るみに出たとき当然ながら国粹的な傾向のあるフランスでは「アルガンの」ということになっているというわけです。しかし、大切なことは知識が世界の・人類の共有財産になることなのだという立場も正しいし、どちらでもいいとは思いますが、僕はガウス平面でいいのではないかと思います。そして、ガウス平面について最初に出版したのはアルガンだったと覚えていてあげれば。

実は、アルガンより前、1798年にノルウェーの測量技師であったベッセルが「複素数を幾何学的に表示する」ことに関する論文を書いています。当時数学文化からいえばノルウェーは北の果て、しかもデンマーク語で書かれていて、完全に数学界には認知されなかったのです。

「一番」を争っても仕方がないと思います。しかも後世から。この件でいえば、複素数を平面に表現することは、敢ていえば、単なる思い

つきで、そのような表示を持つことによって、複素数の本質をより深く捉え、方程式の理論、複素関数の理論への高まりをどう意識し、理解し、応用するかが問題で、ガウスはそれを十分納得させる提示をしたが、それ以前の人には思いつきの程度からいくらも出ていなかったということが言えるでしょう。

僕は「ガウス平面」でいいと思いますし、欧米でもすべての人が Argand Diagram というわけではありません。

もちろん、歴史研究を否定しているわけでも蔑視しているわけでもありません。今翻訳している本は、解析学を歴史的経緯から説き明かし、現代のあり方を述べている本です。しかし、それは数学そのものの歴史、数学そのものがいかに生い立ってきたかという歴史です。

歴史研究が数学の歴史でなく、数学者の歴史であり過ぎる。そんな気がしています。数学それ自体を愛してほしいと思います。

4.9 分数の割り算

「分数と分数のわり算ではどうしてひっくりかえしてかけるのですか？」

質問者：松本直子

掲示板上的回答

困ったな。なんて答えればいいかな。あなたは、なおこちゃんですか、直子さんですか？

つまり、「初めて算数で分数の割り算をならったんだけど、どうしてそうするのか分からないな、という気持ちの質問なのか」、から、「文字式も習ってまた分数式が出てきたときハタと割り算の意味が分からなくなってしまったという質問なのか」、や、「自分では分かっているのだが、分からない人にどう教えたらよいのか」という質問まで、その途中の段階もいろいろあって、それによって答え方が違うのです。

今度の質問からは必ず、所属の所を書いてください。

今は、分数の習いたてで、計算規則も分数自身の意味もあまりよく分かっていないという質問者だということで回答を考えてみます。もしも、そうでなかったら、もう一度質問し直してください。

結局こういう質問は、分数の意味がどのように理解されているかという問題であることが多いのです。話が少し長くなりますが聞いてく

ださいね。

さてと、…… やっぱり話しにくいですね。

ちょっと聞いてみましょう。

割り算のやり方の理由ですよね？ 割り算の意味は知っていますね？ 分数で割るとはどういうことかが分かっていて、割るときにひっくり返して掛けるのはなぜか？ という質問なのではないでしょうか？

実は、大学で、小学校の先生になる人たち向けの数学の授業をしているのですが、そこで、学生に分数の掛け算を分かっているかどうかを尋ねました。そうしたら、ほとんどの学生が、分かっていないと言うのですよ。ひっくり返して掛けるのは、そうするのだと教わっただけで、理由は習っていないと言うのです。習っていないのは仕方ないとして、今は分かっているのかと尋ねても、分かっていないと言います。

病気の診断と似たようなもので、患者が痛いと言う所ではない所に本当の病気があることが多いのです。

じゃ、掛けると言うのは分かっているのだろうね？

分かっていると言う返事をした学生に聞いてみたら、結局分ったつもりになっているのは自然数（正の整数）の掛け算だけらしいのです。

そうでしょうね。分数の割り算の分らない人の多くは、掛け算が分っていないのです。まして、足し算はもっと難しいのです。

困った顔をしていたら、慰めてくれようとするのか、「半分」なら分るといふ学生がいました。結構ですね。半分から、順に一般の分数の説明ができるから。そうしようとも思って、聞いてみると、また、その「半分」が分らなくなったようです。

大学は、それまで分かっていたつもりの事柄を、全部ひっくり返して、自分の価値観・世界観を作る所だから、こういう話でもいいのですが、トスムポスの質問者は、一体何を期待しているのでしょうか？

説明を始めるとなると、まず、「分数とは何なのか？」を説明しないといけないことになるのです。それで、この質問の答えを書くのが、大変なので、さぼっていましたが、少しずつ、時間を見つけて、書いていくことにしますので、時々、この掲示板を見に来てください。

結局、時間のない所為もあって、これ以上の返事はしませんでした。これが小学校の先生の教え方の質問になら簡単に答えられるのですが、児童の質問というならどの程度分かっている子なのかが分からないと答えようがないのです。しかしここは高数研の会誌ですから、一応の

解答を書いておくことにします。

自然数の計算は分かっているとします。ということは、自然数の演算に関する規則

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (加法の結合法則)

2. $a + b = b + a$ (加法の交換法則)

3. $a + 0 = a = 0 + a$ (加法の単位元の存在)

4. $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ (乗法の結合法則)

5. $a \times b = b \times a$ (乗法の交換法則)

6. $a \times 1 = a = 1 \times a$ (乗法の単位元の存在)

7. $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$ (分配法則)

は分かっているとしてよいでしょう。このとき引き算や割り算が自由に行えないから、それができるように負の数とか分数を考えるのだというのが、普通の説明です。それが間違っているのではないのですが、その時、自由にではないとしても行われている引き算や割り算についての説明が不十分なのではないでしょうか。

群にしてしまえば、逆元の存在が言えていますから、逆元を算法することが逆算法をすることだと言い切れればいいのですが。普通は方程式を解くことという説明がされるようです。

「 $a - b = c$ であるとは、 $a = b + c$ であるような c を求めることである」というのが引き算の説明ですね。しかし、このような c があることしかもただ一つあることはどうやって保証されているのでしょうか。

それが相殺原理 (Rule of Cancellation)

$$a + c = b + c \implies a = b$$

です。 $a \geq b$ を $a = b + c$ であるような c があることと定義し、その時だけ引き算 $a - b$ が実行でき、答が一つしかないことを相殺原理が保証するというわけです。当然、掛け算の相殺原理

$$a \times c = b \times c \quad (c > 0) \implies a = b$$

もある。割り算は、「 $a \div b = c$ であるとは、 $a = b \times c$ であるような c を求めることである」というの形が普通で、こういう c がある時にだけ割り算ができるのだが、できる時にはこういう c はただ一つということである。

相殺原理の証明が欲しければ数学的帰納法で示すことになる。ただし、 $c = 1$ のときの加法の相殺原理自身は、どんな場合も公理の中にあって、仮定する必要がある。

さて、分数をどう考えるかだが、一番納得しやすい定義は、できる時もできない時も割り算 $a \div b$ の答を $\frac{a}{b}$ と書くことにすることである。つまり、 b 倍すれば a になる数のこととする。自然数の範囲内で割り算ができない時に分数が現れてくる。

数直線で考えても、現実の何かの量で考えてもこういうことはありそうである。式で書けば、

$$b \times \frac{a}{b} = a$$

というのを、 $\frac{a}{b}$ の定義そのものだと理解することである。

半分の $\frac{1}{2}$ とは2倍したら1になる数、2倍するとは同じものを2つあわせることだから、半分というのは全体をちょうど2つに分けたもの、半分と半分で全体だ、という感じになる。

さて、こう理解するとまず、

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

が分かる。ここで、自然数の時に挙げた性質はすべて分数でも成り立つように、と言うのが基本原理である。左辺が右辺に等しいことを示すには、だから、左辺に bd を掛けたら ac になること

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times bd &= \frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} \times (bd)\right) = \frac{a}{b} \times ((bd) \times \frac{c}{d}) \\ &= \frac{a}{b} \times (b \times (d \times \frac{c}{d})) = \frac{a}{b} \times (b \times c) = \left(\frac{a}{b} \times b\right) \times c \\ &= \left(b \times \frac{a}{b}\right) \times c = a \times c = ac \end{aligned}$$

を示せばいい。割り算が

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

であることを示すには、割り算の定義が、分数に対しても自然数の時と同じであることを確認すればよい。つまり、

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \times \frac{ad}{bc}$$

であることを確かめればよいことになり、右辺が

$$\frac{c}{d} \times \frac{ad}{bc} = \frac{cad}{dbc}$$

であるから、約分の原理

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$$

が成り立てば良い。右辺が左辺に等しいことを言うのに、右辺に bc をかけて ac になることを示せばよいが、

$$\frac{a}{b} \times bc = \left(\frac{a}{b} \times b\right) \times c = a \times c = ac$$

で、すぐに分かる。

さて、数学的には大体これで終わりだが、これを小学生に教えるにはどういう提示の仕方をするかということが問題となるのである。だから、教師への解答なら、「この数学的な考え方に沿って、それぞれ工夫して下さい」、とやればよいのだが、直接児童・生徒にとすれば、相手が何を理解しているのかを知らなければ、どうしようもない。いろいろな工夫もあるのだが、画一的に解答することはできない。

たとえば、約分は分かっている、分数とは割り算そのもののことだと理解している子供に対してなら、

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \times bd}{\frac{c}{d} \times bd} = \frac{ad}{cb} = \frac{ad}{bc}$$

という説明もありうる。もちろん、小学生に対してなら、 a, b, c, d には適当な数を入れて提示するのは当然のことであって、その数をどう選ぶかということも重要な教育技術ではあるが。

4.10 ピタゴラスの定理は $c=a+b$?

「前期に蟹江先生の「数学の話題から3」を受講していたものです。先生が授業中 TOSM を紹介し、数学の疑問があったらここに送るよう

にと言ってくれましたが、いまいちどういう組織か分からず手紙も出さずじまいでした。ですから今日たまたま TOSM のページを見つけて、本当にびっくりしています。せっかくだからこの機会にぜひ先生にお尋ねしたいことがあります。

ピタゴラスの定理が $c=a+b$ になってしまうというお話です。理科系の友人 A が直角三角形の斜辺 (c) の部分を細かくみると縦 (a) と横 (b) の和とみることができる、つまりピタゴラスの定理は $c=a+b$ だということです。私もこれが明らかに間違っているのは分かるのですが (なぜって定規ではかれば一目瞭然ですから) 論理的、数学的に説明することはできません。ぜひお知恵を拝借したいと思います。」

質問者：三瀬 貴弘 (三重大学人文学部 1 年)

掲示板上的回答

僕がサボっている間に西岡さんが、わかっている人にしか分からないコメントを書いてしまった。君には悪いことをしました。ここに図を描いて入れれば簡単に説明できるのだがと思いながら、日が経ってしまいました。

要するに、西岡さんの言うように錯覚です。近づいていくのは 2 次元の図形としてで、長さというのは 1 次元の図形に対する量だから変わらなくてよいのだということです。極限では図形として一致するのではないかというのも、このような極限操作では長さの関数は連続ではないのだという説明もできるし、1 次元の図形としての極限はあくまでも、無限小の階段を持った図形だと超準解析的に逃げることもできます。極限をどういう範囲で考えるのかというのが根本的な問題。

この種の詭弁的推論は、実は僕も大好きで、中学生の頃からよく遊んだものです。「すべての三角形は 2 等辺三角形」だとか、「 $1 = 2$ 」だとか書いてある面白い本があったのですが、今はあまり見当たりません。本を一つ推薦しておきましょう。ブラジス + ミンコフスキー + ハルチェルバ『詭弁的推論』(千田健吾 + 筒井高胤訳) 東京図書 (1965, 1994)。原著はロシア語 (1959) で、社会主義国だった頃のソ連は売れるかどうかを気にしなかったため、面白い本が一杯ありました。もちろん面白くない多くの本の出版と引き換えですが。

4.11 大学の先生も悩まず初等幾何の問題

「何年かに1度くらいの割合で、学生に質問される初等幾何の問題がある。有名な問題で、故事来歴があるらしいが、詳しいことは知らない。知っていたら教えて欲しい。

4月の半ば頃、同僚がこの問題を悩んでいるのを見て、訊ねてみたら、新入生に訊かれたのだと言う。試されているのだろう。こんな問題ができないからといって別に恥ではないのだが、恥になることではないなどと顔を赤くして力説すれば男が下がる。人助けをするか、というわけで、ここで解説しておくことにする。楽しみを奪ってしまうのではないかという恐れもあるが、楽しみたければじっと堪えて解答を見ないで頑張ってください。見たくなくても見えてしまうといけなから、解答の図は次の節の後ろに回した。

問題は次のとおり。

頂角が 20° の2等辺三角形 ABC がある。底辺の頂点から、それぞれ内側から $60^\circ, 50^\circ$ の線を引き、他の辺との交点を結ぶ時、そのなす角を求めよというのである。

図がないと説明しにくい。記号を確定して問題を述べなそう。

2等辺三角形 ABC とし、頂角 $\angle A = 20^\circ$ とする。 AC 上に点 E を取り、 $\angle CBE = 60^\circ$ とする。 AB 上に点 F を取り、 $\angle BCF = 50^\circ$ とする。 $\angle BEF$ を求めよ。」

質問者：不特定多数

一つの解答(もっと良い解答があるかもしれないが。) 必要な線分を引く、つまり BE, CF, EF を引いて、 BE と CF の交点を H とする。直ちに分かる角度は、

$$\angle BAC = \angle ABE = 20^\circ,$$

$$\angle ACF = 30^\circ,$$

$$\angle BEC = 40^\circ,$$

$$\angle BCF = \angle BFC = 50^\circ,$$

$$\angle CBE = 60^\circ,$$

$$\angle BHC = \angle EHF = 70^\circ,$$

$$\angle ABC = \angle ACB = 80^\circ$$

で、 20° から 80° まで 10° 刻みにすべての角度が一つの問題に出てくる。それでいて直角が出てこない。奇問であるには違いない。(意味のある) 残りの角が一つでも分かればそれで終わりなのだが、なかなかの難物である。ぐるぐるまわってなかなか絞れない。イライラしてくるほどだ。それもまた楽しい。眠れぬ夜には最適の問題である。

しかし答がないなどと心配する必要はない。三角関数を使えば、順に線分の長さが確定していき、 $\angle BEF$ が決まらなければいけないことぐらいはすぐに分かる。

初等幾何なのだから、「補助線一本」というわけで、 E を通って底辺 BC に平行線を引き、 AB との交点を D と置く。と言うよりも、 $\angle BCD = 60^\circ$ となるように CD を引くと言った方がよい。 CD と BE の交点を G とする。これで役者はそろった。推理小説なら、「犯人探しの読者への挑戦」が入るところだ。

答の分からなかった人や、折角の良質の時間を放棄する人は以下の謎解きをご覧ください。

正三角形が2つ ($\triangle BCG, \triangle DEG$) あり、2等辺三角形が3つ ($\triangle ABC, \triangle ABE, \triangle BCF$) ある。

FG を結ぼう。 $BG = BC = BF$ だから $\triangle BGF$ は2等辺三角形で

底角は等しく、 $DF = GF$ である。頂角 $\angle GBF = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$ だから、 $\angle BGF = 80^\circ$ である。

したがって、 $\angle FGD = 180^\circ - \angle BGC - \angle BGF = 180^\circ - 60^\circ - 80^\circ = 40^\circ$ である。

一方、 $\angle BDG = \angle BEC = 40^\circ$ だから、 $\triangle DGF$ は 2 等辺三角形になる。つまり、 $DF = GF$ となる。

四辺形 $DEGF$ は、 $DE = GE$, $DF = GF$ である凧形となり、対角線 EF は頂角 $\angle DEG$ を 2 等分する。つまり、 $\angle DEF = \angle GEF = \frac{1}{2}\angle DEG = 30^\circ$ となる。これが答: $\angle BEF = \angle GEF = 30^\circ$ である。

æ

5 TOSM 活動について⁴

1993 年 8 月 8 日に第 1 回 TOSM シンポジウムを福井大学教育学部の教室で開いてから、3 年が経ちました。数学者による数学教育運動というよりも、教育学部数学教室に長年勤務し、小中高の教師を送り出してきたものとして、算数・数学教育の現況に対する強い懸念と責任感から、現場の教師に対する何らかの支援活動をする必要を感じた 3 人の幾何学者が、見通しもなく、戦略もなく、ただやむにやまれぬ思いで始めたのが TOSM (Teaching of School Mathematics) の運動です。

だから、TOSM とは何をやるものかがあるのではなく、我々が算数・数学教育の現場に対して何かを考え、何かをすることが TOSM 活動であり、ほかの人々の協力を仰いで行うものが TOSM プロジェクトであったのです。

第 1 回シンポジウム当時、TOSM プロジェクトとして考えられたことは

1. TOSM ポスト
2. TOSM シンポジウム
3. TOSM スクール (中高生対象の数学講座)

⁴ これは 1996 年 8 月 11 日 (日) 13:00-16:30 に岐阜大学教育学部 B101, B102 教室で行われた第 2 回 TOSM シンポジウムの資料序文である。

今年 (1997) は 8 月 10 日 (日) の午後、福井大学教育学部において第 3 回 TOSM シンポジウムを開催する予定です。奮ってご参加下さい。

4. TOSM 相談室（教師対象の巡回相談）
5. TOSM 講座（教師対象の数学講座）
6. TOSM ブックスの出版
7. TOSM 推薦図書を選定

でした。

始めの二つ以外は、実施には色々な障害があって、今後の課題となっています。部分的には、三重県的美杉セミナーは、三重県高数研主催の合宿形式で行われる高校生対象のサマースクールで、1991年の夏から毎年行われています。

TOSM ブックスの最初の計画に「小学校教師の数学的常識」を挙げ、一部を書き出しましたが、完成はまだまだいつのことになるかわかりません。

TOSM シンポジウムはやっと2回目です。これからは毎年開くこととし、次の年のテーマを前年のシンポジウムるときから募ることにして、意義あるものと思っています。

TOSM ポストは、教師対象の算数・数学質問箱、ないし、児童生徒の反論・疑問への対処法の質問箱で、1993年以来続いています。あまり、TOSM が認知されていない所為で、質問の数は多くありませんが、良い質問がかなりあって、答えるのに苦労することもあります。答えはそれぞれにかなり長い文章が用意されていますが、教育界に手蔓が無いので、全国的なものとして出版する機会がありません。三重県高数研のご好意によって、その会誌に回答を掲載していただいております。この資料はそこに掲載された回答を集め、若干の加筆訂正をしたものです。

後でも述べますが、近年のインターネットの爆発的な進展によって、これから加速度的に各学校にインターネットが敷かれていくでしょう。このシンポジウムを岐阜で開くことになって、中馬氏は蟹江にホームページの開設を提案（というより、強要）し、開設の意味を議論するより、まず作ってみるかということになり、三重大学と岐阜大学にホームページを作りました。作って、内容を少しずつ充実していくうちに、これこそが我々の弱点を補う最良の手段ではないかと思うようになりました。

我々の弱点は、知られていないことであり、どこへでも出かける行動力と金のないことです。それがインターネットによって、補われず。面と向かって質問しにくいことも、キーボードを叩くだけで可能になります。答える側も、質問されてもすぐに答える必要はなく、時間をかけて答えれば良いのですから。

ホームページのアドレスは

1. TOSM 岐阜 : <http://guedu.cc.gifu-u.ac.jp/~chuman/index.htm>
2. TOSM 三重 : <http://www.com.mie-u.ac.jp/~kanie/tosm/>

です。ご要望やご質問を受け付ける掲示板も、今は4種類(TOSM 三重に)あります。シンポジウムの休憩時間や終了後、ご希望の方に体験していただくことも考えております。

ところで、このシンポジウムのテーマの一つは「数学離れ」ですが、初等・中等教育でばかりでなく、高等教育における数学離れの風潮も顕著なものがあります。日本数学会でもこれまで座視していたことを反省し、「大学における数学基礎教育」や「数学の将来」の問題に関して検討するワーキンググループが作り、活動を始めております。数学者集団としての数学会が、大学を含めた数学教育の現況に対して、行動を起こさねばならないと考えていることだけはお汲み取りいただきたいと思えます。それぞれのワーキンググループのホームページをご覧ください、ご意見をお受けしたいと思っております。

1. 大学における数学基礎教育 WG :
<http://skk.math.hc.keio.ac.jp/mathsoc/wg-homepage.html>
2. 数学の将来計画 WG :
<http://www.kusm.kyoto-u.ac.jp/sugaku/index.j.html>

数学会の体質も改善し、少なくとも高校の数学の先生方に喜んで入会して頂けるような学会に変えて行くべきだという意見も強くなって来ております。現実的には過去のしがらみもあり簡単ではないと思いますが、数学会への提案がございましたらいつでも取り次ぎ、実現に努力して行きたいと考えております。

æ

6 ポスト問題 4.11 の解答の図と参考文献

ちらっとただけで答が分かってしまうといけないので、図を寝かしておく。

参考文献

- [1] 蟹江幸博 『幾何的直観と対称性』プレプリント.
- [2] 蟹江幸博 『数について (美杉セミナー'91)』'92 年度数学研究会誌 36 号、三重県高等数学教育研究会 (1992),3-41.
- [3] 蟹江幸博 『TOSM ポスト』'93 年度数学研究会誌 37 号、三重県高等数学教育研究会 (1993),2-44.
- [4] 蟹江幸博 『数学を語るのか、数学で語るのか - 行列から見た複素数 (美杉セミナー'93)』'94 年度数学研究会誌 38 号、三重県高等数学教育研究会 (1994),2-39.
- [5] 蟹江幸博 『数学的知識の欠如に関する自己認識の調査』三重大学教育学部紀要、第 45 巻、教育科学 (1993),1-13.
- [6] 蟹江幸博、黒木哲徳、中馬悟朗 『数学教育における教師の授業観と意識に関する調査研究』岐阜大学教育学部研究報告 (自然科学)、第 18-2 巻 (1993),75-97.

- [7] 蟹江幸博 『算数綴り方教室の試み』三重大学教育学部紀要、第46巻、教育科学(1994),41-49.
- [8] 蟹江幸博 『三角定規の組み合わせ図形の考察』三重大学教育学部紀要、第46巻、教育科学(1994),41-49.
- [9] 蟹江幸博、黒木哲徳、中馬悟朗 『小学校教師の数学的常識(仮題)』(未完).
- [10] 蟹江幸博 『数学の危機なのか、数学教育の危機なのか(美杉セミナー'94)』'95年度数学研究会誌39号、三重県高等数学教育研究会(1995),10-61.
- [11] 蟹江幸博 『美杉セミナーについて - 特に'94と'95のまとめ - 』「数学を楽しむ高校生のためのセミナー」(94年度、95年度)のまとめ、三重県高等学校数学教育研究会(1996),8-33.
- [12] 蟹江幸博 『複素数を巡って(美杉セミナー'95)』'96年度数学研究会誌40号、三重県高等数学教育研究会(1996),2-55.
- [13] 蟹江幸博、黒木哲徳、中馬悟朗 『数学的概念に対する教師と学生の自己認識について』日本教育工学会・第12回全国大会、金沢大学、1996/Nov.3-4, p.165-166.
- [14] 蟹江幸博、黒木哲徳、中馬悟朗 『数学的基礎概念の自己認識に関する調査研究』岐阜大学教育学部研究報告(自然科学),1997.
- [15] 蟹江幸博、丸林哲也 『教師における数学的基礎概念の自己認識の在り方について-三重県の場合-』三重大学教育実践センター紀要17(1997,Mar.).
- [16] 蟹江幸博 『ニュートン以前-美杉セミナー'96-』第6回('96年度)「数学を楽しむ高校生のためのセミナー」三重県高等学校数学教育研究会(1997).
- [17] E. ハイラー、G. ワナー 『微分積分・今昔物語』(蟹江幸博訳)シュプリンガー・フェアラーク東京(1997年秋刊行予定)、Analysis by Its History, Springer Verlag(1996), by E.Hairer & G.Wanner.

- [18] クリフォード・ストール 『インターネットはからっぽの洞窟』(倉骨彰訳) 草思社 (1997年)、Silicon Snake Oil: Second Thoughts on the Information Highway(1995), by Clifford Stoll.
- [19] スティーブン・ワインバーグ 『電子と原子核の発見』(本間三郎訳) 日経サイエンス社 (1986年)、The Discovery of Subatomic Particles(1983), by Steven Weinberg.