プラットフォームとしての「教育数学」

蟹 江 幸 博 *

目次

1 プラットフォームとしての教育数学

教育数学（Educational Mathematics）とは，教育を明確に意識しながら [1]，数学について考察し，論じ，実践しようとする営みの総称である．まず，そうした営みの総体に名前を付けることの意味について，簡単に述べてみる．

1.1 共同体上の数学

教育は,「教え育てる」立場からも,「学び育つ」面からも，他者との関わりのなかで成立する営みである [2]．つまり，教育は，共同体の存在の前提なしには成立しえない営みに他ならない．したがって，教育を意識するということは，基盤に横たわる何がしかの共同体を想定していることになる [3]．

基本的なことを指摘しておこう．数学の学習は，通常，日常言語を用いて行われる．特に，初等教育は，学習者の第一言語（母語）で行われるのが多数であろう．数詞や記数法についても，例えば，日本社会においては，日本古来のものや漢字文化圏から移植されたもの，西洋由来のもの等々の，複数の文化の交錯した状況で使用されている [4]．

---

*元三重大学

[1]「教育を明確に意識しながら」という前提について，ひとこと補足しておく．先人の得た結果を，そうと知って学ぶ者は教育を受けているのだが，そうと知らずに同一の結果を得たものは研究をしているということになるだろう．

[2]「独習書での独学」であっても，著者（が代表する共同体）と学習者との関わりのなかで成立している．

[3] そもそも「共同体」なるものは，“ 実体 ” として存在するのだろうか.「多様な関係性で結ばれた人間の集まり（という実質)」から，何らかの特徴に着目して，仮想的に構成されたものが（型式としての）共同体である，というのが，我々の立場である.（型式については，脚注 16 を参照のこと.）

[4] 初等数学の使用という意味で基本的な役割を果たす “ 度量衡 ” も，共同体に依存する．もちろん，こうした “ 共同体の多様性 ” の問題は,「どんな言葉で行おうと数学は同じである」といった類いのこととは別のことである．

このように，教えたり学んだりする“ 数学 ”は，それが保持されている共同体の特性との関連性の下で考察されるべきものになる [5]．例えば，初等中等教育における数学（算数）の教育問題について論じるには,「（初等中等の）学校共同体」と，その上で営まれる「（いわゆる）学校数学」を設定することが前提となる [6].

なお，共同体との関係性で「教育」について考察するとき，大きく二つの型を区別することが役に立つ．共時型の教育と，通時型の教育である [7]．共時型教育は，共同体の現状の保持に寄与するものであり，通時型教育は，共同体の変革に寄与するものになる．学校数学の内容（指導要領や教育課程等々）をどのように変えていけば良いかは“ 通時型 ”の課題であり，今ある内容を効果的に教えることは“ 共時型 ”の営みということになる [8]．学校教育について，この両者を混在させた状態で論じることは，良い結果をもたらすことにつながらない [9].

1.2 プラットフォームとしての教育数学

数学の教育についての瞠目すべき論も，傾聴すべき体験談も，共同体で共有されてはじめて教育上の実効性をもつ．そして，そのためには,「そもそも，これは共有の対象に含まれるべきか否か」という問いに答えられなければならない．そうした対象の総体に名前を付けることの意味も，そこにある．そして，このような総体に付された一般的な名称が「教育数学」ということになる．

つまり，教育数学は，共同体の構成員が自分たちの経験や見解を共有するための「プラットフォーム」を提供するという役割を第一にもつ [10]．数学の教育は“ 共同体ごとのプラットフォーム ”の上で展開されるべき営みであり，このプラットフォームの役割を果たすのが教育数学ということになる [11].「プラットフォームとしての教育数学」は，教育数学の提唱にあたって，教育数学が目指すべき方向を指し示す“ 旗 ”といってもよいだろう．

---

[5]数学教育が「一般の数学」の教育を扱うのなら，教育数学は「共同体上の数学」を扱うという意味で，数学教育に拘束条件を課したものになる．一方，数学教育がいわゆる「学校数学（学校共同体上の数学）」を限定的に扱うのなら，数学教育は教育数学の一部ということになる．

[6]コペルニクスの体系が当時の社会に与えた思想的衝撃は,「我々が生きている地球が，たくさんある天体のひとつに過ぎず，何ら特権的存在ではない」という解釈にあったといわれる．同様に，というのは言い過ぎかもしれないが,「今の日本の学校数学」は，たくさんある，そして，ありうる，共同体上の数学にすぎないことを強調しておきたい．もちろん，特権的であることは自明ではなく，むしろ，不適切の度合いが強いものですらありうることになる．

[7]本来的には，この“ 型 ”は，類型ではなく，型式である．

[8]型式は類型ではないので,「内容を教えるという営み」がすべて共時型だと言っているわけではない．事象群のしかるべき特徴に着目し，通時型と共時型を組にした枠式を適用することが今の問題であり,「内容を教える営み」にも，通時型と共時型を区別することが，当然ながら，有りうる．

[9] 学校教育について論じるとき，通時型と共時型を区別することは，学校種の違いによらない．さらに，一般の共同体上の教育についても，通時型と共時型を区別することは可能であり，有効である．つまり，通時型や共時型といった“ 型式 ”（組として考えるときは“ 枠式 ”という）は，個別の共同体に依存しておらず，すべての共同体に対して有効な“ 道具 ”を与えていることになる．

[10]教育数学という名のプラットフォームは，理念的には，共同体ごとに構築されるべきものである．共同体が,（現実がそうであるように）多様な部分共同体からなる重層的な構造をもつときには，その上での教育数学も相応に複雑なものにならざるを得ない．

[11] 数学の教育についての論述で，共同体への依存性を強く意識したものとして，藤澤利喜太郎の『算術條目及教授法』（丸善・三省堂，1895）を挙げることができる．古代ギリシアで発達したエウクレイデスの原論的な数学と異なり，使用者の職業的営為と強い関係性をもつものにいわゆるアバクス数学があるが，藤澤の『算術』は後者の系譜に連なるものである．

2　普遍性と多様性

教育数学が“ プラットフォーム ”としての役割を果たすためには，少なくとも次の二つの課題に，個々の共同体の特性に依存しない形で，答えることが必要だと考えている [12]．それは,「数学とその教育とは何か」という問いをめぐって，(1) 個々の共同体の特性を超えた共通見解と，(2) 個々の“ 教育数学 ”の特性をすべての“ 教育数学 ”に使用可能な同一の用語で記述できる道具立て [13]，を提示することである．前者の課題を「普遍性の把握（Prehension of Universality）」，後者を「多様性の整序（Ordination of Diversity）」と呼んでいる．

2.1　普遍性の把握

普遍性の相の下で「数学とその教育」が何であるかを捉えるという課題に対し，我々が今提示している解答を“ 比喩的 ”に述べれば，次のようになる．

まず，数学は“ 一種の言語 ”であると規定する．そして，その教育を,「（言語としての）数学の（共同体における）規約的使用ができない者に規約的使用ができるようにさせること」と考える．

今,“ 比喩的 ”に数学を一種の言語と規定すると述べたが，これが“ 比喩 ”であるかどうかは，もちろん,「言語」を何と思うかに依存している．この問いに対して，現在，我々が用意している答えは，ソシュールのアイデアの，ピアジェによる発生的認識論への拡張と，イェルムスレウを経たプリエートによる記号論的拡張を参照して,「数学」を「言語」ともども「統号系 (seme system) とその使用の総体」の一部として捉えるというものである．上述の「（言語としての）数学の（共同体における）規約的使用」の“ 規約 ”とは，その共同体を規定する“ 共有統号系 ”に他ならない．この「答え」については，そこに至るためのプログラムを参考文献 [1] の第 3 章で提案してある．

なお，本稿では，煩雑さを避けるため，以下,「数学を一種の言語と規定する」という“ 比喩 ”を用いることにする．

2.2　多様性の整序

数学の教育を言語の比喩で考えているのだが,“ 教育の対象としての言語 ”には，多様な差異を生み出す,「地域」,「ジェンダー」,「社会階層」,「文学」等々の，さまざまな観点からの種別が想定される．また，未だ言語を身につけていない者への教育（第一言語（母語）の習得），すでに別の言語を身につけている者への教育（第二言語習得）等々の，教育の側の種別もあるだろう．

こうした種別を明確化することは「多様性の整序」の課題になる．上述の教育についての普遍的な捉え方（「共同体における規約的使用ができない者に規約的使用ができるようにさせる」）との関係性の下では，それぞれの種別をその言語を使用している共同体 [14] の差異として捉えることが基本的なアイデアとなる．

---

[12] 提唱者として我々が構築しようとしているものは，一種メタ的な「方法」といってもよい．なお，本稿が日本語を使用している理由としては，著者の母語であることと，第一の関心が日本語共同体における教育であることが大きいが，もちろん，翻案によって他の言語共同体でも使用可能なものを目指している．

[13] 脚注 9 を参照のこと．

[14] より正確には，その共同体の「規約の総体（共有統号系）」になる．

2.3　方法の要としての「枠式」

言語の種別や多様な共同体を“ 実体視 ”することは実際上困難であり，それ以上に危険である．こうした作業を行うためには，相応の「方法」が必要になる [15]．

そもそも,「言語は何か実体を表示するものではなく，差異の体系に他ならない」というのはソシュールの基本的なアイデアであるが，人は，しばしば，言語を使用する際に，その指示内容を実体視するという弊に陥りがちである．そうした弊を防ぐための工夫として，議論の要となる諸要素に対して,“ 差異の体系 ”であることを強調する「枠式（morphic frame)」を用いる方法を準備している [16]．

3　臨床教育数学

3.1　臨床教育数学の役割

指導者と学習者のみからなる極小共同体上で展開される教育数学を，病床の患者の治療に当たる医師の営みが「臨床医学」であるのに倣って,「臨床教育数学」と呼んでいる．

学校数学の範疇で典型例を求めれば，家庭教師といった場面が思い浮かぶ．学校における集団授業が，教員と各々の生徒との教育的関係の単なる加算でないことは明らかだろう．しかし，一人の教師と一人の生徒という要素的な活動についての了解なしに，より複雑な状況についての理解が十分に進むとも思えない [17].

このように，臨床教育数学には，教育数学を展開するにあたっての，いわば要素的な役割を果たすことが期待される．

3.2　技法としての「臨床教育数学」

臨床教育数学については，教育数学における要素的であるがゆえの重要性に加え，数学の教育の現場で生じる種々の課題の解決策を求める際の分析的な探索の技法として役立たせることを想定している．

一般に，現場における実際的な問題は，程度の差はあっても，行為の出発点としての関係者の主体的な意思決定が伴う．こうした意思決定を行うための状況整理に，教育数学における“ 多様性の整序の方法 ”を活用することができる．特に，臨床的な場面では，指導者ないし学習者の意思決定

[15]実際,「普遍性と多様性」といっても，例えばだが,「言語」という“ 普遍 ”に対しては「日本語，英語，…」が“ 多様 ”となるが，「日本語」という“ 普遍 ”に対して「(日本語の）標準語，地域語，職業集団の共有語，ジェンダーの共有語… 」が“ 多様 ”として対応する，といった見方が有効になる．

[16] 言語の非実体性の例としてよく用いられる「長と短」を例にすれば，対比的な相対性を強調するため,「長型」と「短型」という二つの“ 型式（morphic type)”を採り，両者からなる組として“ 枠式（morphic frame)”を設定するといった類のものである．なお，我々が想定している「方法」は，アリストテレスの「トポスの技法」に示唆されたものであり，[2] で導入している．

[17]二対問題の解決なしに多体問題を解こうとするようなものだろう．もちろん，二対問題には存在しえない多体問題の特性を明らかにすることは，別のことである．

だけが問題となるから，上述の“ 整序の方法 ”をより組織的に適用することが考えられる．例えばだが，こうした組織的な方法の適用を,「技法としての臨床教育数学」と呼んでいる．

参考文献

[1] 蟹江幸博『数学の多様性と普遍性 — 教育数学の試み』，数理解析研究所講究録 2021 巻, (2017), 1 - 50 .

[2] 蟹江幸博，佐波学 『『幾何的直観と対称性』の教育観と数学観 （I） — 教育数学における「方法」の探求 — 』，数理解析研究所講究録 2072 巻, (2018), 1-41.

付　　録

以下，付録 A では第 2.3 節で述べた枠式の適用例を，付録 B では第 3.2 節で掲げた臨床教育数学の考え方の一端を示してみた．また，付録 C には，最近我々が仮の運用をしている汎用の枠式の一覧を掲載してある．

A　枠式の「学校数学」への適用

この付録 A では，第 2.3 節で述べた「枠式」の方法のひとつの適用例を,「学校数学」を題材として示してみたい.（ここで,「学校数学[18]」は，主として，初等中等学校の教科としての「数学」を指す．日本の場合なら，教科名としては「算数」も含まれる．なお，以下の論は，多くの場面で，高等教育にも適用可能である.）

A.1　課題の設定

まず注意しておきたいことは，我々は，この付録で，多様な要素を複合的かつ重層的に包含する「学校数学」が抱える様々な問題を，総体的に論じようとしているわけではないことである．ここで我々が試みようとしていることを，問題解決という方向から述べれば，ある問題について，その問題に関係する事象群の多様性を適当な観点から整序することで，問題の持つ本質的な性格を単純化して表現し，そこから解決に向かう方向性を見出す指針を取り出そうということにある．

[18]第 1.1 節で,「学校数学」を「学校共同体上の数学」と述べたが，本付録 A は,「枠式の適用」についての例示が目的なので,“ 共同体 ”的な観点は，前面に出していない．

例えば,「学校数学」について，しばしばなされる非難に,「学校で習った数学など，社会に出てから一度も使ったことはない」というものがある[19]．こうした見解には,“ 多様な ” 立場から反論ができるし，実際になされている．しかし，ここで，これから行いたいのは，この見解について直接論じるのではなく，この見解をより広い状況のなかに組み込み，その状況を上で述べたように整序することである．

議論を始めるにあたり，引用の便を考え，先のような意見の代表として，次の“ 見解 ” を提示しておこう．

[見解 A] ：「仕事で数学を使う立場からは，学校で教えている数学は役に立たない.」

次に,“ 舞台を拡げる ” ため,「学校数学」について，巷間しばしば耳にする，批判的というより，むしろ好意的とも思われる立場からの，次の二つに代表されるような見解も提示しておこう．

[見解 B] ：「数学の問題は，順を追ってゆけば，誰でもわかるように解ける.」

[見解 C] ：「数学の問題は，採点者の主観と関係なく，答えの正誤が決まる.」

こうした見解は，試験の公平性を必要とする各種競争試験や，公平性や説明責任を強調する教育制度にあって,「数学」が好まれる理由のひとつになっている．

さて，我々は,「学校数学」に関連する事象群に,“ 単原理型と複原理型 ” からなる枠組（「原理の枠式」と呼んでいる）を導入することで，その枠式に対応する観点に限定されたものではあるが，なぜこうした見解が出てくるかを明確化できると考えている．(A.6 節の結論を先に述べておくと,「見解 B は学校数学を単原理型と見ている」ことのあらわれであり,「見解 C は単原理型と見なす立場から学校数学と学校教育の適合性が高い」ことを，そして,「見解 A は（主張する人の）仕事で使用している数学が複原理型の特性を強くもっている」ことのあらわれと解することになる.）そして,「なぜか」がわかれば，見解 A のような否定的な意見についても,「それでは，役に立つようにするには，どうすれば良いか」と問い直し，さらにその解決法を探すことに貢献できるだろうとも考えている（A.7 節）．

次節以降で，こうした扱い方の輪郭を示してみたい．

なお，単原理型や複原理型といった型式は，上で，数学や教育を「 ～ と見なしている」，数学や教育が「 ～ の特性を強くもつ」等々と述べたように，数学なり教育なりといった考察の対象としている事象群の，ある観点から焦点をあてたい特性を組として取り出し，対比的な差異を強調するように抽象化して名称を付したものである．したがって，型といっても，いわゆる類型でない．つまり，数学の全体が単原理型のクラスと複原理型のクラスに排反に分割できる，といったことを主張しているわけではない[20]．以上の了解のもとで，以下では，簡単のため,「 ～ と見なしている」，

[19]高等教育における同工異曲に,「基礎教育として数学者が教える数学は，工学部では役に立たない」といった類のものもある．

[20]詳しくは，文献 [2] を参照されたい．

「～の特性を強くもつ」といった言い方をせず，単に,「単原理型の数学」であるとか,「複原理型の教育」という言い方をすることも多い.

ところで，以下の説明では,「原理の枠式」がこの問題を解決するために導出されたように見えるかもしれない．しかし，これは，説明の便宜のためで，本来，こうした枠式は，個々の問題を超えて準備されたものであり，様々な状況に適用可能な汎用性の高いもの[21]として設定されていることを強調しておきたい.（例えば,「学校数学」についてであっても，別種の課題であれば，別の枠式を適用することになる．逆に，枠式を適用することは，新たな課題を発見するために用いることもできる.）同様に，最も汎用性が高いものとして，今，我々が仮に運用している枠式の一覧を付録Cに掲載してみた.

A.2　二種類の「数学」

現代日本の数学者にとって,「数学」の最も重要な特徴は，“公理的演繹体系の体裁”にあるといっても良いだろう．ここで“体裁”と言っているのは，公理系が実際どのようなもので，それが無矛盾だとか完全だとかの厳密な話ではなく,「数学」がそういう体系であるべきだという意識が共有されているといった意味合いにおいてである[22].

他方，古来から,「数学」とは「公式とその適用法の集成」であるといった見方もある．この数学観は，“公式”を“モデル”と読み替えれば，現在においても，工学系を含む多数の数学の使用者（ユーザー）にとっての標準的なイメージといって良いのではないだろうか.

「数学」を“一種の公式集”とみたときに，例えば，古代の「数学」では，特に求積関係の公式は，経験から導かれた（と推測される）法則を含んでいることも珍しくなかった．実際，円周率として複数の値[23]が併用されている場合[24]も，そうした“値”の採用は，計測の精度との関係等々で決定されたであろうことが推量される．つまり，この数学観では，形式的な整合性という“原理”[25]だけではなく，経験との整合性といった別の“原理”が併用されていると思うことができる[26].

A.3　理論と実践

前節で述べた二種類の数学観は，端的に，“理論型”と“実践型”と呼ぶことができる．例えば，クラインの著名な『19 世紀における数学の発展についての講義（Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert）』におけるガウスについての評を参照してみよう.（以下，引用は,『クライン：19 世紀の数学』 Felix Klein 著，彌永昌吉 監修，足立恒雄・浪川幸彦 監訳，石井省吾・渡辺弘 訳,（1995）共立出版株式会社，による.）

[21]我々がこの方法を考案するにあたって示唆を受けた逍遥学派の用語を用いれば,「汎用のトポス」に相当する.（諸説あるが）「特用のトポス」に相当するものとして，ある領域での議論のために使用される特用の枠式も，当然ながら，考えられる.

[22] 後述するように，こうした数学観を，異なる数学観と対比的に,「単原理型」ということにする（A.4 節を参照）.

[23]近似値という概念がありそうでもなく，したがって，唯一の値としての円周率という概念自身がないように思える.

[24]今の日本でも，初等教育での円周率の近似値が 3.14 だったり 3 だったりするが.

[25]“公理的演繹体系”は，”形式的な整合性”の形態のひとつである.

[26]脚注 22 と対比的に,「複原理型」ということになる.

クラインは，ガウスが小惑星パラスの軌道を決定しようとした際の挿話に関連して，次のように述べている．

> さてガウスはどのような方法でこれらの重要な結果を導いたのであろうか．彼以前のすべての数学者や天文学者と同様に，彼も無限三角級数を利用する．しかしその変数は目的に合わせて選択され，一方，その係数は定積分の数値的評価（機械的求積法）によって得られる．ところでガウスは 1812 年の超幾何級数に関する研究の中で，初めて精密な収束判定条件を設定した人だから，有限個の級数項だけを用いる際に生じる誤差を評価したであろうと想像するなら，ある種の失望を禁じ得ないであろう．そうした慎重さは見られないのである．それどころかガウスは，もっと後の測地学の計算でもそうであるが，各項が十分小さいと見れば，すぐにそこで級数を打ち切ってしまう昔からの習慣にしたがっているのである．

続けて，クラインは,「厳格な収束判定法の創始者たるガウスが，実際の場合と理論の場合とではこのようにまったく異なった態度をとるのをみる[27] と，おそらく今日の純粋に抽象的な学派の数学者は驚くであろう」と述べ,「なぜなら上述のような方法は，それが論理的に十分基礎づけられていないため，場合によってはまったく間違った結果を導く可能性があることは明らかだからである」と説く．

そして，クラインは，この“ 矛盾 ”を，人間の「設定した目的の達成に有効なものだけが関心のまとになる」という「心理的説明によってのみ解明」できるとし，次の二種を区別する．

まず，一方は,「純粋数学者（reinen Mathematiker）」である．クラインによれば,

> 純粋数学者にとっての目的は，選んだ主題が提起するあらゆる可能性を大局から秩序づけ，研究し尽くした完全な体系である．その際，個々の場合を論理的に厳密に分離して整理することが，彼の本質的な手段である．したがって，人為的につくった除外例も，自然なものほどではないにしても，同じくらいに彼の興味をひく．実際的な応用の可能性は，おそらく後者の方が高いであろうが，彼のまったく関知するところではないのである

とされる．他方は,「計算本位の実用家（rechnenden Practikers）」である．

> 計算本位の実用家が目指すところは，数値的な結果を得ることである．したがって，自分の方法を緻密な論理で正当化することには無関心である．だから多かれ少なかれ無意識に自分の数学的本能に頼ることになる．この本能は彼に必要な仮定 — ここではたとえば項の符号が交代に変わることやそれらの和がいくらでも小さくなることなど — を暗黙のうちに採用するように命ずる．とにかく前進するために彼がとらざるを得ないこうした手続きに対する，理屈というより感覚的な正当性は，観測結果と絶えず比較することによって証明される．

[27] in praxi sich solchermaßen ganz anders vorhalten zu sehen als in der Theorie（原文）.

以上の説明によって，前節の終わりに述べた「形式的な整合性」という“原理”のみに従う“理論家”としての純粋数学者と，それだけでなく「経験との整合性」という別の“原理”を併用している“実践家”の姿勢が，明瞭に描き出されていることがわかる[28].

A.4 単原理型と複原理型 — 「原理の枠式」の導入

“理論と実践”という上述の二種類の数学を区分する“枠式”を導出するために，“公理的演繹体系”を生み出した古代ギリシアにおける知的営為の“枠組み”を参照枠としてとることにする．その代表として，アリストテレスを取り上げよう．

アリストテレスは，オンタ（万象）を,「別のありかたを許容しないアルカイ（archai ouk endechomenon kai allōs echein)」を有するものと,「別のありかたを許容するアルカイ（archai endechomenon kai allōs echein)」を有するものに二分する[29]．前者のものがテオレティケー（理論，観照）の関与する対象であり，後者がプラクティケー（実践）のものである[30]．なお，ここで「アルカイ (archai)」は「アルケー（archē)」の複数形であって，この「アルケー[31]」は，後代,“principium”（複数形“principia”）とラテン語訳されることになる．したがって，我々は，アルケーを“原理”，複数形のアルカイを“原理系”と呼ぶことも考えたが，単数と複数を峻別しない日本語の性格と，語調の簡潔さのため，アルカイとアルケーを区別せず,「原理」という言葉を充てることにした．

“原理（アルケー，アルカイ）”が何を意味しているかについては，枠式・型式の性格からして，明確に表現することはできない．数学の場合であれば，演繹の規則を含めた公理系なども“原理”のひとつの形であるし，人間生活のある種の局面であれば，法体系もそうであろうし，明文化されていない慣習の集まりなどもそうであろう．興味の対象である事象群にあって，それなりのまとまりをもって，そのありかたを規定する言明群とでもいったものを考えてみる[32]．それらのうち，他

[28]理論家と実践家が，ガウスというひとつの人格に併存し得るというわけである．つまり，人間の集合を，理論型と実践型に“類別”することはできないことになる．“枠式と型式”という我々の用語を用いるなら，こうした事態は，理論型の型式と実践型の型式が，どちらもガウスという人物に適用可能であるということにすぎない．

[29]例えば,『ニコマコス倫理学』第 6 巻第 1 章．

[30]「学ぶ（マンタノー）こと」と「単原理性」との深い相関は，アリストテレスの強調するところであった．これは，また，ヘ・マテマティケーの語源についての逍遥学派の説の由来でもあったように思われる．

[31]「アルケー」が何を意味するかについて，アリストテレスの『形而上学』第 5 巻（第 Δ 巻）第 1 章によれば，次のようになる（引用は，岩波文庫による）;「事物のアルケーというのは，まず,（1）当の事物が第一に〔最初に〕そこから運動し始めるところのその部分〔運動の始まり，出発点〕を意味する．つぎには,（2）なにごとがなされるのにもそれからなされ始めれば最も善くそのことがなされるであろうところのそれ〔最善の出発点〕を意味する、さらにまた,（3）事物が第一にそれから生成し且つその生成した事物に内在しているところのそれ〔すなわち事物の内在的構成要素〕のことをもその事物のアルケーという、なおまた,（4）そこから生成したその事物のうちには内在していないで，しかもそこからこの事物が第一に生成し来り，そこから第一にこの事物の運動や転化が自然的に始まるところのそれ〔転化の外的始動因〕をも意味する、さらにまた,（5）動かされるものどもがそのように動かされ，転化するものどもがそのように転化するのは或る者の意志によってであるとき，この或る者がまたアルケーと呼ばれる、さらに,（6）対象事物がそれから第一に認識されるに至るところのそれ〔認識の第一前提〕がまた，その事物のアルケーと言われる、— さて，これらでみると，これらすべての意味のアルケーに共通するのは，それらがいずれも当の事物の「第一のそれから」であること，すなわちその事物の存在または生成または認識が「それから始まる第一のそれ」であることである」．

なお，訳者の出隆氏は,「日本語「原理」では，これらの意義をことごとく表わすことは不可能．原語は日本語の「もと」（本．元，原，素）の意に近く多くの含みをもっていた．その含みは本文の「アルケー」をまず日本語の「もと」のつもりで読んで察知されたい」と注している．

[32]一般に，そうした言明群の存在は自明ではない．人間の営みに関するものの場合，それに関係する人々のなす共同体

がそれから“導かれる”ような基本的な言明群を組としたものが，大雑把に言って，“原理”ということになる[33].

前節の終わりに述べた“理論家”は，「形式的な整合性」に奉仕する“単一の原理”[34] に従うわけであるし，“実践家”の方は，この原理に併せて，「経験的な整合性」という「形式的な整合性」とは無関係な（ときには矛盾し得る）“原理”にも従うことになる．

一般に，矛盾した複数個の原理を併用している場合，営みの実際的な場面では，どちらの原理に従うかを「行為の主体の自由意思にもとづいて選択」しなければならない．このことが，“理論”と“実践”の本質的な相違である．つまり，単一の原理に従う“理論”的な場合に（理念的には）主体の自由意思の介在する余地がない．これと対比的に，“実践的営み”は常に「自由意思による選択」を必要とする．

いずれにしても，このようにして，「理論型」と「実践型」という型式を組とする枠式を取ることができる．ただ，“理論と実践”は多様な意味に使用されすぎているため，ここでは，原義にかえって，「単原理型（Single Principle Type）と複原理型（Multiple Principles Type）」と呼ぶことにした[35].また．両者を組とした枠式が，付録 C に掲げた「原理の枠式（Morphic Frame for Principle）」である[36] .

A.5　二種類の「教育」

今，我々は，「学校教育」に興味があるのだが，ここで，「教育」に関与する事象群を枠式によって区画することを試みる．

まず，「学校教育」の特性をどのように捉えればよいのか考えてみたいのだが，これは，なかなかに困難であることがわかる[37]．そこで，学校教育と対比的な“教育”として，「徒弟教育」を採り上

を特徴づけるもの，つまり，共有する世界観を表示するものとみることもできる．実際の共同体から出発するとき，そうした言明群を明確化することについては，文献 [2] を参照されたい．

[33]つまり，何がしかの形式化がなされていて，“推論”が機能していることが前提ということになる．もちろん，“原理”に相当する言明群は，推論を通じて一組に整理できるとは限らず，互いに矛盾する言明を含む複数組の言明群（原理）に分かれることもある．

[34]より正確には，“「形式的整合性」という目的の達成に適合的なもののみからなる原理”といった意味である．しばしば，この“目的”を“ラベル”として，「形式的整合性の原理」等と略述することがある．

[35]人間の実際の営みにおいて，単原理型と複原理型の差異を意識することは，非常に困難である．何より，単原理型の範型である公理的演繹体系についての理解が不可欠の前提だろう．このことは，古代ギリシアの哲人がこうした区分を捉え得たことと，エウクレイデス的なギリシア数学の発明が深く関係していることを想定させる．実際，単原理型の範型についての記述とみなせるアリストテレスの『分析論後書』において，扱われる事例が上述の“ギリシア型数学”に題をとったものであることはよく知られている．

[36]枠式であることの特徴として，同一事象に異なる適用の仕方が可能なことが挙げられる．例えば，「公式とその適用法の集成」という体裁の典型である古代の算経型テキストにしても，そのテキストの構造を「計算部＋適用部」をみれば，「単原理型＋複原理型」と見なせるし，適用部まで含めて知識技法の集成と見れば「複原理型」ということになる．実際，通常，算経型のテキストの冒頭部に説かれる“数の計算”は，「前提から結論がただ一通りに導出されること」に由来する，“正しさ”や“確かさ”といった人類史的なイメージを共有している．

[37]例えば，今，「学校」という言葉からイメージされる「（複数の机と椅子が並べられた）教室」は，そうした特性として役立つのだろうか．文献から垣間見られる古バビロニア期の“書記学校（粘土板の家）”が今の教室のイメージに近いのに対し，時代的にははるかに近くても，そうしたイメージに合致しない例はいくらもある．

げてみることにする．ここで，徒弟教育を，職能を用いた職業的営みを行いながら教育的な成果を得るものと思うことにする[38]．そして，その上で,「原理の枠式」の適用を考えてみる．

徒弟教育では,「教育的成果の獲得」を目的とする原理と,「職業的成果の獲得」のための原理の両者が併存していると想定して問題はないだろう．さらに，この二種の原理は，本来的に独立であって，互いに矛盾するような規範を含んでることは当然なことである．これと対比的に見れば，学校教育は「教育的成果の獲得」のみを問題にすると見なしても良いだろう．つまり，徒弟教育が「複原理型」であるのに対して，学校教育は「単原理型」に評定[39]されることになる．

A.6 「学校数学」の構造

「学校数学」について，前節までに述べたことをまとめておくと,「原理の枠式」を適用することで，数学にも教育にも複原理型と単原理型のものがあり,「学校」は単原理型の教育と考えられるということであった[40]．

また，学校教育や学校数学における単原理型の実質的表現のひとつ[41]として,「すべてのことが規範的ないくつかの規則から明示的な手続きを通じて導出されること」に最高の優位性を認める態度を採っておく．

以上の準備の下で，A.1 節で提示した三つの見解 A，B，C の解釈について考えてみよう．

まず， 見解 B から始めよう．見解 B は,「数学の問題は，順を追ってゆけば，誰でもわかるように解ける」というものであり，ほぼ，このまま,「学校数学」が単原理型であることを述べたものになっている．

次に， 見解 C について考えてみよう．見解 C は,「数学の問題は，採点者の主観と関係なく，答えの正誤が決まる」というものであった．これ自体は「学校数学」の性質についてのものであるが,“ 採点者 ”という言葉から,“ 評価 ”の問題を背景に見ることができる．

ここで，学校教育が単原理型であること，つまり，学校教育に関する主要な要素は単原理型の性格を強くもつ（理念的には，完全にもつ）ことから,「学校教育における学習成果の評価方式が単原理系型である」ことが含意されることに注意しよう.「単原理型の評価」は，いくつかの規則から明示的な手続きによって“ 必然的 ”に導出されるものであるとして良いから，そこに，評価者の主観によらないという意味での公平性や，説明責任の担保といった性格が付随することになる．

こうして，見解 B は,「単原理型の学校数学は，単原理型の評価システムと“ 単原理性 ”としての適合性が高い」ことの，ひとつの側面を述べたものになっていると思うことができる．

最後は，見解 A の 「仕事で数学を使う立場からは，学校で教えている数学は役に立たない」である．これは，上の二つの見解と異なり,“ 学校における数学 ”についての批判であり，そこに聴く

[38]古今，洋の東西を問わず，非常に広汎に行われた教育の形態である．最近の On the Job Training なども，この一種と見なせるだろう．

[39]「評定」,「適用」という言葉は，付録 C に掲げた「同化と調節の枠式」の用語を援用している．

[40]枠式・型式は，事象の特徴的なものに対比的に焦点をあてたものであった．実際の「学校」には，複原理型の営みがいくらも含まれているだろう．ただ,「学校」の名を冠していても，その主たる機能が複原理型であるようなものは，ここで述べている「学校」とは別のものと考えることになる．

[41]正確には，型式としての単原理型の実質型領域への適用のひとつ．

べきものがあるのなら，改善をはかる契機を与えるものでもある．

さて，“妥当と判断できる見解 A”は，こうした見解を主張する者の「仕事で使用する数学」が“複原理型”であることに起因すると考えることが相当と思える．同工異曲の「社会に出てから，学校で習った数学を使ったことはない」という見解も，一般的な成人が日常生活で使用する数学が，主として，消費活動に関連するものであることを思えば，これも“複原理型”であると思うことができる．

今，職業的なものでも，日常生活的なものであっても．こうした見解の主張者にとっての「数学」は（おそらく当人たちは気づいていないだろうが）従うべき複数の原理をもつことになる．そのうち，学校数学と共通な原理を「形式型原理」，職業活動や消費活動に伴う別種の原理を「実質型原理」と呼ぶ[42]ことにすると，結局のところ，A のような見解は,「複原理型の数学の使用者にとって，形式型原理のみの学校数学は実質型原理への配慮を含んでおらず，そこが役に立たないように見える」ことを意味していると解することできる．したがって，そういう意味での主張であるとするなら，見解 A は妥当といっても良いだろう．

A.7 「学校数学」の設計

それでは，見解 A の妥当性を前節のように解するとして，その批判にどう答えれば良いのかを考えてみる．ひとつの答えは,「学校数学は形式型原理のみに従うものであるから，実質型原理に対して役に立つことを期待することは，そもそも間違えている」というものだろう．もちろん「役に立たないことを教える学校は不要である」等々の反論もあるだろうが，結局のところ，こうした解答の妥当性は，学校教育，あるいは，学校数学に関する事象群を“目的-手段関係[43]”で整序してみないと，判定できない．

ここでは，そうした議論に深入りすることは避けることにする．そして,「学校教育の下で,（形式型原理だけでなく実質型原理を含む）複原理系型数学にも役立つように教えるにはどうすれば良いか」を直接的に扱うのではなく，より基本的で,“良し悪し”という価値観を含まない,「複原理型の数学の単原理型教育における扱い方には，どのようなものがあるのか」という問題について考えてみよう．

この問題の“解”として，大きくは，次の二つが考えられる．ひとつは「単原理型教育のなかに，疑似的に複原理型教育を“構築”すること」であり，もうひとつは「複原理数学の複数の原理のうち，形式型原理のみに限定して教育の対象とすること」である．以下，前者の解決法を「疑似型方法」，後者を「限定型方法」と呼ぶことにしよう．

そもそも単原理型は型式という“形式”であるから,“実質”としての「学校」に単原理型の影響が及ばない部分領域を作りだすことは可能である[44].「疑似型方法」は，このことに着目した方法で

[42]正確には,“原理”群に「認知の枠式」を適用したもの．さらに議論を進めるには，付録 C の一覧にある「原理の認知的細分枠式」を使用することになる．なお，形式型原理の領域と実質型原理の領域の，表層的な特徴のひとつを述べれば,「（抽象的な）数の世界」と「（単位を備えた）数量の世界」ということができるかもしれない．

[43]正確には，付録 C の一覧の「意味の枠式」の適用，ということになる．

[44]“現実”は常に複合的である．例えば，数の計算を主とする単原理型の「計算科」と，消費活動に題材をとる複原理型の「消費科」という二つの教科を設けるといったことも可能だろう．

ある．一般に，さまざまな“形式”を組み合わせて，“実質”としての「学校」や「学校数学」のありかたを規定することを,「学校・学校数学のコンセプト・デザイン」，あるいは，単に「学校・学校数学の設計」と呼んでいる．

なお，この方法を採用するときには，数学の内容だけではなく，例えば学習成果の評価についても，単原理型とは異なるものを構築する必要があることに留意しておこう．実際，“複原理型の営みに必然的に伴う自由意思による選択[45]”の評価を“単原理”に従わせることは，本質的には不可能である．

次に,「制限型方法」について考えてみよう．この方法の適用は，日常生活のような，学習者の全員に関わるものである場合には，妥当であろう．問題になるのは，現状，多数の学校において，学習者たちが学業を終えた後に就く職業が，学習の過程では未決であることにある．限定型方法で教育すべき“数学的内容”は，一般には，職能共同体ごとに存在する．したがって，制限すべき「形式型原理」に伴う数学的内容を，どのように決定すれば良いのかが問題となる．これについても，“目的”に依存することになるだろうが，学習量という観点からの効率を優先するなら，求められるべきは，職業ごとの“数学”の「合併」ではなく,「共通部分」であるべきだろう．

もちろん，上で述べたことは,「学校数学の設計」のための“方針”にすぎない．例えば，後者の方法の適用の場合，職種ごとの“数学”は，一般に，異なる“言葉”を使用しているから,「学校数学」として採用するためには，しかるべく再構成する必要がある．このあたりを実務的に実現することも，教育数学の課題ということになるだろう．

A.8 補足

この付録 A は,“枠式”を使用する方法についての概説が目的であったため，理解を容易にするための議論の簡易化がなされている．以下では，ここまでの議論で触れられなかった重要な話題について補っておく．

まず,「原理の枠式」の適用では，前節までに述べた“（成人の）職業や日常生活”だけが問題になるのではない．はじめて数学を学ぶ（言語の比喩では，第一言語習得に相当する）場合は，常に形式と実質の双方が必要であって，複原理型の適用可能性[46]が前提となる．

実際，優れた数学の教育実践は，常に複原理型と単原理型の双方を使用しているはずであって,「こういう手順でやれば，必ずこうなる」式の（つまり，単原理型の）思考・方法のみで成功することはありえない．こうした優れた教育実践を活かすためにも，学校における単原理型システム，ことに，評価システムの反省なり再考が必要になるだろう．

また，ここではまったく触れられなかったが，共同体的な視点からみると,「学校共同体の自己保存という“原理”が強くなりすぎると，学校制度の過度の“単原理型化”とでも呼ぶべき弊害が生じる」といった分析を行うこともできる．

---

[45]複原理型の営みと自由意思の関係については，A.4 節の 11 ページあたりの該当箇所を参照されたい．

[46]詳しくは，付録 C の一覧の「同化と調節の枠式」の適用可能性と，それに関連しての「原理の枠式」の適用というべきだが．

B　事例から見る「技法としての臨床教育数学」

本文の第 3 節で述べたように，教授者と学習者のみからなる極小共同体の上で展開される教育数学を「臨床教育数学」と呼んだ．本付録では，この臨床教育数学のもつ“ 技法 ”としての側面を，「どういう状況で必要とされるか」ということに限定して，事例を中心に眺めておきたい．

一般に,「共同体上の数学」について考察する際，最初の実践的な課題となるのは，多様な数学[47]の中から共同体の特性に適合的なものを選択することである．この課題を設定することで,「数学をどのように教育するか」と問う以前に考察すべきことが見えてくるだろう．

今，教授者と学習者のみからなる極小共同体の上で，この課題の“ 解法 ”について考えてみよう．（個々の構成員にとってみれば，大きな共同体上の適合的な「数学」が“ 既製品 ”であるのに対し，臨床教育数学で扱うのは“ オーダーメード ”の「数学」といっても良いかもしれない.）この“ 最初の課題 ”の解決法は，大雑把にいえば，共同体や数学の特性を明確にするために枠式群を適用し，状況の整序をするということになる．

それでは，まず，次のような事例について考えてみよう．

事例 A：中学校の数学教員 A は，3 年生の女子生徒 B から，友人の女子生徒 C について，「同じ高校に進もうと約束しているのだが，最近，数学の成績が不振なので，数学の勉強について相談にのってやってほしい」と頼まれた．そこで，教員 A が生徒 C から話を聞いたところ，次のような事情が明らかになった．

- C は母子家庭で，小学生の弟妹がおり，家事はほとんど C が担っている．
- 母親は，昼間事務職として，夜間は飲食店で，働いている．
- 最近，母親が体調を崩しがちであり，夜間の仕事を C が替わることが多い.（接客はしていない．また，このことは口外はしないよう言われている.）
- 経済的状況が好転する可能性は見当たらず，高校進学は半ばあきらめている．

さて，ここで課題としている基本的な設問は,「今，生徒 C に教えるべき“ 数学 ”は，どのような“ 数学 ”か」ということであった．しかし，この事例の場合，第一に優先されるべきことは，学校としかるべき行政機関との連携の下で，生徒 C の生活状況の改善を図ることだろう．つまり,「教えるべき“ 数学 ”は何か」という問いに対する答えとしては,「存在しない」ということになる.（いわば,“ 自明な解 ”ということになる.）

こうした事例には,「数学をどう教えるか」という問いを超えた教育数学の立場が特徴的に顕れていると思うこともできる．

一般に,“ 技法としての臨床教育数学 ”では，多様な状況の整序に伴い，Tree 型の分岐構造が見られる．例えば，次のいささか“ 俗な ”事例について考えてみよう．

[47] この「数学」は，過去に存在したもの，現在存在しているもの，未来に存在し得るものを，すべて含んでいる．

事例 B：夏休みの前に，高校 3 年生の大学受験のための数学の家庭教師を頼まれた．この生徒に，今，教えるべき数学は，どのような数学か．

目的-手段関係によって状況を整理[48]してみよう．まず，大学合格という〔目的〕のための〔手段〕である“「推薦入試」か「学力入試」か”を分岐条件に採ろう．ここで,（1）「推薦入試による合格」をあらためて〔目的〕に設定し,「数学の平常点を高くする」という〔手段〕を採る．このとき，(1-a) 夏休み以降の学業成績が推薦基準に反映しない場合,「教えるべき数学」は存在しないことになるだろうし，(1-b) 次の定期試験の成績が推薦条件に反映する場合,「教えるべき数学」は「定期試験の範囲の数学」ということになる．次いで,（2）「学力入試による合格」が（1）から分岐した〔目的〕の場合，さらに，志望が，私立文系なのか等々，そして，私立文系の場合,「社会」と「数学」の選択科目として「数学」を選ばないという“自明”な場合なのか,「数学」を選択する場合なのか，等々と分岐していくことになる[49]．

教育数学の扱う領域は,「学校数学」に限定されるわけではない．具体的に，次のような事例を考えてみよう．

事例 C：中学校の卒業後，電気工事関係の仕事に就いている人から，電気関係の資格を取得するため，資格試験の合格に必要な数学を教えて欲しいと依頼された．この人に教えるべき数学は，どのような数学か．

この問題に対するひとつの“標準的”な解答としては,『電気数学』といった名称のテキストを探して，そこに書かれている内容が求める「数学」であるということになるかもしれない．しかし，そのテキストが高校数学の知識を前提としているのなら，学習者が中卒であるという“共同体の特性”に不適合だろうし，テキストが中学校までの数学しか前提としていないとしても，生きて目の前にいる学習者が中学校適度の数学を現時点で身につけていると前提して良いかどうかは別の問題になる．つまり，ここで必要とされることを端的に述べれば,「教授者が，この学習者の数学の学力と資格試験で要求される数学に合わせた教科書を作る」ということになるだろう．

なお，実際には，学習者がその「数学」の習得に割ける時間とか費用等々，あるいは，教授者の電気関係の資格試験についての知識等々の“共同体の特性”についても，求める「数学」の適合性の判定にあたって考慮すべきものになる．

それでは，次のような場合はどうだろう．

[48]正確には,「意味の枠式（目的型と手段型）」の状況への適用による整序，ということになる．

[49]目的-手段関係だけ，つまり,「意味の枠式（目的型と手段型）」しか使用しないわけではない．例えば，学力入試の形態が「記述式か客観式か」といった“分岐条件”は,「媒体の枠式（記録型と記憶型）」（付録 C の一覧参照）の適用と思うことができる．

事例 D：中学校までの数学を予備知識として，電気関係の資格取得に必要な数学の教科書の執筆を依頼された．この教科書で扱うべき数学は，どのような数学か．

事例 C との差異は明らかだろう．この設問に“ 組織的 ”に答えることは，“ 臨床教育数学 ”の役割ではないが，教育数学で扱うべき課題のひとつの典型ではある．

C　「汎用枠式」一覧

以下に，最近，我々が仮の運用をしている「汎用枠式」の一覧を掲載しておく．

C.1　第一種枠式群 $\cdots$ 基盤となる枠式

意味の枠式（*Morphic Frame for Sense*）
- 目的型 (*Purpose Type*)
- 手段型 (*Means Type*)

時間の枠式（*Morphic Frame for Time*）
- 通時型 (*Diachronic Type*)
- 共時型 (*Synchronic Type*)

協同の枠式（*Morphic Frame for Association*）
- 共有型 (*Communal Type*)
- 個有型 (*Individual Type*)

遷移の枠式（*Morphic Frame for Transition*）
- 能力型 (*Competent Type*)
- 活動型 (*Active Type*)
- 所産型 (*Produced Type*)

認知の枠式（*Morphic Frame for Cognition*）
- 形式型 (*Formal Type*)
- 実質型 (*Material Type*)

原理の枠式（*Morphic Frame for Principle*）
- 複原理型 (*Multiple Principles Type*)
- 単原理型 (*Single Principle Type*)

媒体の枠式（*Morphic Frame for Medium*）
- 記憶型 (*Remenber Type*)
- 記録型 (*Record Type*)

量の枠式（*Morphic Frame for Quantity*）
- 単一型 (*Unity Type*)
- 数多型 (*Plurality Type*)
- 全体型 (*Totality Type*)

C.2　第二種枠式群 $\cdots$ 他の枠式から導出される枠式

判断の枠式（*Morphic Frame for Judge*）　$\cdots$ 「認知の枠式」から導出される枠式

$$\left\{\begin{array}{l}\text{反映型}\ (Reflect\ Type)\\[1ex] \text{規定型}\ (Dictate\ Type)\end{array}\right.$$

同化と調節の枠式（*Morphic Frame for Assimilation and Accommodation*）

$\cdots$ 「時間の枠式」×「判断の枠式」の細分枠式

$$\left\{\begin{array}{l}\text{通時型}\\ \text{共時型}\end{array}\right. \times \left\{\begin{array}{l}\text{反映型}\\ \text{規定型}\end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l}\text{抽象型}\ (Abstract\ Type)\ \ 〔=\text{通時型反映}〕\\ \text{実化型}\ (Realize\ Type)\ \ 〔=\text{通時型規定}〕\\ \text{評定型}\ (Evaluate\ Type)\ \ 〔=\text{共時型反映}〕\\ \text{適用型}\ (Apply\ Type)\ \ 〔=\text{共時型規定}〕\end{array}\right.$$

原理の認知的細分枠式（*Cognitive Morphic Refinement Frame for Principle*）

$\cdots$ 「認知の枠式」の原理群への適用（細分）から導出される「原理の枠式」の細分枠式

$$\left\{\begin{array}{l}\text{双原理型}\ (Dual\ Principles\ Type)\\ \text{単形式原理型}\ (Single\ Formal\ Principle\ Type)\\ \text{単実質原理型}\ (Single\ Material\ Principle\ Type))\end{array}\right.$$

（注） 双原理型は，形式原理と実質原理の二種の原理からなる．