TOSMポスト報告（１９９６年８月）
第２回TOSM・シンポジウム資料

蟹江　幸博
三重大学教育学部

目 次

1 はじめに

1993 年 8 月 8 日に第１回 TOSM シンポジウムを福井大学教育学部の教室で開いてから、３年が経ちました。数学者による数学教育運動というよりも、教育学部数学教室に長年勤務し、小中高の教師を送り出してきたものとして、算数・数学教育の現況に対する強い懸念と責任感から、現場の教師に対する何らかの支援活動をする必要を感じた３人の幾何学者が、見通しもなく、戦略もなく、ただやむにやまれぬ思いで始めたのが TOSM(Teaching of School Mathematics) の運動です。

だから、TOSM とは何をやるものかがあるのではなく、我々が算数・数学教育の現場に対して何かを考え、何かをすることが TOSM 活動であり、ほかの人々の協力を仰いで行うものが TOSM プロジェクトであったのです。

第１回シンポジウム当時、TOSM プロジェクトとして考えられたことは

1. TOSM ポスト
2. TOSM シンポジウム
3. TOSM スクール（中高生対象の数学講座）

4. TOSM 相談室（教師対象の巡回相談）

5. TOSM 講座（教師対象の数学講座）

6. TOSM ブックスの出版

でした。

始めの二つ以外は、実施には色々な障害があって、今後の課題となっています。部分的には、三重県の美杉セミナーは、三重県高数研主催の合宿形式で行われる高校生対象のサマースクールで、１９９６年の夏から毎年行われています。

TOSM ブックスの最初の計画に「小学校教師の数学的常識」を挙げ、一部を書き出しましたが、完成はまだまだいつのことになるか分かりません。

TOSM シンポジウムはやっと２回目です。これからは毎年開くこととし、次の年のテーマを前年のシンポジウムのときから募ることにして、意義あるものとしたいと思っています。

TOSM ポストは、教師対象の算数・数学質問箱、ないし、児童生徒の反論・疑問への対処法の質問箱で、1993 年以来続いています。あまり、TOSM が認知されていない所為で、質問の数は多くありませんが、良い質問がかなりあって、答えるのに苦労することもあります。答えはそれぞれにかなり長い文章が用意されていますが、教育界に手蔓が無いので、全国的なものとして出版する機会がありません。三重県高数研のご好意によって、その会誌に回答を掲載していただいております。この資料はそこに掲載された回答を集め、若干の加筆訂正をしたものです。

後でも述べますが、近年のインターネットの爆発的な進展によって、これから加速度的に各学校にインターネットが敷かれていくでしょう。このシンポジウムを岐阜で開くことになって、中馬氏は蟹江にホームページの開設を提案（というより、強要）し、開設の意味を議論するより、まず作ってみるかということになり、三重大学と岐阜大学にホームページを作りました。作って、内容を少しずつ充実していくうちに、これこそが我々の弱点を補う最良の手段ではないかと思うようになりました。

我々の弱点は、知られていないことであり、どこへでも出かける行動力と金のないことです。それがインターネットによって、補われます。面と向かって質問しにくいことも、キーボードを叩くだけで可能になります。答える側も、質問されてもすぐに答える必要はなく、時間をかけて答えれば良いのですから。

ホームページのアドレスは

1. TOSM 岐阜：http://guedu.cc.gifu-u.ac.jp/̃chuman/index.htm

2. TOSM 三重：http://www-gene.edu.mie-u.ac.jp/kanie/kanie_da.htm

です。ご要望やご質問を受け付ける掲示板も、今は４種類（TOSM 三重に）あります。シンポジウムの休憩時間や終了後、ご希望の方に体験していただくことも考えております。

ところで、このシンポジウムのテーマの一つは「数学離れ」ですが、初等・中等教育でばかりでなく、高等教育における数学離れの風潮も顕著なものがあります。日本数学会でもこれまで座視していたことを反省し、「大学における数学基礎教育」や「数学の将来」の問題に関して検討するワーキンググループが作り、活動を始めております。数学者集団と

しての数学会が、大学を含めた数学教育の現況に対して、行動を起こさねばならないと考えていることだけはお汲み取りいただきたいと思います。それぞれのワーキンググループのホームページをご覧くださり、ご意見をお受けしたいと思っております。

1. 大学における数学基礎教育 WG：http://skk.math.hc.keio.ac.jp/mathsoc/
2. 数学の将来 k 計画 WG ： http://www.kusm.kyoto-u.ac.jp/sugaku/index_j.html

数学会の体質も改善し、少なくとも高校の数学の先生方に喜んで入会して頂けるような学会に変えて行くべきだという意見も強くなって来ております。現実的には過去のしがらみもあり簡単ではないと思いますが、数学会への提案がございましたらいつでも取り次ぎ、実現に努力して行きたいと考えております。

2 TOSM ポストの質問集 (1回－5回 (開設中))

TOSM グループの活動は細々乍ら続けておりますが、この時点でご紹介出来るようなものはポストくらいのものです。去年からの分はやっと第４回 TOSM ポストとして以下にあげる３つの質問があるだけです。時間は掛かっても必ず、何等かの回答をさせて頂きますので、これからも奮って算数・数学教育上の疑問点を、三重大学教育学部数学教室内 TOSM 三重ポストまでお送り下さい。勿論、TOSM 福井ポスト・岐阜ポストに投函されても同じ様にグループとして責任をもって回答させて頂きます。

どんな質問を受け付けていることかを示すために、ここまでに投函された質問のリストを挙げておきます。

1. 第１回 TOSM ポストの質問
   (a) 辺の長さがすべて異なる直方体の展開図はどれだけあるか？
   (b) 円周上に n 点を取り互いに線分で結ぶとき、円内にできる領域は最大幾つか？n だけで簡単に表わされるか？
   (c) 正多角形を描きたい。円を使って描くように指導してある教科書があるが $360°$ を辺の数で割って整数にならないもの、例えば正７角形や正１１角形などを分度器とコンパスで描くことが出来るか？
   (d) 直三角柱がある。すべての側面を横断するように平面で切った切り口は三角形になるが、正三角形になることがあるか。あるとしたらその長さは底面の三角形だけで一意的に定まっているか。出来れば底面を与えたとき、その正三角形を簡単に描くことが出来るか？
   (e) $\sqrt{24x^2+8x+1}$ が有理数となる有理数 x にはどんなものがあるか？
2. 第２回 TOSM ポストの質問

(a) 正方形を縦横に並べて大きい正方形を作るとき、大小取り混ぜて多くの正方形ができる。n 倍にしたときにできる正方形の数は分かるが、同じことを正三角形でしたら幾つになるか、公式があるか？

(b) 三角形の辺上の点を通り、三角形の面積を２等分する直線を引く問題は中学の教科書にあるが、最初に与える点が辺の上にない場合にも出来るのか？

(c) 1. 新しいカリキュラムに向かって、数学の目的は何なのか。どう設定するのがいいか。

2. ほとんどの生徒が文科系を志望しているので、１年、２年と学年が進むにつれ実力テストなどで成績が下がる。数学が好きになるような興味付けは出来ないか。

3. 第３回 TOSM ポストの質問

(a) 高校数学で、数学的帰納法を $n \geq 0$(n は整数) に対して証明する時、第１段を $n = 0$ で示して第２段を $n \geq k(k \geq 0)$ に対して示して良いでしょうか。それとも、高校では帰納法は自然数である n に対するものなので、第１段で $n = 0, 1$ に対して示し、第２段を $n \geq k(k \geq 1)$ に対して示した方が良いでしょうか。

(b) 長方形の縦と横はどうして決めるのですか。倒せば縦と横が変わりますし、斜めに置いたら、縦と横とをどうして決めたら良いのでしょうか。(円錐の場合などは、倒しても高さは変わらないのですが、長方形だと変わるような気がします。)

(c) 円を投影したら何になるか。楕円になると思うが、元の円が内接する正方形を考えて、その投影が台形になる場合に、相対する接点を結ぶ線分の交点は一体何になるのか。

4. 第４回 TOSM ポストの質問

(a) ハノイの塔の柱が４本になったらどうなるのか？

(b) 空集合の記号 $\emptyset$ はどう読むのですか。ギリシャ語のファイではないということですが。

(c) 対偶が真だということと背理法は違うのだという話がありますが、本当はどういうことなのでしょうか。

3　第１回TOSMポストの質問と解答

質問の解説は節を改めて行うことにする。本節では質問と、質問に関する経緯と、解答だけを簡単にまとめた。

1. 辺の長さがすべて異なる直方体の展開図はどれだけあるか？

   [質問について]　TOSM ポスト開設のきっかけとなった質問である。直接蟹江が質問を受けた。質問者は三重県の小学校の先生で、教研集会の廊下での立ち話である。児童とこの問題を考えたが４０まで数えてこれですべてか分からないということであった。そのときは、場合を数え尽くすためのツリーが完全であるかに注意し、また得られた場合のすべてが異なるものであるかをきちんと見ればよいというような当たり前のことしか言えなかったが、後で気になって仕方がない。珍しいほど熱心な先生で感心したし、この問題を考えてみたとき返事を差し上げようと思っても、失礼ながら名前が判らない。その罪滅ぼしに、というのも TOSM ポスト開設の理由の一つである。

   [解答]　展開図を平面図と見たとき、合同なものは同じだと考えるのか、裏返しは許さないで回転で重なるものだけ同じだと考えるのかという問題がある。これは展開図として折り目の山折りと谷折りを区別するかどうかという問題であって、どちらでなければならないという訳ではない。答えは次の通り。

   裏返しを許さなければ 96 通りで、許せば 54 通りである。ちなみに辺の長さの一組が一致するときは正四角柱の形になるが、52 通りと 29 通りで、立方体の場合は、20 通りと、11 通りである。

2. 円周上に n 点を取り、互いに線分で結ぶとき円内に最大いくつの領域が出来るか？

   [質問について]　[記念すべき最初のポスト投書である。残念ながら現場からの投書でなく、修士論文の構成上分かれば嬉しいという三重大学のある大学院生の投書である。]

   [解答]　この数を $\gamma(n)$ と表わす。実際に図を描いてみると、$\gamma(1) = 1, \gamma(2) = 2, \gamma(3) = 4, \gamma(4) = 8, \gamma(5) = 16, \gamma(6) = 31$ などとなり、最初のうちの $\gamma(n) = 2^{n-1}$ という予想は $n = 6$ に至って初めてずれてくる。

   一般的に求めることが難しいようだが、実は $\gamma(n)$ を具体的に求めることが出来る。

$$\gamma(n) = 1 + \frac{n(n-1)}{24}\{(n-2)(n-3) + 12\}$$

証明は帰納法でやる。$\gamma(n) = \gamma(n-1) + a_n$ であるような a_n が求まればよいが、これが

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} \{(i-1)(n-i)+1\} = n + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n}{6}(n^2 - 3n + 8)$$

と求まるのである。

3. 正多角形を描きたい。円を使って描くように指導してある教科書があるが $360°$ を辺の数で割って整数にならないもの、例えば正７角形や正１１角形などを分度器とコンパスで描くことが出来るか？

[質問について]　初めて封書で届いたポストへの投書である。何とか答えてあげたいが、このままでは質問が適切でないとしか言いようがない。

適切でないという理由を説明しよう。まず分度器とコンパスだけでは多角形は描けない。定規が必要である。（勿論、鉛筆なりペンなりという道具も必要であるが、描くということからこれは当然のことだから考えなくても良いだろう。）

これは質問を茶化しているのではない。定規を使うのは当たり前すぎて、敢えて質問に入れなかっただけであろう。しかし定規を使うと言っても、その長さの目盛りは使うつもりはないと思う。目盛りを使うとは、個々の線分の長さを測りながら作業することであるが、１辺の長さが幾つかということは重要ではない。問題となる図形が一つ描ければ、それを相似拡大して任意の長さを辺を持つ正多角形が作れることになるから。

ところで分度器を使うということはその目盛りを使うことであり、それが許されるならどんな正多角形も描けることになる。適当な半径の円を描く。この円周をまっすぐに伸ばして線分にし、それを n 等分する（これはコンパスと定規だけで出来る）。これをまた円周になるように戻すのである。

ここで円周を円に巻き付けたり、伸ばしたりしているのだが、その操作は許されないと考える人もいるかも知れない。しかし分度器を使うことを認めるなら、この操作も認めていることになるのである。分度器を作成する際、その目盛りを入れる作業にはどうしても、どこか本質的なところでこの操作を行っているのである。

また逆に、そういうことが出来ないのでは円周の長さをどのようなものだと考えればよいのかという反論もありそうである。初等教育の範囲内では、許す許さぬという問題にはなりにくいだろう。

従ってこの問題をそのまま素直に受け取るのなら、“どんな n に対しても正 n 角形は作図できる”と言っても良いかも知れない。

しかし上の操作の問題は、円周率の無理数性や超越性の問題や、曲線の長さの定義の問題が関ってきて、初等教育の範囲内では議論しにくい問題でもある。

議論だけなら初等的にできるような類似の問題が古代ギリシャの昔から知られていて、様々な数学者が解決に努力している。若い頃のガウスが正１７角形の作図に成功したことを、少なからず誇りに思っていたということも数学史上のエピソードとして有名である。最終的な解決は、革命にか恋にか破れ、形の上では決闘で死んだフランスの天才児ガロアまで待たねばならない。

その問題は

“ 定規とコンパスだけで正 n 角形が作図できるか？”

である。元の問題には一応答えたので、これがポストに投函された問題だということにしてもらおう。

[解答]　ガロア理論を使った証明しか知らないので、初等的に解説することが出来るかどうか難しい。しかし、答えは分かっている。

“ 正 n 角形が定規とコンパスだけで作図できるための必要十分条件は、n が次の形をしていることである。

$$n = 2^N p_1 p_2 \cdots p_k \qquad (p_i = 2^{e_i} + 1 (N, e_i \in \mathbf{Z}_{>0}) \text{ は互いに異なる素数}) ”$$

TOSM グループの事業として、初等教育の教員養成課程に対する（大学の）教科書を書く予定があり、この問題はそこで議論することになっているので解説は付けない。

4. 直三角柱がある。すべての側面を横断するように平面で切った切り口は三角形になるが、正三角形になることがあるか。あるとしたらその長さは底面の三角形だけで一意的に定まっているか。出来れば底面を与えたとき、その正三角形を簡単に描くことが出来るか？

   [質問について]　ポストを締めた後（４月１８日）、皇学館大学の平林一栄教授にポストの話をしたとき、永年暖めていたという問題を頂いたものである。

   [解答]　底面の三角形をその辺の長さ $a \le b \le c$ で特徴付け、正三角形の辺の長さ ℓ を a, b, c の関数で書けばよい。そしてその長さ（関数）が、作図できるものであればよい。平林教授の質問は“ 簡単 ”に描けるかという点に力点があったようで、その意味では解答になっていないかも知れないが、取り敢えず出来ることだけ報告しておこう。

   答えは

$$\ell^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{2((a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2)}}{3}$$

   である。関数の形が四則と自乗と平方根を取ることしか出てこないので、a, b, c からコンパスと定規だけを使って作図できる。作図の仕方は初等的だが、関数の表示通りにやろうとすればかなり手間がかかる。ここまでの分は解説で詳しく述べるが、簡単に作図できるかどうかは今の所出来ていない。

5. $\sqrt{24x^2+8x+1}$ が有理数となる有理数 x は？

[質問について] 同僚の O 氏から示された和算の問題である。幾つかは求めてみたが、という話で、考えてみることにした。高校数学の問題集にもありそうにも思うが、調べてないので分からない。調べるよりやった方が速い。

[解答] 任意の有理数 α に対して、$x=\dfrac{2\alpha-8}{24-\alpha^2}$ とおけば、$\sqrt{24x^2+8x+1}=|\dfrac{\alpha^2-8\alpha+24}{\alpha^2-24}|$ という答えが見つかる。他に偶然有理数になる場合がもあるかもしれないが、分からない。

一般に $\sqrt{ax^2+bx+c}$ がいつ有理数になるかという問題は、x が有理数でなくてもよいなら簡単で、任意の有理数 $\alpha>0$ に対して、$ax^2+bx+c=\alpha^2$ の二つの解を考えればよい。

a,b,c が有理数でというなら、x も有理数の範囲で求める問題が自然だろう。かくて、次の形に一般化した問題を考えることにしよう。

有理数 a,b,c を係数とする二次式の平方 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ はどんな有理数 x に対して有理数になるか？

任意の有理数 a,b,c に対して問題の解となる有理数 x をすべて求めることは難しい。勿論 $ax^2+bx+c-\alpha^2=0$ の判別式 $b^2+4a(\alpha^2-c)$ が有理数の平方になるような α に対して得られる x が求める有理数のすべてであると言うことも出来るが、これでは問題の言い換えだけで具体的に x を求めることは出来ない。

x が沢山（任意の有理数に対して一つずつ）あるための、a,b,c に対する十分条件を挙げよう。

(a) $a>0$ で、$\sqrt{a}$ が有理数

(b) $c>0$ で、$\sqrt{c}$ が有理数

そのとき、任意の有理数 α に対して

(a) $x^\alpha=\dfrac{a\alpha^2-c}{b-2a\alpha}$ とおけば、$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}|\alpha+\dfrac{a\alpha^2-c}{b-2a\alpha}|=\sqrt{a}|\dfrac{a\alpha^2-b\alpha+c}{b-2a\alpha}|$

(b) $x_\alpha=\dfrac{b-2\sqrt{c}\alpha}{\alpha^2-a}$ とおけば、

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=|\sqrt{c}+\frac{\alpha(b-2\sqrt{c}\alpha)}{\alpha^2-a}|=|\frac{\sqrt{c}\alpha^2-b\alpha+a\sqrt{c}}{\alpha^2-a}|$$

となる。

この式で与えられないような解を見つけることは出来なかった。(a),(b) の条件を満たさない場合に解があるかどうかという問題は読者に残しておく。

3.1　問題１の解説

問題１　辺の長さがすべて異なる直方体の展開図はどれだけあるか？

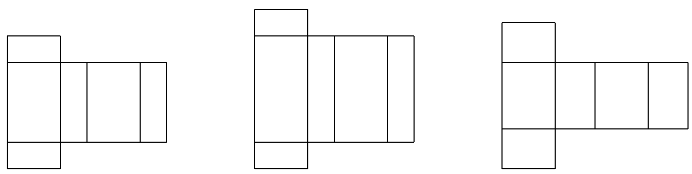
[解説]　すべての辺の長さの長さの違う直方体をその幾つかの辺に沿って切り開き平面図形にすることを展開するというのであった。

何もせずに考えてみても幾つあるのか分かりそうにないので、まずやってみることになる。実際に展開図を描くと言っても描くとなれば、具体的に辺の長さを決めないといけない。一つ一つの展開図を描く際に、一番長い辺、短い辺、中間の長さの辺がどれだか分かっていれば、結果には影響しないのだが、出題者の言うように４０以上もあるとなれば、既に数えたものと数えてないものの区別がし難く、数え尽くすこともそれらが互いに異なっていることも判然としないことになる。

そういう時はまず、多くの場合、具体的に数値を決めて始めてみて、調べていくうちにその数値の適切、不適切が分かってくるようになると、物事を一般化してまたは抽象的に考えられるようになる。

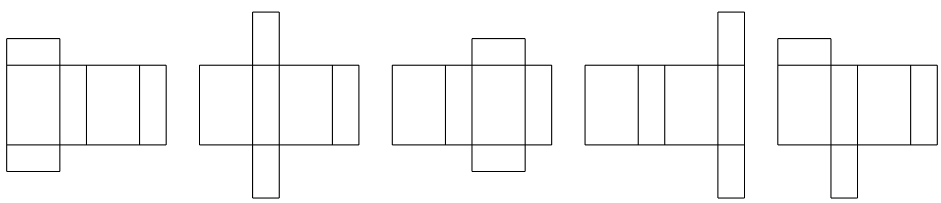
今の場合非常に具体的な問題なので抽象的になど考える必要はないように思われるかも知れないが、これが数学的思考の有効な部分なのである。

少し実験をしてみよう。長さそのものは重要ではないので、辺の長さの比を与えることにしよう。$a > b > c$ を直方体の辺の長さとし、その比 $a : b : c$ を例えば、$a : b : c = 3 : 2 : 1, 4 : 2 : 1, 5 : 4 : 3$ とか与えて同じ展開図を一つ描いてみると次のようになる。



右の図 $(a : b : c = 5 : 4 : 3)$ では色々な位置に置くと紛らわしくなりそうだし、左の図 $(a : b : c = 3 : 2 : 1)$ なら十分区別できるし、中の図 $(a : b : c = 4 : 2 : 1)$ にするまでのことはないと思われる。

そこで $a : b : c = 3 : 2 : 1$ として図を描くことにしよう。さて、幾つか描いてみよう。



これを考え付くだけ描いたとしても、それで全てかどうか、またそこに挙げたものが互いに異なるかどうかをどうやって調べればよいのだろう。展開図を描くと言うことについて少し考えてみよう。

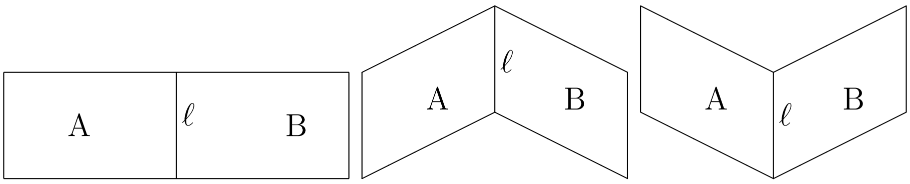
直方体の面の数は６、辺の数は１２、頂点の数は８である。平面図にするとき６つの面は繋がっていること、しかも共有するのが頂点だけということはないとしているので、５つの辺を共有して繋がっていることになり、７つの辺を切り開くことになる。

１つの辺を切り開くと展開図には２つの辺になって現れる。展開図から実際に直方体を作るのであれば、糊代が必要となるが、対応する二つの辺のどちらか一方だけにあれば良い。上に描いた展開図には糊代がないが、糊代を描き込むとすれば、７対の辺のどちらに糊代を付けるかで、$2^7 = 128$ 通りの展開図が、上の展開図のそれぞれに付随することになり、展開図の総数は 128 倍されることになる。勿論今は、糊代を描かないで展開図がどれくらいあるか考えることにする。

一つの展開図を描いて、それを色々な人が見ることになれば、図を見る角度が違っている訳で、各自にみえている図そのものは異なっているのだが、それでも同じ一つの展開図を見ていることを疑う人はあるまい。このことはつまり、平面図形を回転させても同じものだと思っているということ、もっと言えば展開図を描いてある台紙の紙を動かしても同じだと考えているということである。これを数学的に言えば、平面の運動は回転と平行移動で生成されるのだから、回転や平行移動で重ね合わすことの出来る二つの図形は同じである（合同ともいう）と言うのである。

ふつう合同というと、裏返し、つまり線対称で重なるものも合同であると考えている。しかし、裏返しは平面の運動では実現できない。例えば上に描いた５つの展開図のうち初めの４つはどんな線対称を施しても変わらないが、最後のものは裏返すと、元の展開図とはどのように回転させても重ならないことが分かる。展開図としてはこのことはどういうことになるのだろうか？

展開図から立体を作ることを考えると、その手続きは図を切り抜き、線分の所で垂直に折り曲げるということになる。下のような二つの面 A, B をその間の線分 ℓ で折り曲げるとして、右の二つの折り方をそれぞれ山折り、谷折りという。山折りでは、線分 ℓ は手前に持ち上がっている感じで、谷折りでは反対に線分 ℓ が沈みこんでいるようになっている。手前の側から見て、山折りでは面 A, B のなす角は $270°$ で、谷折りでは $90°$ になっている。



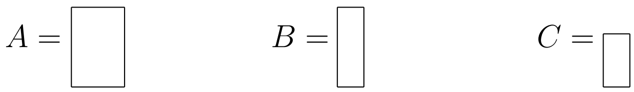
直方体は凸の図形だから、展開図を折り曲げていく際、最初に山折りにしたら最後まで山折りに、最初に谷折りにしたら最後まで谷折りにしないといけない。ある展開図を山折りで折っていって直方体を作れるなら、その展開図を裏返せば、谷折りで同じ折り方の直方体が得られる。山折り谷折りを指定せずどちらでも良いとなれば、展開図も裏返して重なるものは同じだと思ってよいことになる。

従ってどちらでなければならないという訳ではなく、どういう状況かを決めればよいのである。直方体の展開図になりうる平面図で、回転と平行移動で重なるものだけを同じと見て分類する場合が最も展開図の数が多くなる。この場合を三回型の分類といい、裏返しで重なるものも同じだと思う（一つの展開図を山折りでも谷折りでも考えるということに当たる）場合を三合型の分類と言おう。三回型とは辺の長さが３種類で回転と平行移動だけという気持ちで、三合型とは辺の長さが３種類で合同も許すという気持ちを表わした、

この文章でだけの呼び方である。

この分類の考え方を用いて、二回型、二合型、一回型、一合型の分類も後で行うことにする。辺の長さが２種類の二回型、二合型の分類は正四角柱の展開図の分類で、辺の長さが１種類の一回型、一合型の分類は立方体の展開図の分類ということになる。

これらを出来るだけ統一的に取り扱いたい。実際幾つか図を描いてみると、面と面の繋がり具合だけが問題になることが分かる。そこで面に名前を付けて、$A = a \times b, B = a \times c, C = b \times c$ と面積の大きい順に A, B, C と呼ぶことにしよう。前の図でなら



となる。だから上に５つ描いた展開図はこの記号で書けば、

```
C      C      C        C   C
ABAB   ABAB   ABAB   ABAB  ABAB
C      C      C        C    C
```

という図式（ダイヤグラム）で表わされることになる。

しかし、ダイヤグラムで書くと言っても、どんなダイヤグラムが直方体の展開図に対応するのかを定める必要がある。すると、直方体の展開図になることが出来るダイヤグラムを特徴付けるという話になって、この問題は難しいかも知れない。

それでもこのまま悩んでいても始まらない。まず直方体のダイヤグラムになるための必要条件を挙げていって、それに基づいてすべてのダイヤグラムを書き尽くして、幸いにしてダイヤグラムの数が有限個ならいつかこの作業も終わって、その後でそのダイヤグラムが実際に直方体の展開図になることを確かめればよい。その方針に従って、直方体のダイヤグラムになるための必要条件を挙げてみよう。ダイヤグラム自体も回転して重なるものは同じと考えることにする。一番個数の多くなる三回型だと思って、三回型のダイヤグラムのためのルールを作ることにする。多少の試行錯誤の後に次のようにまとめてみた。

ルール（三回型のダイヤグラム）

1. A,B,C がそれぞれ２つずつで全部で６つ
2. ```
   XY
   UV は起こらない
   ```
3. ```
   XYZ
   U V は起こらない
   ```
4. ```
   XYZW
   U  V は起こらない
   ```
5. XYZUV は起こらない
6. XY なら X≠Y
7. ```
   Z
   XY なら X≠Y≠Z≠X
   ```
8. XYZ なら X=Z≠Y

ルールの説明をしよう。

ルール１は説明するまでもない大前提である。勿論二型や一型の時は変わってくる。ルール６－７も三型の時だけ成り立つことで、一、二型では成り立たないルールであり、ルール８は二型では“ XYZ ならX=Z ”という形になる (Y が他のものと同じでないと主張しないということである)。

ルール２－５の“ 起こらない ”というのは、出来上がったダイヤグラムのどんな部分にもこのようなものがあってはならないということである。少し数学的な言い方をすれば、“ 部分ダイヤグラムとしてルール２－５に挙げたものは含まない ”ということになる。

ルール２はXYUV のどこかの面の間は切り開かないといけないが例えばU とV の間を切り開けば面U とV が重なってしまうからであり、ルール３、４は面U とV が重なってしまうからであり、ルール５は垂直に折り曲げていくことから面X とV が重なるからである。

これらのルールが直方体の展開図になるために必要なことは説明から明らかだろうが、これらが十分になることはこれから実際に作ったものが全て実際に直方体の展開図になることが分かるので（読者自身で確かめてください）、これが必要十分のルールだということも（その時には）分かるのである。

さて、全てを尽くすことに注意しつつ、更に重複して数えず他の型の時にも応用が利くことにも注意を払って、ダイヤグラムを書き上げていくことにしよう。

一列に並んでいるのを連と呼ぶことにして、最大の長さの連によってダイヤグラムを分類しよう。上に挙げた展開図と対応するダイヤグラムにはABAB やCAC,CBC などの連があった。

ルール５により連の長さは４以下だから、長さ最大の連の長さが幾つであるかによって IV, III, II 型に分けよう。

まず IV 型である。ルール８により長さ４の連はABAB という連の形のものと思ってよく、連ABAB を含むものを全て考えることにする。もう一つの面C はこの連の長さを増やす方向にはつかないので、上か下かに付くことになるが、ルール３、４があるのでC は連ABAB の上下に分かれて付くことになる。全てを尽くせば、

$IV_0(A, B)$ 型

```
C     C     C     C
ABAB ABAB ABAB ABAB
C     C     C     C
```

$IV_1(A, B)$ 型

```
C    C    C     C    C     C
ABAB ABAB ABAB ABAB ABAB ABAB
 C     C     C   C     C    C

 C     C     C   C     C    C
ABAB ABAB ABAB ABAB ABAB ABAB
C    C    C     C    C     C
```

となる。連の中身がABAB なので、分類の名前に (A, B) が付けてある。IV_0 と IV_1 の違いは IV_0 が連の軸を対称軸にして線対称であるものを集め、IV_1 は線対称にならないものを集めてあることにある。従って、三合型の時には IV_0 型のダイヤグラムの数は減らないが、IV_1 型のものは半分になる。上の表示で、$IV_1(A, B)$ 型のダイヤグラムは二列に書いてあるが、上下のものが線対称で写り合うように並べてあるので、三合型の時はその片方（上の列）だけを選べばよいからである。

$IV_i(A, B)$ $(i = 0, 1)$ と書いたら $IV_i(A, B)$ 型のダイヤグラム全体の作る集合を表わすこと

もあるということにしていただくと有り難い。そうすると、$IV_i(A,B)=IV_i(B,A)$であることが分かり、これは$\{A,B\}$という組み合わせだけで定まり、他の組み合わせ$\{A,C\},\{B,C\}$の場合も同等に起こりうるのでダイヤグラムの数はIV_0型は$4\times3=12$でIV_1型は$12\times3=36$となる。（三合型の時はIV_0型は相変わらず12で、IV_1型は半分の18となる。）

連の長さの最大が３のIII型を考える。まず、ルール８により、その連がABAであるとしてもよい。次の面を何処に付けることが出来るかを考えよう。連の長さを増やす方向にとればIV型になってしまうので上下に付けねばならない。ルール６、７により、この連に直接付く面はA,Bではいけないので、Cであることになる。その付き方の全てを挙げると

```
C     C   C     C      C     C   C           C
ABA  ABA  ABA   ABA   ABA  ABA   ABA  ABA   ABA
C     C    C      C   C    C          C
```

となる。勿論回転で重なるものは省いてある。初めの二つは線対称であり、最後の三つは面Cが連ABAに関して一方の側だけにある場合を表わしており、ルール２、３により連に直接付く面Cは一つだけとなる。

今度はこの面Cに面Bを付けていくことになるが、ルールのおかげで付き方は可成制限される。連の長さが４になる場合（二つ目と最後のもの）を省き、回転で重なるものを除けば次のようになる。

```
                  C                          B
                                             C
BC      C    BC   ABA  BC         C               C  CBC
 ABA     ABA  ABA  C    ABA     ABA       ABA   ABA    ABA        ABA
 C     BC       C  B       C  BC          C   BC               CBC
```

この１０個のダイヤグラムの中には線対称なものは一つもなく、互いに線対称で写り合うものが５対である。それでもIII型をもう一度分けて、長さ３の連を一つしか含まないものをIII_1型、長さ３の連を二つ含むものをIII_2型と呼ぶことにすれば、次のようになる。（印刷の都合上、４番目のダイヤグラムは回転させてある。）

$III_1(A,B)$型

```
BC      BC       C       C
 ABA     ABA    ABA    ABA
  C        C  BC     BC
```

$III_2(A,B)$型

```
                      B     B
BC      C             C     C   CBC
 ABA     ABA   ABA   ABA         ABA      ABA
 C     BC        C   C                 CBC
```

$III_1(A,B)$型はAとBの順序対(A,B)が異なれば異なっており、順序対は$(A,B),(A,C),(B,A),(B,C),(C,A),(C,B)$の６種類あり、$4\times6=24$種の異なるダイヤグラムがある。$III_2(A,B)$型の場合は、$IV$型の場合のように$(A,B)$を取り替えても、$III_2(A,B)$と$III_2(B,A)$は同じではないが、順序対を６種類すべて替えて調べてみると、同じダイヤグラムが丁度二つずつ出てくるので、$6\times6/2=18$種類異なっている。（３合型の時は丁度この半分の$12+9=21$種類となる。）

最後にII型である。これはどの連も長さが2である場合ということになる。最初に考える連をABとし、連の長さが増えないようにしようと思えば、ルール7によりこの連に直接付く面の付き方は、両側に付く２通りと片側にしか付かない４通りの６通りである。

```
C    C      C         C
AB  AB    AB  AB  AB  AB
 C  C         C       C
```

それぞれの場合、ルールに従えば、残りの面の付き方は一通りに定まり、

```
        BC          CA  CA         AB      BC   AB
         AB       AB     BC      BC      CA      CA
II 型     CA   BC         AB   CA      AB          BC
```

となる。最初に考える連を他の５通りのどの連としても、延長して得られるダイヤグラムはまったく同じだけ得られることは容易に確かめられる。従って三回型なら６通りで、三合型なら半分の３通りということになる。

まとめると、三回型は $IV_0 \cup IV_1 \cup III_1 \cup III_2 \cup II$ で $12+36+24+18+6=96$ 通りで、三合型なら $IV_0 \cup IV_1 \cup III_1 \cup III_2 \cup II$ で $12+18+12+9+3=54$ 通りである。

同様の考え方で１対の面が正方形の場合、つまり正四角柱の場合を考えることにしよう。上のようにダイヤグラムを使って考えていく場合、等しくなれる辺（稜）は $a=b$ であるか $b=c$ であり、面の言葉で言えば $A=B$ であるか $B=C$ である。しかし $B=C$ であったとしても、辺の長さ a, c の大小そのものが問題になっている訳ではないので、$a<c$ と考えればダイヤグラムの上では $A=B$ の場合だと考えてもよい。数学者はこういう時、“一般性を失うことなく”$A=B$ と仮定できる、という言い方をするのだが。とにかく、A=B と仮定しよう。

IV 型で (A,A) という組み合わせの時は、長さ４の連は AAAA となって回転対称になる。従って二つの面 C の付き方が回転で不変なものはそのまま残るが、回転で変わってしまうものは写った先のダイヤグラムと同じダイヤグラムだということになり、数は半分に減ってしまう。つまり、$IV_1(A,A)$ を回転対称なもの $IV_{10}(A,A)$ と対称でないもの $IV_{11}(A,A)$ に分けると、$IV_{10}(A,A)$ の分は減らないが、$IV_0(A,A)$ と $IV_{11}(A,A)$ の分は半分に減ってしまう。

勿論 (A,C) 型はそのまま残るので、次のようになる。

```
                C       C
IV0(A,A) 型     AAAA   AAAA
                C       C

                A       A        A        A
IV0(A,C) 型     ACAC   ACAC   ACAC   ACAC
                A       A        A        A

                 C          C    C         C
IV10(A,A) 型     AAAA   AAAA   AAAA   AAAA
                    C   C         C       C

                 C       C      C          C
IV11(A,A) 型     AAAA   AAAA   AAAA   AAAA
                   C    C         C      C

                A       A        A        A        A        A
IV1(A,C) 型     ACAC   ACAC   ACAC   ACAC   ACAC   ACAC
                  A        A        A     A         A        A

                  A        A        A     A         A        A
                 ACAC   ACAC   ACAC   ACAC   ACAC   ACAC
                 A       A        A         A      A          A
```

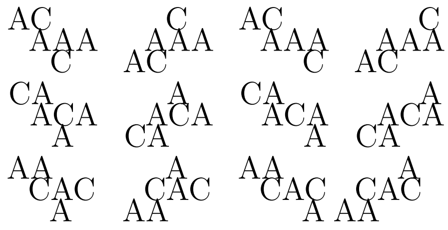
III_1 型は順序対が異なれば異なるので、$(A,A),(A,C),(C,A)$ の三通りに出てくるダイ

ヤグラムはすべて異なる。

$III_1(A,A)$ 型

$III_1(A,C)$ 型

$III_1(C,A)$ 型

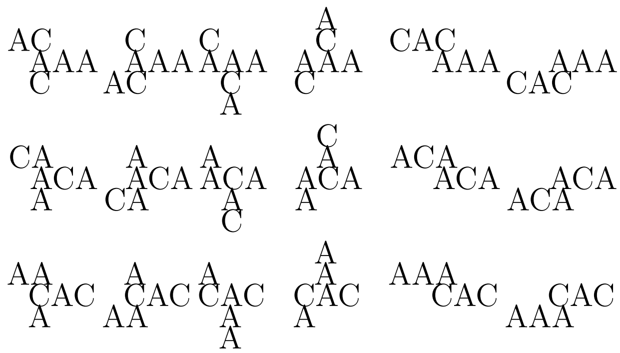


だが III_2 型は $(A,A),(A,C),(C,A)$ を書き上げると、

$III_2(A,A)$ 型

$III_2(A,C)$ 型

$III_2(C,A)$ 型

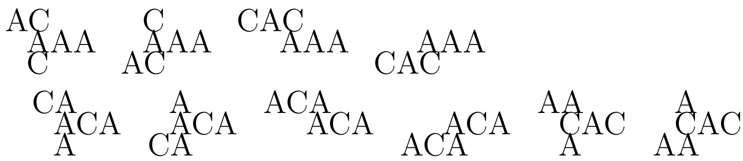


となるが、このうち八対が回転で同じダイヤグラムになることが分かる。同じものを減らさないといけない。

もう少し詳しく言うと、$III_2(A,C)\cup III_2(C,A)$ のダイヤグラムのうち AAA という連を持つものは $III_2(A,A)$ 型のどれかと同じであり、ACA と CAC という二つの連を持つダイヤグラムは $III_2(A,C)$ と $III_2(C,A)$ に同じものが 2 対ある。

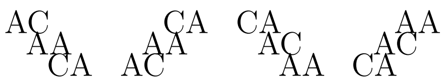
従って III_2 型は $6\times 3-8=10$ であって、まとめると次のようになる。

III_2 型



II 型は A=B と置くと同じになるダイヤグラムが 2 対あるので、

II 型



まとめると、IV_0 のみが線対称なダイヤグラムなので、二回型は $IV_0\cup IV_1\cup III_1\cup III_2\cup II$ で $(2+4)+(4+4+12)+(4\times 3)+10+4=52$ 通りで、二合型なら $IV_0\cup IV_1\cup III_1\cup III_2\cup II$ で $6+10+6+5+2=29$ 通りである。

最後に立方体の場合だが、勿論 A=B=C と置けばよい。元の分類から回転で同じになるものが増えたことを考慮に入れると、

IV_0 型

```
A      A
AAAA  AAAA
A      A
```

IV_{10} 型

```
A       A  A     A
AAAA AAAA AAAA AAAA
   A A      A   A
```

IV_{11} 型

```
A     A   A      A
AAAA AAAA AAAA AAAA
 A   A      A  A
```

III_1 型

```
AA    A   AAA
 AAA  AAA   AAA   AAA
 A   AA         AAA
```

III_2 型

```
AA     A  AA      A
 AAA  AAA  AAA  AAA
  A  AA      A AA
```

II 型

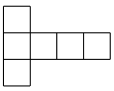
```
AA     AA
 AA   AA
  AA AA
```

となる。まとめれば、一回型は $IV_0 \cup IV_1 \cup III_1 \cup III_2 \cup II$ で $2+(4+4)+4+4+2=20$ 通りで、一合型なら $IV_0 \cup IV_1 \cup III_1 \cup III_2 \cup II$ で $2+4+2+2+1=11$ 通りである。

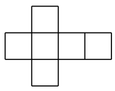
立方体の展開図が１１通りであるという記述があるのはこの一合型の分類のことである。ここまで読んできて展開図の話であることを忘れてしまった人のために、一合型の 11 個のダイヤグラムと対応する展開図を描いてみると、

IV_0 型

```
A
AAAA
A
```

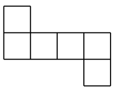


```
 A
AAAA
 A
```

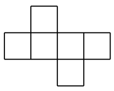


IV_{10} 型

```
A
AAAA
   A
```

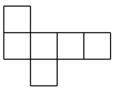


```
 A
AAAA
  A
```

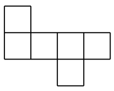


IV_{11} 型

```
A
AAAA
 A
```

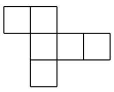


```
A
AAAA
  A
```

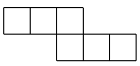


III_1 型

```
AA
 AAA
 A
```

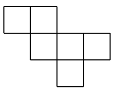


```
AAA
  AAA
```

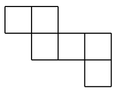


III_2 型

```
AA
 AAA
  A
```

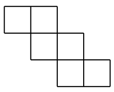


```
AA
 AAA
   A
```



II 型

```
AA
 AA
  AA
```



となる。

三回型から一合型までの６種類の場合に、上に述べたものが展開図のすべてであり、また同じものを重複していないことは納得されたと思うが、重複していないことの説明が統一的でなく、場合によって $\times 3$ であったり $\times 6$ であったりしていたり、退化した場合（二回型の時）など互いに異なるものの数を導くのが統一的ではなかったようだ。上での議論は、すべての展開図を求めたいということに議論の力点があったのでこのような欠点が出

てしまったが、重複を許さないようにすることに力点を置こうとするならばそのようにも出来る。

そのために、蛇足かとも思うが、並べ直してみよう。つまり場合分けをすっきりさせて、指標となる面が一つだけで、数え上げたらその数を $\times 3$ すれば良いようにしたい。

まず IV 型は、長さ４の連ABABよりもこの連につく面Cで名前を付けたら良いだろう。線対称なのが IV_0 型で、線対称でないのが IV_1 型とするのは前と同じとする。

そこで

$IV_0(C)$ 型
```
C       C       C       C
ABAB   ABAB   ABAB   ABAB
C       C       C       C
```

$IV_1(C)$ 型
```
C       C       C        C       C        C
ABAB   ABAB   ABAB   ABAB   ABAB   ABAB
 C       C        C     C        C        C

  C        C        C     C         C        C
 ABAB   ABAB   ABAB   ABAB   ABAB   ABAB
 C       C       C        C      C         C
```

とすることになる。

連の長さの最大が３であるという III 型については、場合によって様子が異なる。長さ３の連が１つしかないという III_1 型は IV 型と同様に、連ABAに直接付く面Cの名前を取ることにすると、元の (A,B) 型と (B,A) 型の両方の分を挙げておく必要があるので、

$III_1(C)$ 型
```
BC        C  BC        C  AC        C  AC        C
 ABA   ABA   ABA   ABA   BAB   BAB   BAB   BAB
  C   BC       C  BC       C  AC       C  AC
```

とすることにしよう。

長さ３の連が二つある場合である III_2 型については、同じ様にすると退化した場合にまた混乱が残る。一つの面の名前だけで特徴づけ、更に退化した場合にも同等の扱いをするためには III_2 型は更に二つの場合に分けねばならない。III_2 型は長さ３の連が二つある場合であったが、この二つの連が直交する場合 III_2 と平行な場合 III_3 に分ける。

III_2 型の場合は二つの連が交叉する場所にある面の名前を付けることにし、III_3 型の場合は二つの連の中央にある面の名前を付けることにした。

$III_2(C)$ 型
```
AB       B      BA      A
 CAC    CAC    CBC    CBC
 B     AB       A    BA
```

$III_3(C)$ 型
```
ACA             ACA
  BCB      BCB
```

連の長さがすべて２である II 型の場合は、くねくね曲がっていく連が外から見て最初に曲がるところにある面の名前にした。

$II(C)$ 型
```
AC            CB
 BA         BA
  CB      AC
```

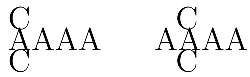
こうすれば、面 C の代わりに A,B が入ったときに異なったダイヤグラムが出来ることはすぐに分かるだろう。まとめれば、三回型は $IV_0(C) \cup IV_1(C) \cup III_1(C) \cup III_2(C) \cup III_3(C) \cup II(C)$ は $4+12+8+4+2+2=32$ 通りで、C の替わりに A、B を取ることが出来るので、全部で $32 \times 3 = 96$ となるのである。

三合型では、線対称なダイヤグラムは IV_0 型だけなので $IV_0(C) \cup IV_1(C) \cup III_1(C) \cup III_2(C) \cup III_3(C) \cup II(C)$ は $4+(12+8+4+2+2)/2 = 4+(32-4)/2 = 4+14 = 18$ 通りで、ここでも C の替わりに A、B を取ることが出来るので、全部で $18 \times 3 = 54$ となるのである。

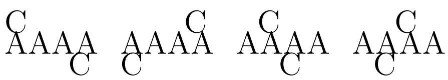
次に、三型から一段階退化した場合である正四角柱の場合（A=B としている）、$X(C)$ と $X(A)(X = IV_0 \sim II)$ をすべて考えれば良い。$X(A)$ には退化が起こらず、三型の時と同じだが、$X(C)$ では退化が起きるときがある。$X(C)$ の時は連に AAAA や AAA が現れたり (IV_0, IV_1, III_1)、A=B の重なりが起きたり (III_2) して、異なるダイヤグラムの数が半分になることがある。

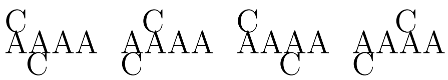
また $IV_1(C)$ だけは回転対称になる $IV_{10}(C)$ と回転対称でない（ので数が半分に減る）$IV_{11}(C)$ とに分けるのは前の分類の仕方の時と同じ事情である。

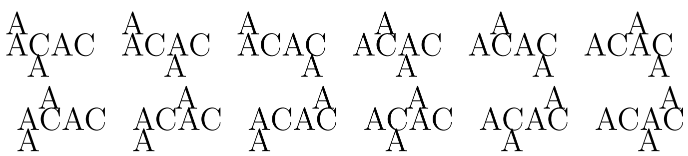
これらをまとめて書き上げると次のようになる。

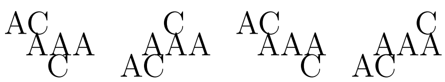
$IV_0(C)$ 型 

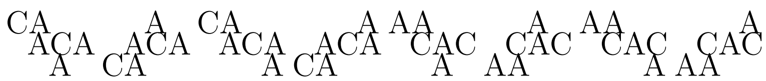
$IV_0(A)$ 型 

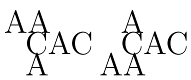
$IV_{10}(C)$ 型 

$IV_{11}(C)$ 型 

$IV_1(A)$ 型 

$III_1(C)$ 型 

$III_1(A)$ 型 

$III_2(C)$ 型  $III_2(A)$ 型 

$III_3(C)$ 型  $III_3(A)$ 型 

$II(A)$ 型  $II(C)$ 型 

まとめれば、二回型は$IV_0(A) \cup IV_1(A) \cup III_1(A) \cup III_2(A) \cup III_3(A) \cup II(A)$と$IV_0(C) \cup IV_{10}(C) \cup IV_{11}(C) \cup III_1(C) \cup III_2(C) \cup III_3(C) \cup II(C)$となり、$(4+12+8+4+2+2)+(2+4+4+4+2+2+2) = 32+20 = 52$通りとなるのである。

二合型では、線対称なダイヤグラムはIV_0型だけなので、$IV_0(A) \cup IV_1(A) \cup III_1(A) \cup III_2(A) \cup III_3(A) \cup II(A)$と$IV_0(C) \cup IV_{10}(C) \cup IV_{11}(C) \cup III_1(C) \cup III_2(C) \cup III_3(C) \cup II(C)$とを足したものとなり、その数は$(4+(12+8+4+2+2)/2)+(2+(4+4+4+2+2+2)/2) = 18+11 = 29$通りとなるのである。

最後に立方体の場合だが、正四角柱の場合の$X(C)$型で$A = C$としたものと一致する。書き上げてみると次のようになる。

```
        A       A
        AAAA  AAAA
IV0 型  A       A

        A       A   A       A              A    A    A     A
        AAAAAAAAAAAAAAAAAAA                AAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
IV10 型   A A      A    A       IV11 型     A    A        A  A

        AA     A  AA      A                AA   A
         AAA  AAA  AAA  AAA                 AAA  AAA
III1 型   A  AA      A AA        III2 型     A   AA

          AAA                              AA     AA
            AAA      AAA                    AA   AA
III3 型          AAA            II 型        AA AA
```

まとめれば、一回型は$IV_0 \cup IV_{10} \cup IV_{11} \cup III_1 \cup III_2 \cup III_3 \cup II$となり、$2+4+4+4+2+2+2 = 20$通りとなり、二合型では、線対称なダイヤグラムは$IV_0$型だけなので、$IV_0 \cup IV_{10} \cup IV_{11} \cup III_1 \cup III_2 \cup III_3 \cup II$となり、$2+(4+4+4+2+2+2)/2 = 11$通りとなるのである。

最後にこれを表にしておこう。

型	IV_0	IV_1	III	II	計
三回型	$4 \times 3 = 12$	$12 \times 3 = 36$	$14 \times 3 = 42$	$2 \times 3 = 6$	96
三合型	$4 \times 3 = 12$	$6 \times 3 = 18$	$7 \times 3 = 21$	$1 \times 3 = 3$	54
二回型	6	20	22	4	52
二合型	6	10	11	2	29
一回型	2	8	8	2	20
一合型	2	4	4	1	11

3.2　問題２の解説

問題 2　円周上に n 点を取り、互いに線分で結ぶとき円内に最大いくつの領域が出来るか？

[解説]　円周の上に n 個の点がある。その点を互いに結べば、その線分と円弧とにより円内は幾つかの領域に分かれる。点相互の位置によっては領域の数も変わるだろうが、無限の領域に分かれるはずもなく、その最大値は定まっているだろう。それを $\gamma(n)$ と表わすことにしたのだった。

点の数が少ないときは、どんな風に取っても領域の数は決まっていて、$\gamma(1) = 1, \gamma(2) = 2, \gamma(3) = 4 = 2^2, \gamma(4) = 8 = 2^3, \gamma(5) = 16 = 2^4$ となる。値は倍々になっているのだが、何故倍々になっているのかは理由が思い付かない。

理由はあるが思い付かないだけなのか、元々理由がないのか、問題を考えているときには中々分からないものだ。

更に点を増やして $n = 6$ の時の図を描けば $\gamma(6) = 31$ になるようで、どのように線を動かしてみても領域の数は 32 にならない。しかもこの時は 6 番目の点の取り方によっては更に領域の数が 1 減ることがある。

n が増えていくとき領域の数がどう変化するかは分かりにくいが、はっきり分かるものもある。それは線分の数である。n 個の点の中から 2 点を選べば線分が一通りに定まるのだから、${}_nC_2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ 本の線分がある。しかしその交わり方によって領域の数が変わるのだから、一目で分かるというのは難しいのである。

一般の n に対して $\gamma(n)$ が求まるような気がしないかも知れないが、実は求まるのである。求まるという信念さえ持てば、求めるのはさして難しいことではない。一般の n に対して直接 $\gamma(n)$ を求めようとしても、交わり方の複雑さに方針も立たない。こういう時は帰納法である。

$\gamma(n)$ の公式が求まっているとすると、帰納法で証明するためには n から $n+1$ に移るとき領域の数がどう変化するかをきちんと見ることが大切である。それはつまり階差数列 $a_n = \gamma(n+1) - \gamma(n)$ が具体的に求まればよいことになる。

それを考えてみよう。n 個の点 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ が円周上にあって互いに結んだ線分によって円内に $\gamma(n)$ の領域が出来ているとする。新しく点 P を付け加えて、P と $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ とをそれぞれ結んでやると幾つ領域が増えるだろうか？こんな風にしても何か分かりやすくなったようには見えないかも知れない。確かにこれでは何ともならない、もう少し頑張らないと。

n 本の線分を一度に引こうとするからどうにもならない。1 本ずつ引いてみよう。P からある Q_i へ線を引く。却って難しくなったようだ。他の Q_j との線がどう引かれているか分からないと、どうなるか分からないような気がする。でも本当にそうだろうか？

線分を一気に引いたのがいけなかったようだ。P から Q_i へ線を引く時、だんだんに伸ばしていくことにして、どんなときに領域の数が増えるのかを考えてみる。すると、P から出発して既に引かれている線分か円周に行き当たるときにだけ領域の数が増えることが分かる。

この考察だけで、領域の数が一通りでないことに理由も分かった。つまり、P から出て Q_i に向かう線分が、既に引かれている線分達の交点を通るとき、本来二つ増えていてもよい領域が一つしか増えないのである。それまでの線分の交点に交わらぬようにさえすれば、その時に出来る以上の領域は出来ない。

様子が分かってきたので、厳密に述べられるように記号を用意することにしよう。n 個の点 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ の名前の付け方を決めておこう。最初の点 Q_1 は勝手に選べば良い。次の Q_2 からは円周上を正の方向に進むように取っていく。

つまり Q_i と Q_{i+1} の間（の円弧上）には他の点 Q_j はなく、円弧上をこの順に進んでいくとき、円の内部を左手に見ているというようになっているとするのである。実際には順に並んでいればよく、向きはどちらでも良いのだが、イメージを確定しておいた方が何かと都合がよい。少なくとも思考の節約になる。

さて新しい点 P を何処に取るかだが、Q_n と Q_1 の間の他の点 Q_j が乗っていない方の円弧を取ることにしよう。そして、この円弧を I と呼ぶことにしよう。他の場所でもよいのだが、その時は Q_i の番号をずらしてやればこの状況になるのだから、“ 一般性を失うことなく ”上のように仮定できるのである。

更に、P と Q_i を結ぶ線分がそれまでに引かれている線分の交点を通らない様にすることが出来る。点 P を少し動かせば、交点からはずすことが出来るということである。

これを示すために明らかなことを一つ注意しておこう。P を円弧 I の何処にとっても、P と Q_i とを結ぶ線分 $\overline{PQ_i}$ 同志は円の内部では交わらない。これは明らかである。これら n 本の直線はまさに円周上の点 P で交わっているのだから、更に円の内部で交わるわけにはいかないのである。

この注意によって、線分 $\overline{PQ_i}$ を引くことによって増える領域の個数は、他の線分 $\overline{PQ_j}$ を引いた前か後かには無関係であることも分かる。だから $\overline{PQ_i}$ を引くことで領域がどれだけ増えるかがきちんと分かればよいことになる。

どの $\overline{PQ_i}$ もそれまでの線分の交点を通らないように出来るということも難しくはない。それまでの線分とは $N = {}_nC_2$ 本の線分 $\overline{Q_iQ_j}$ のことであるが、これらの交点は多くとも ${}_NC_2$ しかないし、円の内部にある交点はそれよりずっと少ない。点 Q_k からこれらの交点に引く直線の数は $n \times {}_NC_2$ よりも小さいことになるので、その延長上に円弧 I と交わる可能性も $n \times {}_NC_2$ よりも小さいことになる。つまり円の内部にあるすべての $\overline{Q_iQ_j}$ の交点と、周上の点 Q_k を結んだ直線と円弧 I との交点 $\{R_\alpha\}$ の個数は有限である。従って、円弧 I からこれらの点 R_α 以外の点を取って P とすれば良い。

領域の個数が最大になるようにしようとしているのだから、これまでの状況は“ 一般性を失うことなく ”仮定してもよいのである。

さて、$\overline{PQ_i}$ を引くことで領域の数がどれだけ増えるかを考えてみよう。線分 $\overline{PQ_i}$ はそれまでの何本の線分及び円弧と交わるかということである。交わる瞬間にだけ領域の数が一つ増えるのだから。

円弧と交わるときというのは線分が Q_i に到着するときだから、あとは線分 $\overline{PQ_i}$ が横切る線分 $\overline{Q_jQ_k}$ の数を求めればよい。この数を求めるには逆に考えるとよい。円周上の点 $P, Q_1, \cdots, Q_n$ はそのままに、中の線分を消してしまい、$\overline{PQ_i}$ だけを引くことにする。その時何本の線分 $\overline{Q_jQ_k}$ が $\overline{PQ_i}$ と交わるかと考えてみよう。線分 $\overline{PQ_i}$ は円を二つの領域に分けているから、$\overline{PQ_i}$ と交わる線分 $\overline{Q_jQ_k}$ の端点 Q_j と Q_k はその別々の領域に入っていることになる。この二つの領域の点は正の向きに弧 PQ_i と弧 Q_iP の上の点というように分けられ、弧 PQ_i の上には $i-1$ 個の点 $\{Q_1, \cdots, Q_{i-1}\}$、弧 Q_iP の上には $n-i$ 個の点 $\{Q_{i+1}, \cdots, Q_n\}$ がある。従って、交わる線分の個数は $(i-1)(n-i)$ であり、点 Q_i に突き当たったときにも 1 増えて $(i-1)(n-i)+1 = 1-n+i(1+n)-i^2$ となる。

かくて階差の一般項 a_n は次のようになる。

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{i=1}^{n}\{(i-1)(n-i)+1\} = n(1-n)+(n+1)\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2n^3+3n^2+n}{6} \\ &= \frac{1}{6}(n^3-3n^2+8n) = n + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \end{aligned}$$

後はこれを足せばよい。

$$\begin{aligned} \gamma(n) &= \gamma(1) + \sum_{i=1}^{n-1} a_n = 1 + \frac{1}{6}\{\frac{(n-1)^2n^2}{4} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{2} + 4(n-1)n\} \\ &= 1 + \frac{n(n-1)}{24}\{n(n-1)-2(2n-1)+16\} = 1 + \frac{n(n-1)}{24}\{n^2-5n+18\} \\ &= 1 + \frac{n(n-1)}{24}\{(n-2)(n-3)+12\} \end{aligned}$$

これが答えである。これに値を入れてみると、(計算が間違っていなければ)

$\gamma(1)=1, \gamma(2)=2, \gamma(3)=4=2^2, \gamma(4)=8=2^3, \gamma(5)=16=2^4, \gamma(6)=31,$

$\gamma(7)=59, \gamma(8)=99, \gamma(9)=163, \gamma(10)=256=2^8, \gamma(11)=385$

などとなる。

勿論ここで次の公式を使っている。

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \{\frac{n(n+1)}{2}\}^2$$

注意　この問題はよく知られている次の問題とはかなり違うものである。

> 円周に交わるように n 本の直線を引くとき、円内に最大いくつの領域が出来るか？

この問題の解答も問題２と同じ様にやれば良い。n 本の直線を引くときに円内にできる領域の最大数を $\epsilon(n)$ と書くことにすると、$\gamma(n)$ の同じ様に階差 $b_n = \epsilon(n+1) - \epsilon(n)$ を考えればよい。

しかしこの階差 b_n は簡単に求まってしまうのである。最大数の領域を作るような配置に n 本の直線を引いてあるとき、更にもう１本引いたときにも最大を与えるような配置を選ぶことが出来る。このことを保証するには、厳密には一般の位置の議論が必要で現代数学の言葉で言えばサード (Sard) の定理が必要なのだが（問題２の時にも実は必要だった)、そこまで言わなくとも正しいことは納得してもらえると思うので省略した。

問題２の時と同様、$n+1$ 本目の直線を引いていくとき、最初に円周と交わった後、既に引いてある直線のどれかか円周と交差するときに領域が一つ増える訳で、領域の増え方は最大 $n+1$ となる。つまり、$b_n = n+1$ である。a_n を求めるときは、これ自身帰納法が必要だったので、その分問題２は難しかったのである。

したがって、

$$\epsilon(n) = \epsilon(0) + \sum_{i=0}^{n-1} b_i = \epsilon(0) + \sum_{i=1}^{n} i = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

となり、かなり簡単である。

$\gamma(n)$ は４次なのに、$\epsilon(n)$ は２次なのが変だなと思うセンスは大事である。しかし考えてみれば当然で、$\gamma(n)$ の時は最初に n 個の点を取って結ぶのだから、線分の数は ${}_nC_2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ であり、これだけの直線を結ぶときの最大数

$$\epsilon(\frac{n(n-1)}{2}) = 1 + \frac{n(n-1)\{(n(n-1)+2\}}{8}$$

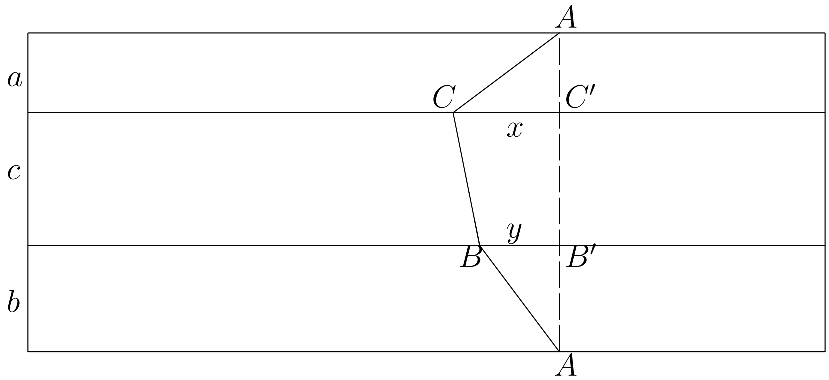
と同じ次数だが、４次の項の係数も小さく、全体としてもだいぶ小さくなっていることが分かる。

3.3　問題４の解説

問題 4　直三角柱がある。すべての側面を横断するように平面で切った切り口は三角形になるが、正三角形になることがあるか。あるとしたらその長さは底面の三角形だけで一意的に定まっているか。出来れば底面を与えたとき、その正三角形を簡単に描くことが出来るか？

[解説]　三角形は辺の長さを与えれば決まるので、底面の三角形の辺の長さを $a \le b \le c$ であるとする。問題の正三角形が存在すれば、その辺の長さ ℓ を a, b, c の関数として一意的に表せるかどうかという問題である。

三角柱の側面を一つの辺に沿って切り開く展開図を考えよう。その際、下の図のように、辺の長さを a, c, b の順になるようにすることにしよう。



平面で切った切り口を実線で表わすと、上図のように、線分 AC, CB, BA となる。展開するために切り開いた辺の上の点 A は上端と下端の同じ場所に印され、それを結ぶ線分は側面の辺に垂直になり、それとの交点をそれぞれ C', B' とした。

線分 AC, CB, BA の長さが同じになればよい。なるべき長さを ℓ と書く。

ℓ を斜辺とする直角三角形に関して、ピタゴラスの定理を三度使えば ℓ が解けるはずである。補助的な変数として、$x = CC', y = BB'$ を導入すると、

$$(A) \qquad \ell^2 = a^2 + x^2 = c^2 + (x-y)^2 = b^2 + y^2$$

となる。

変数 x, y に関して少し注意をしておこう。図のようにとり、$x \ge 0$ とすることは変数の正の方向を指定するだけのことだから良いが、平面での切り口だというだけでは、$x \ge y \ge 0$ とは限らない。しかし、辺の長さに関する仮定 $a \le b \le c$ と上式から、$x \ge |y| \ge |x-y|$ が分かるので上のような位置関係になっている、つまり $2y \ge x \ge y \ge 0$ であることが分かるのである。

(A) 式の２項と４項とから、$y^2 = x^2 + a^2 - b^2$ が得られ、３項と４項とから得られる $2xy = c^2 - b^2 + x^2$ の両辺を２乗して、y^2 を代入すると x^2 に関する２次方程式

$$3x^4 + 2(2a^2 - b^2 - c^2)x^2 - (b^2 - c^2)^2 = 0$$

が得られる。この判別式は、

$$\begin{aligned} D' = \tfrac{1}{4}D &= (2a^2 - b^2 - c^2)^2 + 3(b^2 - c^2)^2 = 4(a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2) \\ &= 2\{(a^2 - b^2)^2 + (a^2 - c^2)^2 + (b^2 - c^2)^2\} \ge 0 \end{aligned}$$

となり実根が得られる。したがって、根の公式により、

$$x^2 = \frac{b^2+c^2-2a^2 \pm \sqrt{D'}}{3}, \qquad \ell^2 = a^2+x^2 = \frac{a^2+b^2+c^2 \pm \sqrt{D'}}{3}$$

となる。

ところで、$\pm$ のどちらでも意味のある解になるのだろうか？実は $+$ の方の解だけあればよいことが分かる。実際、$\ell \geq c$ は明らかだが、$-$ の方を選ぶと、

$$\ell^2 = \frac{a^2+b^2+c^2-\sqrt{D'}}{3} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \leq c^2$$

となり、双方を満たそうとすれば、$a=b=c$ でなければならないが、このとき $D'=0$ となっている。

従って、底面の三角形を決めるごとに、切り口が正三角形となる平面は（平行を除いて）ただ一つで、その辺の長さ ℓ は

$$\ell^2 = \frac{a^2+b^2+c^2-2\sqrt{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2}}{3}$$

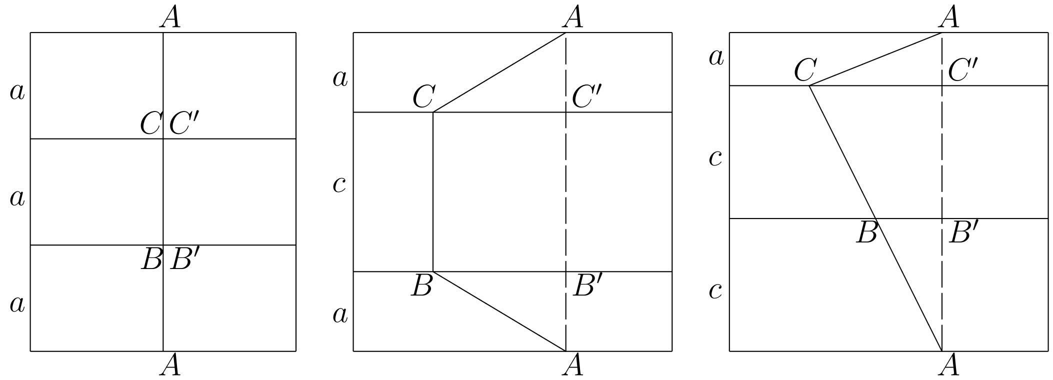
と与えられる。

元の長さ a,b,c に対して加減乗除と平方根を取ることの繰り返しで得られるので、長さ a,b,c の線分を与えて、それから定規とコンパスだけで長さ ℓ の線分を得ることが出来る。与えられた線分から定規とコンパスだけでどのような長さの線分が（どのように）得られるかについては、予定している教科書の“ 線分の代数 ”といったタイトルの節で述べる予定である。

一般の場合に簡単に図示できるうまい方法があるかどうか分からないが、特殊な場合にどうなるか見ることにしよう。

1. $a=b=c$ なら　$x=y=0$　であり、$\ell = a$
2. $a=b<c$ なら　$x=y$　であり、$\ell = c, \quad x^2 = c^2-a^2$
3. $a<b=c$ なら　$x=2y$　であり、$\ell^2 = \dfrac{4c^2-a^2}{3}, \quad x^2 = \dfrac{4(c^2-a^2)}{3}$

これを図示してみると



3.4 問題５の解説

問題 5　有理数 a, b, c を係数とする二次式の平方 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ はどんな有理数 x に対して有理数になるか？

[解説]　一応の答えを挙げておこう。

1. $a > 0$ で、$\sqrt{a}$ が有理数
2. $c > 0$ で、$\sqrt{c}$ が有理数

のとき、任意の有理数 α に対して

1. $x^\alpha = \dfrac{a\alpha^2 - c}{b - 2a\alpha}$ とおけば、$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}|\alpha + \dfrac{a\alpha^2 - c}{b - 2a\alpha}| = \sqrt{a}|\dfrac{a\alpha^2 - b\alpha + c}{b - 2a\alpha}|$
2. $x_\alpha = \dfrac{b - 2\sqrt{c}\alpha}{\alpha^2 - a}$ とおけば、
$\sqrt{ax^2+bx+c} = |\sqrt{c} + \dfrac{\alpha(b - 2\sqrt{c}\alpha)}{\alpha^2 - a}| = |\dfrac{\sqrt{c}\alpha^2 - b\alpha + a\sqrt{c}}{\alpha^2 - a}|$

と、平方が有理数となる。

方法はどちらの場合も同じなので、元の問題の一般化でもある場合 2. をまず詳しく述べる。

根号を一々書くのが面倒なので、

$$A = \sqrt{ax^2+bx+c^2} \qquad (c > 0, a, b, c \text{ は有理数})$$

の形で A が有理数となる x を探す問題を考えることにする。

$A^2 = ax^2 + bx + c^2$ から、単純に c^2 を含む完全平方の形を作ってみても、$A^2 = (c + \frac{b}{2c}x)^2 + (a - \frac{b^2}{4c^2})x^2$ となって、$4ac^2 = b^2$ なら $A^2 = (c + \frac{b}{2c}x)^2$ は元々平方式で、どんな有理数 x に対しても A は有理数だが、今は任意の有理数 a, b, c に対して根号を開きたいのである。

そこでパラメータを入れて、c^2 を含む完全平方の形を作ってみることにしよう。

$$A^2 = (c + \alpha x)^2 + (a - \alpha^2)x^2 + (b - 2c\alpha)x$$

としてみると、平方式の残りを 0 とおくと x と α との関係式が得られ、そのとき $A = |c+\alpha x|$ となる。まとめると、

$x = 0$ のとき、$A = c,$ または $x = \dfrac{b - 2c\alpha}{\alpha^2 - a}$ のとき、

$$A = |c + \alpha x| = |c + \frac{\alpha(b - 2c\alpha)}{\alpha^2 - a}| = |\frac{c\alpha^2 - b\alpha + a}{\alpha^2 - a}|$$

となる。

α が有理数のとき $x = x_\alpha$ は有理数になるが、どんな有理数にもなれるだろうか？x を与えている式を、α に関する方程式と見ると

$$x\alpha^2 + 2c\alpha - ax - b = 0$$

という二次方程式になる。この方程式の判別式は $\frac{1}{4}D = c^2 + x(ax+b) = A^2$ となり、α を解けば $\alpha = \dfrac{-c \pm A}{x}$ となり、A が有理数となるような x のときに α も有理数になるということになっている。

上の式は α に関して2次式だから、一般に二つ解があるわけで、A の形が $|c+\alpha x|$ であることから、x に対して適当な α を選ぶ必要があるような心配も起こる。そこで α を代入してみると、

$$|c+\alpha x| = |c + x\frac{-c \pm A}{x}| = |c - c \pm A| = |\pm A| = A$$

となり、どちらの α の値でも A の値は同じになり、心配は無用だったのである。

ついでだから、α が有理数であることを整数の比 $\alpha = \frac{n}{m}$ で表わして解を書いてみると、

$$x = \frac{bm^2 - 2cmn}{n^2 - am^2} \quad \text{のとき、} \quad A = |\frac{cn^2 - bmn + am^2}{n^2 - am^2}|$$

となる。同じことだが、この方が、有理解であることが見易いかも知れない。

この公式では、２次の係数 a が 0 でないことは必要ないので、$a=0$ と置いてみると、

$$x_\alpha = \frac{b - 2c\alpha}{\alpha^2} \text{ とおけば、} \sqrt{c^2 + bx} = |c + \frac{\alpha(b-2c\alpha)}{\alpha^2}| = |\frac{c\alpha - b}{\alpha}|$$

と、１次式に対する同種の問題の答えにもなっている。

さて、場合 1. の場合も同様に

$$A = \sqrt{a^2x^2 + bx + c} \qquad (a > 0, a, b, c \text{ は有理数})$$

の形で A が有理数となる x を探す問題を考えることにすると、

$$A^2 = a^2x^2 + bx + c = a^2(x+\beta)^2 + (b - 2a^2\beta)x + c - a^2\beta^2$$

となるから、$x^\beta = \dfrac{a^2\beta^2 - c}{b - 2a^2\beta}$ とおけば、

$$A = a|x+\beta| = a|\frac{a^2\beta^2 - c}{b - 2a^2\beta} + \beta| = a|\frac{a^2\beta^2 - b\beta + c}{b - 2a^2\beta}|$$

となることが分かる。

それでは、条件 1. と 2. を同時に満たす場合、２種類の解法が得られるようにみえるが、本当に異なるのだろうか？

２次式を $A^2 = a^2x^2 + bx + c^2 (a, c > 0, a, b, c$ は有理数) の形で解くことにすると、場合 1. では $x^\beta = \dfrac{a^2\beta^2 - c^2}{b - 2a^2\beta}$ と置くことになり、場合 2. では $x = \dfrac{b - 2c^2\alpha}{\alpha^2 - a^2}$ と置くことになる。α, β が任意の有理数を取るとき、対応する x_α, x^β の取る値の範囲にずれが起こるかもしれないし、全体としては一致するかも知れない。それがどうなっているかを調べるには、$x_\alpha = x^\beta$ と置いて、α と β の関係を調べれば良い。

$x_\alpha = x^\beta$ の分母を払って、α に関して降巾の順に整理してみると、

$$(a^2\beta^2 - c^2)\alpha^2 + 2c(b - 2a^2\beta)\alpha - a^4\beta^2 + 2a^2b\beta - b^2 + a^2c^2 = 0$$

となるが、これは因数分解できて

$$\{(a\beta - c)\alpha - (a^2\beta - b + ac)\}\{(a\beta + c)\alpha + (a^2\beta - b - ac)\} = 0$$

となる。したがって、

$$\alpha = \frac{a^2\beta - b + ac}{a\beta - c} \quad \text{または} \quad \alpha = \frac{-a^2\beta + b + ac}{a\beta + c}$$

となり、β が有理数なら α も有理数である。またこの式は逆にも解けて、

$$\beta = \frac{c\alpha - b + ac}{a\alpha - a^2} \quad \text{または} \quad \beta = \frac{-c\alpha + b + ac}{a\alpha + a^2}$$

となり、α が有理数なら β も有理数である。

かくて、

$$\{x_\alpha | \alpha \text{は有理数}\} = \{x^\beta | \beta \text{は有理数}\}$$

であり、解全体は同じものが得られていることになる。

4　第２回 TOSM ポストの質問

4.1　正方形を縦横に付けていって大きい正方形を作るとき、大小取り混ぜてできる正方形の数は分かるが、正三角形で同様にしたら幾つになるか、公式があるか？

三重県の中学の中村先生からの質問である。今年度の県教研の助言者の依頼に来られたおり、TOSM ポストの話もしたし、他の TOSM のプロジェクトの話も聞いていただいた。その後何かの話のついでだったか、気になっている問題としてこの問題をあげられた。どこかに書いてあるかも知れないが、本を調べるより事情を調べる方が面白そうで、やってみることにした。

正方形の場合は辺の長さが k の正方形は $(n-k)^2$ 個あるので、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ であることは容易に分かる。

正三角形の場合、と言っても、別に正三角形でなくても一般の三角形でも同じことであるが、その個数 $S(n)$ は実際に絵を描いて数えてみると、

$$S(1)=1,\ S(2)=5,\ S(3)=13,\ S(4)=27,\ S(5)=48$$

となる。n が奇数か偶数かで $S(n)$ に対する式は異なり、

$$S(2m+1) = \frac{(m+1)(4m^2+7m+2)}{2}$$
$$S(2m) = \frac{m(m+1)(4m+1)}{2}$$

となる。

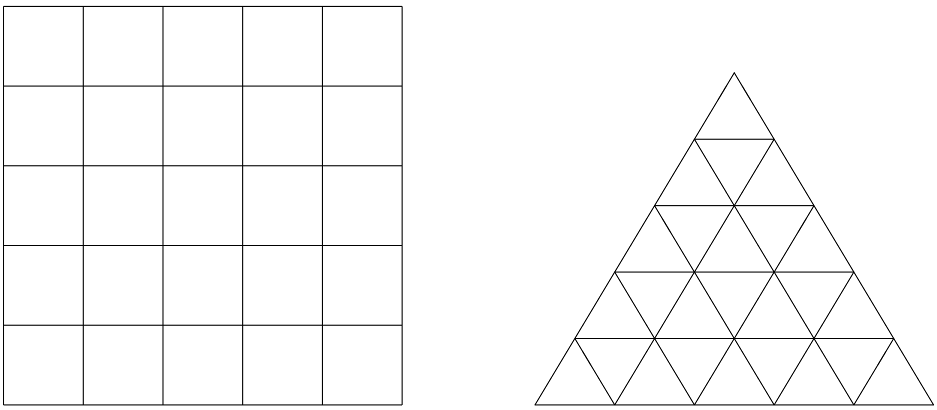


図 1: 正方形と正三角形の格子

[解説]　$n=5$ で、正方形の格子と正三角形の格子を描いて、少し調べてみよう。

正方形の場合は、一番大きい正方形の辺の中に長さが k の辺は $n-k+1$ 種類あり、従って１辺の長さが k の正方形は $(n-k+1)^2$ 個あるから、全部で $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ であることは容易に分かる。この数の議論は正方形が長方形でも平行四辺形になっても、同様である。

だから、正三角形の場合と言っても、一般の三角形でも同じことになるのであるが、見たところ数えやすいので、正三角形に近い三角形で図を描けばよい。答えを $S(n)$ とすると、絵で数えてみると、

$$S(1) = 1,\ S(2) = 5,\ S(3) = 13,\ S(4) = 27,\ S(5) = 48$$

などとなっている。

例えば $S(n)$ が n の多項式で次数も分かっているとすれば、次数 $+1$ 個のデータがあれば未定係数法を使って強引にでも求めてしまうことができるのだが、多項式になること自体が分かっていない。

元の正三角形の拡大と平行移動で重なるもの（仮に、上三角と呼ぼう）と、$180°$ 回転をしないと重ならないもの（下三角と呼ぼう）とは、数え方に違いがあるので、上三角の部分だけの和を $U(n)$、下三角だけの和を $L(n)$ と書くことにすると、

$$S(n) = U(n) + L(n),\ U(1) = 1,\ L(1) = 0$$

となっている。図を見て、一番下の辺に辺や頂点を持つ三角形の数が、階差 $S(n) - S(n-1)$ を表わしており、これを $U(n)$ と $L(n)$ とに分けて考えてみる。$U(n)$ については、底辺を共有し、サイズが i の三角形は丁度 $n - i + 1$ 個あるのだから、

$$U(n) - U(n-1) = \sum_{i=1}^{n}(n - i + 1) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

となり、従って、

$$\begin{aligned} U(n) &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j^2 + j) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)(n+2)}{4} \end{aligned}$$

である。

$L(n)$ については、n の偶奇によって違うので、$m = \left[\dfrac{n}{2}\right]$ とおき、m で表わすことにしよう。サイズ i の下三角で頂点が底辺上にあるものの個数は、両側から i ずつの辺の上には頂点が来れないことから、$n + 1 - 2i\ (> 0)$ 個ということになるので、

$$L(n) - L(n-1) = \sum_{i=1}^{m}(n + 1 - 2i) = m(n+1) - m(m+1) = m(n-m)$$

となる。m だけで表わそうと思えば、

$$L(2m) - L(2m-1) = m^2$$

$$L(2m+1) - L(2m) = m(2m + 1 - m) = m^2 + m$$

となる。したがって、それぞれ

$$\begin{aligned} L(2m) &= \sum_{j=1}^{m}(L(2j) - L(2j-1)) + \sum_{j=1}^{m-1}(L(2j+1) - L(2j)) \\ &= \sum_{j=1}^{m} j^2 + \sum_{j=1}^{m-1}(j^2 + j) \\ &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{3} - m^2 + \frac{m(m-1)}{2} = \frac{m(m+1)(4m-1)}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L(2m+1) &= \sum_{j=1}^{m}(L(2j)-L(2j-1)) + \sum_{j=1}^{m}(L(2j+1)-L(2j)) \\ &= \sum_{j=1}^{m} j^2 + \sum_{j=1}^{m}(j^2+j) \\ &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{3} + \frac{m(m+1)}{2} = \frac{m(m+1)(4m+5)}{6}\end{aligned}$$

となる。それゆえ、

$$\begin{aligned}S(2m) &= \frac{2m(2m+1)(2m+2)}{6} + \frac{m(m+1)(4m-1)}{6} \\ &= \frac{m(m+1)(4m+1)}{2} \\ S(2m+1) &= \frac{(2m+1)(2m+2)(2m+3)}{6} + \frac{m(m+1)(4m+5)}{6} \\ &= \frac{(m+1)(4m^2+7m+2)}{2}\end{aligned}$$

となる。n で書けば、

$$S(n) = \frac{n(n+2)(2n+1)}{8} \qquad (n: \text{偶数})$$

$$S(n) = \frac{(n+1)(2n^2+3n-1)}{8} \qquad (n: \text{奇数})$$

である。

4.2 三角形の辺上の点を通り、三角形の面積を２等分する直線を引く問題は中学の教科書にあるが、最初に与える点が辺の上にない場合にも出来るのか？

辺の上の時は簡単で、$\triangle ABC$ の辺 BC 上に点 P が与えられたとする。BC の中点 M を取れば、$\triangle ABM$ は $\triangle ABC$ の面積の半分である。M から、AP の平行線を引き AB か AC かとの交点を Q とすれば、直線 PQ は $\triangle ABC$ を 2 等分する。

ここで BC の中点 M の代わりに BC を $m:n$ に内分する点から出発すれば、PQ は $\triangle ABC$ を $m:n$ に内分することになる。

最初に与える点 P が何処にあっても、$m:n$ の場合に一般化した問題の解答を得ることが出来る。まず次の問題に帰着する。

「ある角と点 P を与えて、点 P を通る直線で角から切り取る三角形の面積を与えられた値に出来る。」

そしてこの問題は相似と円を使って解決される、割と良く知られた問題である。“線分の代数” という観点で教科書の中で論ずるが、それとは別にこの問題に直接かかわる所だけの「解説」を書いたほうがよいか、少し迷っている。

この方針での解法は、例えば岩田至康 [2]p.331 にある。点 P が角の内部にある場合とか、与える面積の値によってはそこにあるままの証明は通用しないが、補助的な角を取る方向

を変えるとか、角の辺に関する対称点を取るなどの若干の修正をすれば良い。

また、与えた点 P が辺上にある時のアイデアは、平行線間で面積を保ちながら三角形の形を変えるというものだが、比例を使わずこのアイデアだけで押し通した証明が秋山武太郎 [1]p.130 にある[1]。マニアックなまでに技巧的である。それはそれとして面白いと思う感性もあった方が良いかも知れない。上のアイデアを使って $\triangle ABC$ の半分 (一般には $\dfrac{m}{m+n}$) の面積の多角形を次々と作っていくのだが、点 P の役割を三角形の頂点に移動する中間的な三角形を作るのがキー・アイデアである。最後の所では、ある線分上を動かしていく点につれて出来る四角形がいつ平行四辺形になるかという、作図題でよく現れそうな技法が使ってある。この部分は最初の点 P が $\triangle ABC$ に対してどんな位置にあるかによってかなり証明の表情が違う（本質的には同じだが)。自分でやるときは悩むかも知れない。

ところで、点 P が何処にあろうと任意の三角形 $\triangle ABC$ を 2 等分する直線が存在すること自体は中間値の定理と呼ばれる解析の定理を使えば簡単に判る。点 P を通る直線 ℓ に対して、直線 ℓ で $\triangle ABC$ を分割した左の領域の面積から右の領域の面積を引いた関数 $f(\ell)$ を考える。そして ℓ をある基準線からの角度 θ で表わすことにすれば (角度を確定するためには直線に向きがついていると思えばよい)、P が $\triangle ABC$ の内部にあるときは θ は 0° から 360° まで動き、$f(0^\circ)$ の値と $f(180^\circ)$ の値は、$f(0^\circ)+f(180^\circ)=0$ だから、正負が異なり、従って何処かで f の値が 0 になるところがあり（中間値の定理)、そこで直線 ℓ は $\triangle ABC$ を２等分することになる。点 P は辺上または $\triangle ABC$ の外部にあるときは、直線 ℓ が $\triangle ABC$ に交わる角の所だけを f の定義域とすれば、f の値は S から $-S$ まで変ることになり (S は $\triangle ABC$ の面積)、内部にあるときと同様である。

与えられた問題はこのように存在が保証されている直線を定規とコンパスだけで作図できるかという問題である。この種の問題が、現在、教育的意味以外にどんな意味を持ち得るかは議論の余地があるが、そういったことは言わずに問題はゲームとして楽しめばよいと思う。

しかしながら、「解はあれば良いのだ、作図するといってもどうせ厳密には描けないのだからある程度正確ならよいじゃないか、鉛筆の線の幅より誤差が小さければ何の問題もない筈」、という立場もないではない。

その意味では存在が保証されている以上、解の直線にいくらでも近付くプロセスが得られればよいとも言える。例えば、頂点から点 P を通る直線が辺と交わる点を P' とすると、P' を通る 2 等分線は、点 P は通らないが、求める直線の近似と考えられる。得られた四角形に等しい面積を得るため、頂点を取り替えて同様の操作を行うと、更に解の直線に近付く。これを繰り返せばよい[2]。

[1] 勿論一般の $m:n$ に分割するものは比例を使わずに出来る訳はないが、半分になら出来る。比例を使わない証明であることにこだわる著者は $m:n$ で出来ることもコメントしたくなかったのかも知れない。

[2] 実は、秋山氏の解答を示した後で点が $\triangle ABC$ の内部にある場合にやってみるように浪人中の息子に言ったところ、難しかったとみえて苦し紛れに、直線の近似列を作ってきた。問題が違うと叱りはしたが、分かってしたのならそれはそれで見識かとも思う。実際にこの問題を教室で行う場合には、考慮しなければいけないかも知れない。

4.3 新しいカリキュラムに向かって、数学の目的をどう設定すべきか。数学の成績が下がる文科系志望の生徒に対し、数学が好きになるような興味付けは出来ないか。

教育における数学の目的は何かというような問題は一言では言いにくい。恐らく、どのように言ったとしても一面的にならざるを得ず、不適切な場面が起こりうるだろう。

常に正しい主張ができたとすれば、それは多分普遍的一般的な言明になり、それゆえ、現場では役に立たず質問に答えていることにはならないだろう。

それでも敢えて答えるとなれば、“新しいカリキュラム” になど向かわなくても良いのではと、言いたくなる。そして、数学が好きになるような興味付けは出来るかどうかを考えるより先に、教師自身が数学を好きになることだと言いたくなる。

指導要領が変わろうと、数学自体が変わる訳ではない。何かが好きになるかどうかは個人の好みなのだから、むやみに干渉すべきでない。

色々な外圧が強くなればなるほど、教師個人の内なる数学が問われる。何より数学を愛することだと思う。しかし、自分が愛しているからといって、それだけで君達も好きになれと生徒に強要は出来ない。「出来れば好きになって欲しい」程度のことは言ってもよいだろうが、すべきなのは教師自身が本当に数学を愛していることを数学を通して伝えることである。

教育技術的には、数学的な技術を余り必要としないトピックスで、面白かったり、思いがけない応用があったりするものの中で、教える教材に関連したものを選んで、導入部分に使うことであろう。もしかすると、こうした質問はその様なトピックスとしてどんなものがあるかという質問なのかも知れない。しかし前にも述べたように、それは個々のケースで何が適切かは変ってくる。素材としては色々なものが有りえ、それを集めた本を書く予定もあるが、成書もないではない。

具体的に状況を判った上なら考えることも出来るが、やはりこの種のことは教師自身の数学が問われているというべきであろう。あまり安直な種本探しや、ネタ探しは勧められない。

5 第３回 TOSM ポストの質問

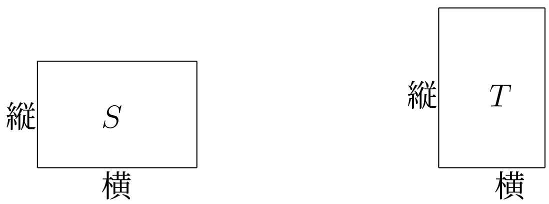
5.1 高校数学で、数学的帰納法を $n \geq 0$(n は整数) に対して証明する時、第１段を $n=0$ で示して第２段を $n \geq k(k \geq 0)$ に対して示して良いか。それとも、高校では帰納法は自然数である n に対するものなので、第１段で $n=0,1$ に対して示し、第２段を $n \geq k(k \geq 1)$ に対して示した方が良いか。

答えに窮してしまう。数学者として答えるなら、当然「どちらでも構いません。なんなら $n \geq -10$ に対してだって同じ様に証明しても良いのですから」というしかない。大学入試でなら間違いなくどんな大学でも、どちらでも良いという扱いになる。

しかし、高校の実態では？、と言われると分かりませんとしか答えようがない。それは一種の踏み絵として扱われている場合があるようだから。

数学でなら、「命題 $P(n)$ を $n \geq n_0$ に対して証明せよ」という問題を、$n_0 = 1$ の場合に帰着することは何でもない。$m = m(n) = n - n_0 + 1$ と置き、命題 $Q(m)$ を $P(m + n_0 - 1)$ のこととすれば、「命題 $Q(m)$ を $m \geq 1$ に対して証明せよ」という問題になる。これを示せば、元の命題も示せたことになる。

5.2 長方形の縦と横はどうして決めるのか。倒せば縦と横が変わるし、斜めに置いたら、縦と横とをどうして決めたら良いか。



最初この問題を読んだ時、縦と横の名前の問題と思わず、面積の公式の問題と誤解してしまった。

小学校のある時期には、長方形の面積は「縦 $\times$ 横」と教えることがある。

上の図を２辺が $2cm, 3cm$ の長方形としよう。S の位置に置いてある長方形の面積は $S = 2 \times 3 = 6(cm^2)$ で、T の位置に置いてある長方形の面積は $T = 3 \times 2 = 6(cm^2)$ である。

S と T は違う長方形なのだがたまたま等しくなった（勿論等しくなる理由があって）のか、それとも S と T は元々同じ長方形なのだから面積が等しいのは当たり前だと思うのかは実は立場の違いにすぎない。

長方形が倒れて位置を変えただけだとも思えるし、例えば机の上にある同じ長方形の見ている人の（机に対する）位置による違いだと考えることも出来る。後者だと思えば、これは一種の相対性理論で、長方形という概念が見る人の位置に依存しないものであることの要請からの必然だと言えないこともない。

動いたという立場でも、「長方形」が動くことによって変わってしまう概念では困るだろう。だから、視線の移動や、物自体の運動によっては変わらない何物かとして、「長方形」という概念は作られている筈である。

これを数学的に厳密に述べることは出来るし、それはそれなりに面白いとは思うが、長く煩雑な議論が必要になる。ここでは、ただ長方形という言葉が長い歴史の試練に耐えていることがその保証をしてくれているということで許して欲しい。

何にしても、S と T は「同じ」長方形なのだから、同じ面積になるのは当たり前だから、$2 \times 3 = 6 = 3 \times 2$ のどちらかの計算しか許さないというわけにはいかないだろう。

しかし、小学校の低学年で掛け算を教える際には、例えば「１本１０円の鉛筆が５本あります。全部でいくらでしょう。」という問題が与えられ、「10 円 $\times\, 5 = 50$ 円」と計算せよと教えており、このとき 5×10 という計算を許していない。

「掛け算の順序を変えることを許さないことは、縦と横の何かしらの規準がないと困るのではないか？」という趣旨の質問だろうと思ってしまったのである。

問題は、掛け算の順序の問題と、縦横の命名の問題であり、順序の方が難しい問題だと思ったのが、勘違いの元である。この解説を書こうと思うまでそう思い込んでいた。まず掛け算の問題を、少しコメントしておこう。

面積の計算の時は「縦 $\times$ 横」と教えるにしても、「横 $\times$ 縦」としてはいけないという意識はあまり強くないのではないだろうか。整数辺の場合に 1×1 の正方形のタイルを埋めていくというようにして教えることが多く、本質的に視線の変更や長方形の運動によって変るものでないように教えているからだろう。

この問題で議論が錯綜するのは、算数と数学が違うことの認識がない所為である。数学の理論では、自然数、整数、有理数、実数、複素数と数の範囲を広げていく際、常に掛け算の可換性は保証されている。更に数の範囲を広げようとすれば、積の可換性は成り立たなくなる。しかし、算数で利用される数の範囲では積は可換である。だから、掛け算の順序はどっちでも良い、という訳にはいかないのである。

それは、算数が数学ではないからである。算数は数学の応用技術なのである。子供の成長過程において出合う諸問題のうち、数学を用いて解決できる問題に対して、数学の理論・技法を如何に適用することが出来るかという、いわば料理のレシピを教えているのである。

だから、上の鉛筆の問題でも、問題から出来るだけ自然に（本当の自然ではなく人間にとって抵抗感が少なくというくらいの意味)、計算式を導けるかということに主眼がある。「１０円の鉛筆が５本」だから、10 と 5 をこの順に置いて、「10 円 $\times$ 5 = 50 円」と計算すれば出来るのだから、まずこの技法を覚えて欲しいというのがこの段階での教え方なのである。自然数の乗法という数学的技術が、この問題を解くのに応用出来るが、その適用のさせ方を一つ覚えさせようとしているだけなのである。

小学校のこの段階では、掛け算という数学的技術を習得した上で、問題を解こうというのではなく、問題を解くことを通して数学的技術の存在と有効性を納得させようとしているのである。

だから、5×10 という計算をしてはいけないと強調し過ぎるのには問題がある。最初の段階から、5×10 という計算も許容すると子供は却って混乱するだろうという点を考慮した、教育的配慮にすぎない。精神年齢の低い段階では、極端な自由よりも、一定程度の制約の元に技法の習熟を主眼にするという教育的措置は認められて良い。

名数、無名数という言葉を使って正当化することも行われているようだが、そういうことを言い出せば、算数で扱う数はすべて名数であると思ったほうが良い。上の例でも「10 円 $\times$ 5 = 50 円」で 10 は名数だが、5 は無名数というのには無理がある。5 は鉛筆の本数で、5 本なのである。10 円 も純粋に 10 円 なのではなく、１本当り 10 円 なのであって、言うなら 10 円/本 と言うのが正しい。したがって、単位の方も割り算が出来て、「10 円/本 $\times$ 5 本 = 50 円」とやれば、整合的で、こうしてしまえば、順序などというものは何程の意味もない。「5 本 $\times$ 10 円/本 = 50 円」として、より分かり難いということはある筈もない。

しかし、掛け算を教え始めている小学校低学年の児童に、単位の掛け算・割り算を同時に理解させようとするのは無謀であり、不自然であり、意味がないということになる。

したがって、「１０円の鉛筆が５本」という言葉の順序に従って、「$10円 \times 5 = 50円$」と計算することを教えるのである。だから、この方が子供にとって理解しやすいとか、こうする必然性があるなどと議論しないほうがいい。現に、英語圏では「$5 \times 10円 = 50円$」と教えている。これを知って、スカラーは前に書くべきものだからという議論もしない方がいい、単に英語では「five pencils of ten yens」と言うからに過ぎないのだから。

最後に、「縦横」の命名の問題についてコメントしておこう。

これまでの議論でも分かるように、縦横は個々の長方形にとって固有なものではない。長方形という概念が、視線の位置や運動によって変化しないものである以上、そうしたことで変わってしまう縦横は、数学的な概念ではないのである。では、縦横とは何だろうか。

長方形の辺は４つだが、その２つずつは長さも方向も同じ線分の組になっている。しかも、異なる組の辺は直交していて、各々の組の線分の長さの積が面積を与えている。その時意味のあるのは辺の長さの組（非順序対）であり、順序対（対）ではないのだが、人間の感覚として、組を考えるより対を考える方が扱い易いのである。対では、要素は二つあるといっても一つずつ考えれば良く、考え方としては一度に一つのものを順に考えれば良いのだが、組では二つ同時に考えることを余儀なくされる。

数学的には二つの辺の組にだけ意味があるのだが、つまり、どちらかの辺を優先する理由はないのだが、具体的に長方形を取り扱って例えば辺の長さが知りたいとき、どちらかを先に測る必要がある[3] 。そこで現実的に、長方形の二つの組のどちらかを特定する機構が欲しいのである。人間は長く「長方形」に関って来たので、そのような機構を体現する概念と言葉が存在するのである。

さて、では「縦と横」とは何だろう。

長方形を眼の前に置くとき、人は自然に一つの辺を水平に置く。その方が安定して見えるから。安定していないと何かしら不安に感じるから。水平を感じるのは人間の眼が横（水平）に付いているからであろう。二つの眼を結ぶ直線の方向が水平（横）という訳である。

不幸にして眼が一つしかなければ水平は感じられないかと言えば、耳が水平に付いている。耳が一つしかなくても、腕が水平に付いている。例外がないとは言わないが、水平を感じることは誰にも出来るといって良いだろう。

眼で見るとき、第一には正対した平面上の図形だと思う。机の上など水平な所に描かれている図形は、その投射（射影）だと感じている。だから、机の上に描かれた正方形は、多くの場合縦の方が長く感じられる。感覚でも、天の邪鬼の人がいるから、反対に感じる人もあるかもしれないが。

正対した面の上の正方形を水平面上に投射すれば、横の長さは変らないが縦は短くなる。この分を自動的に補正するから、却って長く感じるのだと思う。この補正が自動的に起こらない人（ある意味で訓練が出来ていない人）は、当然（？）縦の方が短く感じるだろう。

この感覚の議論はこの際どうでも良い。要するに水平は人間の感覚機関のあり方から理解され、縦はそれに垂直な方向として理解されているということである。垂直は本来、地

[3] そうしないと、どちらのバナナが大きいかと考えながら、目の前にバナナがありながら餓死してしまう、寓話の猿になってしまう。勿論現実の猿はそんなことはなく、利き手に近い方からとか、大きい方からとか、色の派手な方からとか、匂いの強い方からとか、何かしらの不確定な動機によってまず一つを選んで食べてしまうだろう。

平面に垂直ということで、眼前に正対した平面上の水平線に直交する線の方向だが、机の上などではそれを射影した方向が縦となる、つまり、自分から遠ざかる方向である。

結局、縦とか横とかいうのは長方形の辺本来の性質ではなく、それが（観察者に対して）どのように置かれているかを示しているものなのである。

斜めに置かれている長方形の場合どうするかと言えば、どうしようもないというのが答えだが、それでは愛想がないので、水平面上に置かれたとして重心の位置によって右か左かに倒れるだろう。その倒れて水平になるだろうと思われる方向を横とすれば如何であろうか。

重心が丁度頂点の上に落ちているときはどうするのかと言われても、風でも吹けばどっちかに決まるでしょうと言ってもいいし、縦も横もないと言ってもいい。

縦とか横とかは所詮、視点の違いで、気持ちが落ち着けばそれで良いのである。

円錐の場合に問題が起こらないと質問者が考えているのは、円錐を安定に置く置き方が一通り（高さを決める意味では）であるから、他に考える気持ちが働かないからだと言ってもよいと思う。

5.3 円を投影したら何になるか。楕円になると思うが、元の円が内接する正方形を考えて、その投影が台形になる場合に、相対する接点を結ぶ線分の交点はその楕円にとって一体何になるのか。

世間話のように質問されたので、くどいことは言わず、世間話のように答えて見よう。

「楕円になります。正方形の投影が台形になることもあるけれど、問題の交点は内接円の中心の写った先というだけのことで、楕円にとっての特徴的な点ではありません。」

これでは余りに愛想がないので、少しだけ解説を加えよう。

この質問を受けた時、「楕円になるのは当たり前です、円錐曲線ですから」と言ってしまったが、間違っている訳じゃないが、少し説明不足だったようだ。質問されたI先生はもしかすると不満だったかもしれない。

そのためには「投影する」とは、何をすることかを確定しておかねばならない。「投影」と言う言葉を聞いた時、「１点」を光源とする投影を思い浮かべてしまったのだ。そうだとすれば、その点から出て円上の点を通る直線の全体は円錐を倒したもの、楕円錐になる[4]。投影するとは、その光の楕円錐をある平面（大抵は水平面）で切取ることに当たる。

円錐の切り口で閉じたものが楕円に他ならないことはアポロニウスの昔から分かっている。楕円は、形としては、円をある方向に一定の割合で拡大したもので、その楕円をもう一度別の方向に拡大してもまた楕円であることから、切り口が楕円になることは当たり前と思ってしまった。

しかし、高校の問題だと思えば、普通このような問題の時は投影というより、射影なのではないかと後になって思った。それでも、強弁する訳ではないが、この議論は間違って

[4] 勿論、光源と円との位置関係によっては円錐になる

いる訳ではない。この場合は、一定方向の射影、つまり、無限遠に光源が有ると思えば良く、楕円錐の代わりに楕円柱を考えるだけのことで、議論としてはまったく同様に進む。

交点の問題だが、射影でも投影でも直線は直線に写ること、交点は交点に写ることを考えれば、元の円の中心の写った点であることはすぐに分かるだろう。円に外接する正方形を考えると、円の中心は正方形との接点で相対するものを結ぶ直線の交点であり、正方形がどんな四角形に写ろうと楕円とその四角形との接点で相対するものを結ぶ直線の交点に写ることになる。

ただ、正方形が台形に写る際にはその直線の一方は内接する楕円の軸の一つと一致し、もう一方の直線と直交するような気がする。それで、その交点が楕円にとって何か特徴的な点になっているような気がしただけの、一種の錯覚が起きたのだろう。

射影かもしれないと思ったのは僕の勘違いだったようだ。射影ならば、平行線は平行なままだから、正方形は平行四辺形にしか写らない。平行四辺形に内接する楕円を描いてみれば分かるが、接点は楕円にとってどんな特別な意味も持たない。楕円の軸は接点とは何の関係もない位置にある。

射影を投影に変えると、光源を無限遠から近付けて来ることになり、元の円を含む平面と投影される平面との交線に近いほど小さく遠いほど大きく写ることになる。そのため、平行四辺形になるべきものが台形になったり、一般の四辺形になったりして、円はその内接楕円に写るのである。

平行四辺形の時ですら特別な点でないのだから、もっと一般になれば、「一般には」特別な点になれる筈がない。

6　第４回TOSMポストの質問

6.1　ハノイの塔の柱が４本になったらどうなるのか？

6.1.1　ハノイの塔とは

元は仏教説話の中で、世界の終わりまでの時間を表す為に提出されたもののようであるが、出典となる仏典が何なのかは知らない。

今も三重の塔や五重の塔、さらには十三重の塔で見られるように、舎利塔は上の方ほど小さいが、同じ造りの構造物が層のように積み上げられている。

ある仮想的な場所に三基の塔が建っている。ただし、すべての層が積み上げられた完成品は一つだけで、他の塔には一つの層も積まれていない。今ひとつの世界が完全な姿で存在するという気持ちだろうか。

各層は自由に取り外しが出来、別の塔にすべての層を移し変えようとする神か仏かが居る。妖精だと思う方が楽しければそれでも良い。上に位置する層は下層より小さいので、移し変える際に大きな層の下にならない様にしなければならない。

層の数は$64 = 2^6$だったと思うが、それだと仮令一つの層を移し変えるのに１秒しか掛からなかったとしても、すべて移し変えるのに必要な時間は我々が知っている宇宙の年齢をはるかに越えてしまう。古代インド人の想像力の凄まじさ。

現在のハノイの塔は、１９世紀ヨーロッパのある数学パズラーが、教育用具としてか単なるゲームとしてか考案したものである。３本の棒を打ち立て、その棒の太さより少し広い穴を中心に持つ薄い円盤を用意する。円盤の半径はすべて異なり、その大きさは等差数列をなすようにしておく。すべて色を変えた実物を見たことがあるが、大小の区別をしやすいのが良いのだろう。

１本の棒にすべての穴開き板（円盤）を大きさの順に差し込んで、さあスタートである。

で、どうすれば良いのだろう？

どれか別の棒に移し変えるだけなら、試行錯誤しているうちに出来ることもあるだろうし、ゲームとしてはそれで良いのかもしれない。

数学で取り扱うとなると、何が出来たとしたら許されるのかをはっきりさせておかなければならない。

円盤の枚数が幾つであっても移し変えることが出来るとか、その場合の最短手順の回数とか、またその手順を見つける方法が分かれば良いとも言えるだろう（これが決まってないと、「４本になったらどうなるのか？」という質問にどう答えたら良いか分からない）。

その問題も込めてこれから考えてみるのだが、考えてみるほど塔の数が３であることの素晴らしさが分かってくる。４以上とは本質的に違うのである。泣き言を言っても始まらない。数学は結果より、その解答に至ろうとするアプローチのあり方こそが重要だという言い訳を用意しながら先へ進むことにしよう。

6.1.2 ハノイの塔の状態の表し方

ハノイの塔の円盤を移していく途中の状態を、きちんと表現しておかなくてはいけない。それには大きく分けて、二つの方法がある。

できるだけ一般に考えてみる。円盤の数は $n(\geq 1)$ 枚、棒の数は $k(\geq 3)$ 本であるとする。

円盤には小さい方から大きい方に向かって 1 から n までの番号をつけ、棒には適当に 1 から k までの番号をつけておこう。つまり、円盤は $I_n = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ の元で表される。棒も I_k の元で表されるが、混同をさける為に同じものだが J_k と表すことにしておこう。

1. 各々の棒にどれだけの円盤があるのかを指定する方法。

   数学的には、I_n を k 個の部分集合の離散和に分けることで、各 i 番目の棒にどれだけの円盤があるのかを指定するということになる。それぞれの棒では，小さい円盤が大きい円盤の上に来るように規制しているので、I_n の部分集合 $f(i)$ を取るだけで指定できる。つまり，状態を表す集合は、

   $$Hanoi_n^k = \{f : J_k \longrightarrow 2^{I_n} = \mathcal{P}(I_n) | \quad \begin{array}{l} f(i) \cap f(j) = \emptyset \, (i \neq j), \\ \cup_{i=1}^n f(i) = I_n \} \end{array}$$

   となる。またこの元 f はその像を並べたもの $(f(1), f(2), \cdots, f(k))$ と表現することもできる。もちろん、$2^{I_n} = \mathcal{P}(I_n)$ は I_n の巾集合、つまり、I_n のすべての部分集合のなす集合である。

   すると、最初の状態は $f_1 = (I_n, \underbrace{\emptyset, \emptyset, \cdots, \emptyset}_{n-1})$ となる。これを例えば $f_2 = (\emptyset, I_n, \underbrace{\emptyset, \cdots, \emptyset}_{n-2})$ という状態に移行させればよい。

   状態 f にあるハノイの塔の円盤の移動は、$f(i)$ の最小の円盤が $f(j)$ の最小の円盤より小さいときに限り、$f(i)$ の最小の円盤を $f(j)$ に動かすことが出来るという規則にしたがって動かすことになる。ただし、$\emptyset$ には円盤がないのだから最小の円盤もないわけだが、最小の円盤の大きさを $n+1$ としておけば、$\emptyset$ の場合にも上の規則で動かせば良いことになる。この規約は円盤のない棒にはどんな大きさの円盤も移すことが出来るし、存在しない円盤は移すことが出来ないという事情を反映している。

   この表示は視覚的で分かり易く，例えば，$n = 9, k = 5$ の場合で $(\{1\}, \{2, 4, 7, 9\}, \{3, 6\}, \{5, 8\}, \emptyset)$ という状態であったとすれば，直ちに次の図表を連想でき，実際のハノイの塔の状態も想像が出来るだろう。紙の上に経済的に書き表そうと思えば、こうする以上に分かりやすい方法は思い付かない。

	2				
	4				
	7	3	5		
1	9	6	8		
1	2	3	4	5	棒

しかし、円盤の移動は、k 個の集合の最小元を取って，それらを比べることになり（最大 ${}_nC_2$ 回)、簡潔かつ機能的に表現することが難しく、移動状況の数学的表現は単純とは言い難い。

2. 各円盤が何番目の棒にあるかを表わす方法。

   円盤 i がある棒の番号が指定されれば良いのだから、ハノイの塔の状態は I_n から J_k への写像として表すことが出来る。つまり状態を表す集合は、

   $$\mathcal{H}anoi_n^k = \{\phi : I_n \longrightarrow J_k\} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n)|\ x_i \in J_k\} = J_k^n$$

   で、この表示から k 本 n 枚のハノイの塔には k^n 種類の状態があることが分かる。

   １番目の棒にすべての円盤がある最初の状態は $1^n (= \underbrace{111\cdots1}_{n}) = (1,1,1,\cdots,1)$ と書かれる。これを、例えば $2^n (= \underbrace{222\cdots2}_{n}) = (2,2,\cdots,2)$ に変えるのである。

   円盤 i の移動は、i 番目の数 $\phi(i)$ を変更することで表現される。ある数（棒を表している）が左から見て最初に現れる円盤を動かすことが出来るが（その数を変えるということ)、それより前の場所に現れている数に変えることは出来ない、という規則にしたがって動かすのである。言いかえると，各々の数 $i \in J_k$ のうち一番前に位置するものだけが変えられるのだが，j に変えることの出来るのはその位置より前に j が存在しないときに限るということである。

   例えば、$n=9, k=5$ の場合で 123243242 とすれば（括弧とコンマを取って表せばずっと簡単に見える。もちろん $k \leq 9$ までしか駄目だが)、第１の方法の例と同じになる。1 は 1 番目にしかないから、１番の棒には１番の円盤しかないことを意味する。2 が $2,4,7,9$ 番目にあるから、２番の棒には $2,4,7,9$ 番目の円盤がこの順で上から重なっていることを、3 が $3,6$ 番目にあるから３番の棒には $3,6$ 番目の円盤が、4 が $5,8$ 番目にあるから、４番の棒には $5,8$ 番目の円盤が、5 はどこにもないから５番の棒には円盤がないことを意味している。

   上の表を見ながら納得して下さい。動かし方の例も挙げておく。例えば 3 を変えようとすると一番左にある 3 番目のものしか変えられない。これは、3 番目の棒にある円盤で動かせるのは一番上の円盤 3 だけで、円盤 5 は動かせないことを意味する。また，変えることの出来る数が $4,5$ だけであるのは、$1,2$ 番目の棒にはより小さな円盤があるので、その上へは移動できないということを意味する。

n が小さいときなら、１番目の表示は状態も移動も、視覚的な分かり易くて良いのだが、n が大きくなっていくといちいち書くのが煩雑で、２番目の表示の方が役に立つことが分かる。

6.1.3 ハノイの塔の最短手順

k 本 n 枚のハノイの塔で、一つの塔から別の塔へ移し変えるがあれば、その中での最短手順の回数を a_n^k と書こう。数学的にキチンと言うとすると、最短手順があるとすればと

いうことになるが、それにはどんな手順でもいいから有限回の手順で移し変えることが出来れば良いのだから、あまり気にしなくても良い。どうしても気になるというなら、移しかえることが出来ない場合には ∞ とすることにしておけば良い。実は、下で見るように $a_n^k \leq a_n^3$ であり、$a_n^3 = 2^n - 1$ であるから、k 本の n 枚のハノイの塔での最短手順は保証されており、a_n^k は有限の自然数であることが分かる。

すぐに分かることを挙げておく。

- $a_1^k = 1$ （1枚ならいつでも1回で移せるということ)
- $k \geq h$ なら $a_n^k \leq a_n^h$ (枚数が同じなら塔が多い方が移しやすい)
- $k > n$ なら $a_n^k = 2n - 1$ (塔の数が円盤の枚数より多ければ、移しかえる過程で、どの塔に移していけないという制約がないから (自由移動と呼ぼう))

3本ハノイ ($k = 3$ の場合) が何故特別かということを見ておこう。一般の n の場合の主張を示そうとすれば、直ちに見て取れる場合を除けば数学的帰納法に訴えるしか、ほかの方法はないといって良い。つまり、何らかの形で $n - 1$ の場合に帰着できれば有り難いし、そうでなくても、$n - 2$ 以下の有限の状況の組み合わせに帰着できないと困るのである。$k = 3$ のときはこれが可能だが、$k \geq 4$ ではうまい方法が見つからなくて弱っている。

$k = 3$ とし初期状態は $1^n \in \mathcal{H}anoi_n^3$ であるとする。ここで、一番下の円盤を動かそうとするとき可能な状況を考えると、$2^{n-1}1 = \underbrace{22\cdots2}_{n-1}1$ か $3^{n-1}1$ のいずれかしか有り得ない[5] 。面倒なので、$a_n = a_n^3$ と書き、今は $3^{n-1}1$ に移したとする。1^n から $3^{n-1}1$ にいたる手順は $\mathcal{H}anoi_{n-1}^3$ での最短手順（回数は a_{n-1}）を施すのが最善である。そこで、円盤 n を棒 2 に移し ($3^{n-1}2$ に変えるということ)、棒 3 にある $n - 1$ 枚の円盤を $\mathcal{H}anoi_{n-1}^3$ での最短手順で棒 2 に移せば良い。

これによって、次の漸化式が得られる。

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

$a_1 = 1$ の初期条件でこの漸化式を解けば、$a_n = 2^n - 1$ となることは高校数学の定石である ($a_n + 1 = 2(a_{n-1} + 1) = \cdots = 2^{n-1}(a_1 + 1) = 2^n$)。

この解き方から、再帰的に、最短手順のアルゴリズムを得るにはどうしたら良いかもすぐに分かる。

しかし、$k \geq 4$ となると事情が異なってくる。

$k > n$ なら $a_n^k = 2n - 1$ であるが、$n \geq k$ の時はどうなるか分からない。しかし、ここまでのことから、次の漸化不等式なら得られる。まず $n + 2 - k$ 枚の円盤を最短手順で n 番目の棒に移す (a_{n+2-k}^k 回) と、残った $k - 2$ 枚は $2(k - 2) - 1$ 回で 2 番目の棒に移すことが出来 (自由移動)、n 番目の棒にある $n + 2 - k$ 枚の円盤を最短手順で 2 番目の棒に移せば良い (a_{n+2-k}^k 回)。したがって

[5] 一番右の 1 を変えようとすると左に 1 があってはいけないし、変えることが出来る数は 2 か 3 かしかないのだが ($k = 3$ だから)、2 と 3 がともに左にあれば 1 を変えることが出来ないから

$$a_n^k \leq 2a_{n+2-k}^k + 2k - 5$$

を得る。４本 n 枚ハノイの最短回数 $b_n = a_n^4$ に対しては

$$b_n \leq 2b_{n-2} + 3$$

となり、初期値 $b_1 = 1, b_2 = 3$ に注意すれば、３本ハノイのときと同様に、$b_n+3 = 2(b_{n-2}+3)$ から、

$$b_{2n-1} \leq 2^{n+1} - 3, \qquad b_{2n} \leq 3 \times (2^n - 1)$$

という評価を得る。これを第１次評価と呼ぼう。こうして、オーダーとしては４本ハノイの最短手順は３本ハノイの手順数 $a_n = 2^n - 1$ の平方根よりも小さくなることが分かる。

しかし、この評価は更にずっと良くなる。以下の議論も最短を与えるものとは言えないが、驚くほど評価は良くなる。上の第１次評価は、下の議論で $b_n(n-2)$ で b_n を評価していることにあたっている。

$1 \leq \ell \leq n-1$ 枚だけ４本ハノイの最短手段で動かし (b_ℓ 回)、動かした先に触れずに、３本ハノイで残りの $n-\ell$ を動かし ($a_{n-\ell}$ 回)、また ℓ 枚の４本ハノイで動かして、n 枚の４本ハノイを得る手段の回数を $b_n(\ell) = 2b_\ell + a_{n-\ell}$ と置けば、$b_n \leq \min_{1\leq\ell\leq n-1} b_n(\ell)$ である。これを第２次評価と呼ぼう。

図式的に描いておくと、

$$1^n \overset{b_\ell}{\Longrightarrow} 4^\ell 1^{n-\ell} \overset{a_{n-\ell}}{\longrightarrow} 4^\ell 2^{n-\ell} \overset{b_\ell}{\Longrightarrow} 2^n$$

という手順を踏むことになる。$\Longrightarrow$ は４本ハノイの手順で、$\longrightarrow$ は３本ハノイの手順で行うことになる。ℓ を動かしたときの最小のものを第２次評価としているのである。$a_2 = 3$ は自由移動に当たっていて、真ん中の過程を自由移動にするのを第１次評価としているのであった。

n の小さいところで少し計算してみると、次のようになる。

$b_1 = 1$
$b_2 = 3$
$b_3 = 5$ (ここまでは $k = 4 > n = 3$ の場合にあたる)
$b_4 = 9; b_4 \leq b_4(1) = 2b_1 + a_3 = 2 \times 1 + 7 = 9$
$b_4(2) = 2b_2 + a_2 = 2 \times 3 + 3 = 9$
$b_4(3) = 2b_3 + a_1 = 2 \times 5 + 1 = 11$
$b_5 \leq 13 = 13; b_5 \leq b_5(1) = 2b_1 + a_4 = 2 \times 1 + 15 = 17$
$b_5(2) = 2b_2 + a_3 = 2 \times 3 + 7 = 13$
$b_5(3) = 2b_3 + a_2 = 2 \times 5 + 3 = 13$
$b_5(4) = 2b_4 + a_1 = 2 \times 9 + 1 = 19$
$b_6 \leq 17 < 21; b_6 \leq b_6(1) = 2b_1 + a_5 = 2 \times 1 + 31 = 35$
$b_6(2) = 2b_2 + a_4 = 2 \times 3 + 15 = 21$
$b_6(3) = 2b_3 + a_3 = 2 \times 5 + 7 = 17$
$b_6(4) = 2b_4 + a_2 = 2 \times 9 + 3 = 21$

$$
\begin{aligned}
& b_6(5) = 2b_5 + a_1 \le 2 \times 13 + 1 = 27 \\
b_7 \le 25 < 29; b_7 \le\ & b_7(1) = 2b_1 + a_6 = 2 \times 1 + 63 = 65 \\
& b_7(2) = 2b_2 + a_5 = 2 \times 3 + 31 = 37 \\
& b_7(3) = 2b_3 + a_4 = 2 \times 5 + 15 = 25 \\
& b_7(4) = 2b_4 + a_3 = 2 \times 9 + 7 = 25 \\
& b_7(5) = 2b_5 + a_2 \le 2 \times 13 + 3 = 29 \\
& b_7(6) = 2b_6 + a_1 \le 2 \times 17 + 1 = 35
\end{aligned}
$$

第１次評価と比べると、$n \ge 6$ でやっと差が出てくる。$b_6 \le 17$, $b_7 \le 25$ が得られ、第１次評価より 4 小さくなっている。更にやってみると $b_8 \le 33$ では 7、$b_9 \le 41$ では 20 も小さくなる。オーダーに影響するほどかどうかを調べる為に、計算機でこの第２次評価を $n = 2000$ まで実行してみたら[6] 、

n	b_nの第２次評価	b_nの第１次評価	a_n
10	49	93	1023
20	289	3069	1048575
30	1025	98301	1073741824
40	2817	3145725	1099511627776
50	6657	100663296	1125899906842624
60	14337	3221225469	$1.1529215046847 \times 10^{18}$
70	28673	137438953469	$1.180591620717411 \times 10^{21}$
80	53249	3298534883325	$1.208925819614629 \times 10^{24}$
90	94209	70368744177661	$6.189700196426901 \times 10^{26}$
100	172033	3377699720527869	$1.267650600228229 \times 10^{30}$
(103	196609	9007199254740989	$1.014120480182584 \times 10^{31}$)
200	14680065	$3.802951800684688 \times 10^{30}$	$1.606938044258990 \times 10^{60}$
300	385875968	$4.28174307811788 \times 10^{45}$	$2.037035976334486 \times 10^{90}$
400	6445750944	$4.820814132776971 \times 10^{60}$	$2.582249878086909 \times 10^{120}$
500	73014444032	$5.427754182999197 \times 10^{75}$	$3.273390607896142 \times 10^{150}$
600	652835028992	$6.111107929003458 \times 10^{90}$	$4.149515568880993 \times 10^{180}$
700	4741643894784	$6.880495847970215 \times 10^{105}$	$5.260135901548374 \times 10^{210}$
800	31885837205504	$7.746749634260726 \times 10^{120}$	$6.668014432879854 \times 10^{240}$
900	173722837188608	$8.722064691547283 \times 10^{135}$	$8.452712498170644 \times 10^{270}$
1000	932385860354049	$9.820171823688426 \times 10^{150}$	$1.071508607186267 \times 10^{301}$
2000	$4.980620899901579 \times 10^{20}$	$3.214525821558802 \times 10^{301}$	

となった。第２次評価の定義式から、小さくなることは分かっていたが、これほどとは思わなかった。

２番目の表示を使って、具体的な手を探して行きながら、この差の意味を考えていくと

[6] 使用した処理系では $n = 104$ で第１次評価が整数表示されなくなり、$n = 2001$ で第１次評価が、$n = 1001$ で a_n の値がオーバーフローした。

いう実験も出来るし、時間があればやってみようと思っているが[7]、一般の n で出来るかどうかの見通しは明るくない。

本来、円盤を移すという作業にとって、棒（塔）が多ければそれだけやり易くなる。2本のときは、１枚しか移すことが出来ない。３本のときが、任意枚数の円盤を移せる最小の棒の数であって、それ故にこそ、選択の自由が減少し、整然とした構造が顕れてくるのである。数学は一般に、このように自由度の大きい場合を取り扱うのは得意でない。数学者の心情として、出来る限り必要十分で押して行きたくなるが、自由度が増せば必然性が減少するというせいであろうか。

実験をする前に、一般の $k>3$ の場合の第１次評価も見て置くことにしよう。初期条件は自由移動の $a_\ell = 2\ell-1$ $(1\le \ell<k)$ とすれば良く、漸化不等式の形から $a_n^k+2k-5\le 2(a_{n+2-k}^k+2k-5)$ が得られ、それから $k-2$ を法として異なる評価式

$$\begin{aligned} a_{m(k-2)+\ell}^k &\le \quad 2^m(2k-5)+5-2k \qquad (\ell=0) \\ &\le \quad 2^{m+1}(\ell+k-3)+5-2k \quad (1\le\ell\le k-3) \end{aligned}$$

が得られる[8]。これを３本ハノイのときの値 $a_{m(k-2)+\ell}=2^{m(k-2)+\ell}-1$ と比べると、枚数が多くなれば、$k-2$ 乗根のオーダーでは押さえられることが分かる。

$k=5$ の場合の第１次評価でも、$k=4$ の第２次評価よりはるかに小さくなるので、第１次評価だけの議論は意味がないとも言えるが、ほかに一般的に述べられることが見つからない。

$k=5$ の場合の第２次評価は、$k=4$ の時の説明から分かるように、

$$a_n^k \le \min_{1\le\ell\le n-1}(2a_{n-\ell}^k + a_\ell^{k-1})$$

という不等式で得られる。a_ℓ^{k-1} が自由移動を表している最大の $\ell=k-2$ の値だけで評価したものが第１次評価である。$\mathcal{H}anoi_n^k$ の元の記述が有効な $k\le 9$ に対して、$n\le 2000$ まで第１次評価と第２次評価の計算をしてみた。$n=50,100,500,1000,2000$ の時の値を表にして、挙げておく[9]。

k	a_{50}^kの第２次評価	a_{50}^kの第１次評価
3	1125899906842624	1125899906842624
4	6657	100663296
5	831	524283
6	449	40953
7	303	9207
8	273	3573
9	239	1779

[7] 締め切りに追われていて中途半端になりそうです。
[8] ここでも、$k=3$ すなわち $k-2=1$ であることが特別なことが分かるだろう。
[9] もしかすると、第２次評価の値もまた最短手順の回数も、何か意味のある組み合わせ論的な数になっているのかもしれない。

k	a^k_{100}の第 2 次評価	a^k_{100}の第 1 次評価
3	$1.267650600228229 \times 10^{30}$	$1.267650600228229 \times 10^{30}$
4	172033	3377699720527869
5	4863	51539607547
6	1749	234881017
7	1055	9437175
8	801	1179637
9	639	262131

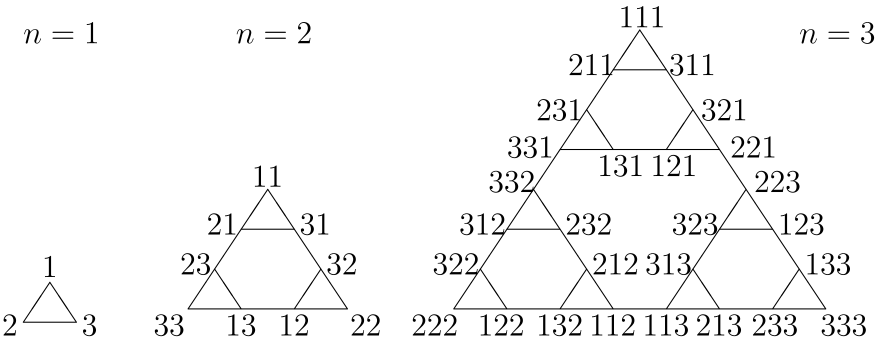
k	a^k_{500}の第 2 次評価	a^k_{500}の第 1 次評価
3	$3.273390607896142 \times 10^{150}$	$3.273390607896142 \times 10^{150}$
4	73014444032	$5.427754182999197 \times 10^{75}$
5	1015807	$7.482888383134223 \times 10^{50}$
6	68097	$2.977470710558212 \times 10^{38}$
7	23807	$1.140885540205406 \times 10^{31}$
8	13057	$1.353996917968385 \times 10^{26}$
9	9599	$4.250129834582682 \times 10^{22}$

k	a^k_{1000}の第 2 次評価	a^k_{1000}の第 1 次評価
3	$1.071508607186267 \times 10^{301}$	$1.071508607186267 \times 10^{301}$
4	932385860354049	$9.820171823688426 \times 10^{150}$
5	22020095	$1.049880347895846 \times 10^{101}$
6	470017	$1.266475976033146 \times 10^{76}$
7	114431	$1.446244239833091 \times 10^{61}$
8	49921	$1.683649886205200 \times 10^{51}$
9	32255	$1.338044711911838 \times 10^{44}$

k	a^k_{2000}の第 2 次評価	a^k_{2000}の第 1 次評価
4	$4.980620899901579 \times 10^{20}$	$3.214525821558802 \times 10^{301}$
5	922746879	$2.449441655328671 \times 10^{201}$
6	4554753	$2.291373425527299 \times 10^{151}$
7	552959	$2.324024890278217 \times 10^{121}$
8	214273	$2.449720811756973 \times 10^{101}$
9	114431	$1.367638900126913 \times 10^{87}$

6.1.4 具体的な手順の例

1^n からどれかの i^n $(1 \le i \le k)$ へ移す手順の例を挙げる。(　) の中は手順数である。
$k = 3$ の場合。この場合は第 1 次評価の漸化式の要請する最短手順になっている。
$n = 1$ のとき、$1 - 2\,(1)$



$n=2$ のとき、$11-21-23-33\,(3)$

$n=3$ のとき、$111-211-231-331-332-132-122-222\,(7)$

$n=4$ のとき、$1111-2111-2311-3311-3321-1321-1221-2221-2223-3223-3123-1123-1133-2133-2333-3333\,(15)$

$n=5$ のとき、$11111-21111-23111-33111-33211-13211-12211-22211-22231-32231-31231-11231-11331-21331-23331-33331-33332-13332-12332-22332-22132-32132-31132-11132-11122-21122-23122-33122-33222-13222-12222-22222\,(31)$

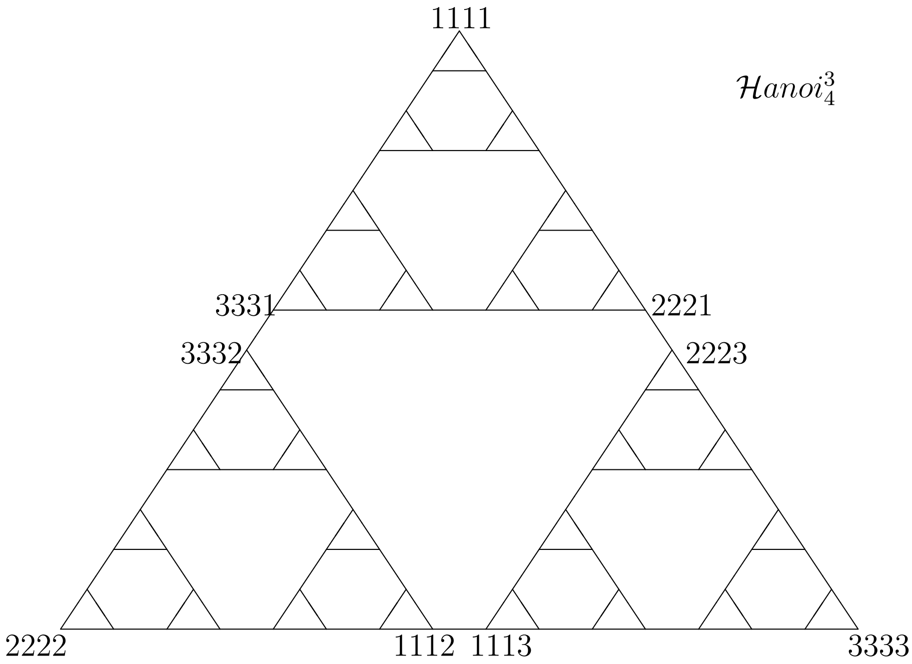
どこでも半分までは一つ上の手順の各項の最後尾に 1 をつけたものになっており、最後尾の 1 を 2 か 3 に変えてから，数字は異なるが前半と同じ構造の手順を行っていることが分かるだろう。

３本ハノイの状態集合 $\mathcal{H}anoi_n^3$ で、各状態を頂点、直接変化させることが出来る状態同士を線分で結べばグラフが得られる。すると、３本ハノイの状態集合 $\mathcal{H}anoi_n^3$ には非常に整然とした構造が見えてくる。まず、$\mathcal{H}anoi_1^3$ は正三角形になる。次に、$\mathcal{H}anoi_2^3$ は正三角形の頂点に、$\mathcal{H}anoi_1^3$ と同型な正三角形が置かれる形になる。同様に、$\mathcal{H}anoi_n^3$ は正三角形の頂点に、$\mathcal{H}anoi_{n-1}^3$ と同型なグラフが置かれる形になる。$1^n, 2^n, 3^n$ はその一番大きな正三角形の頂点にあり、最短経路は正三角形の辺を通るものとなることが分かる。

まず、$n=1,2,3$ の場合に状態集合 $\mathcal{H}anoi_n^3$ のグラフを描いてみると、
となる。$n=1$ のグラフの頂点すべての右端に 1 を加えたものが $n=2$ のグラフの上部に、さらに $n=2$ のグラフの頂点すべての右端に 1 を加えたものが $n=3$ のグラフの上部にあることが分かる。

同様に $n=3$ のグラフの頂点すべての右端に 1 を加えたものが、以下に描いた $n=4$ のグラフの上部にあるが、繁雑になるのですべての頂点の名前を書き込んでいない。演習として残しておく。

$\mathcal{H}anoi_n^3$ を描くときは、$\mathcal{H}anoi_{n-1}^3$ を３つ同じものを描いて、それぞれを $1,2,3$ の島だと思い、各頂点の名前の右端に島の名前を付け足す。1 の島を上部に置き、2 の島は $\pm 120^\circ$ 回して n が奇数のときは左下に、n が偶数のときは右下に置く。回転する方向は $3^{n-1}2$ が正三角形の上の頂点に来るようにして、頂点 $3^{n-1}2$ と $3^{n-1}1$ を線で結ぶ。3 の島も同様にしておいた後で、残った 2 頂点 $1^{n-1}2$ と $1^{n-1}3$ との間の線分をひけば良い。



これ以上詳しい議論はもう止めて、イアン・スチュアートの「おもしろ数学入門」[12] を引用しておこう。n が大きくなると、グラフはフラクタルの一種であるシェルピンスキーの三角形に似たものになってくる。実際に $n \longrightarrow \infty$ の極限でシェルピンスキーの三角形になることを利用して、シェルピンスキーの三角形の２点間の平均距離をハノイの塔の２状態間の平均手順数の計算から求めた数学者もいる。

$k \geq 4$ のときには、この構造を一言で言い切ることが出来ていない。

$k = 4$ の場合に n の小さい所で見てみると、$\mathcal{H}anoi_1^4$ は正四面体グラフになるが、そのあとも正四面体の各頂点に一つ小さなものが配置されていくようになっていれば嬉しいのだが、思わぬ所が結ばれて簡単に言い切ることが出来ていない (下図参照)。

$\mathcal{H}anoi_2^4$ は４つの $\mathcal{H}anoi_1^4$ を用意して、$1, 2, 3, 4$ と島の名前を付けて、１の島を真ん中に置き、その他の島は正四面体と思って回してみて、適当に１の島の辺と四角形を作るように繋ぐことになっている。

グラフ $\mathcal{H}anoi_n^4$ の辺で作る最小の多角形は三角形と四角形と交じり合うことになる。$n = 3$ のグラフをきちんと描けば、何か分かることがあるかもしれないが、今は時間がない。

$k = 3$ のときは平面グラフを与えるが、$k > 3$ のときは n が大きくなるとすぐに平面には収まらなくなる。

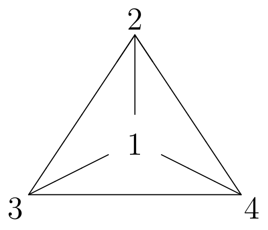
第１次評価、第２次評価、行き当りばったりで少しやってみると

$n = 1$ のとき、$1 - 2\,(1)$

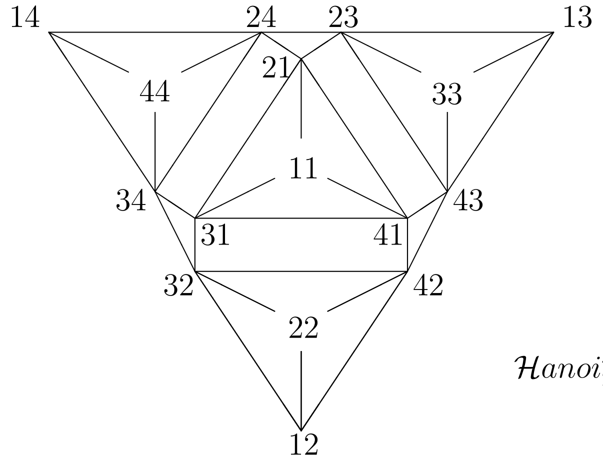
$n = 2$ のとき、$11 - 21 - 23 - 33\,(3)$

$n = 3$ のとき、$111 - 211 - 231 - 234 - 244 - 444\,(5)$

$n = 4$ のとき、$1111 - 2111 - 2311 - 3311 - 3341 - 3342 - 3322 - 1322 - 1222 - 2222\,(9)$ が第１次評価に即した手続きであるが、少し考えただけでも 1111 を 2222 に変える手続きには次のものがある。

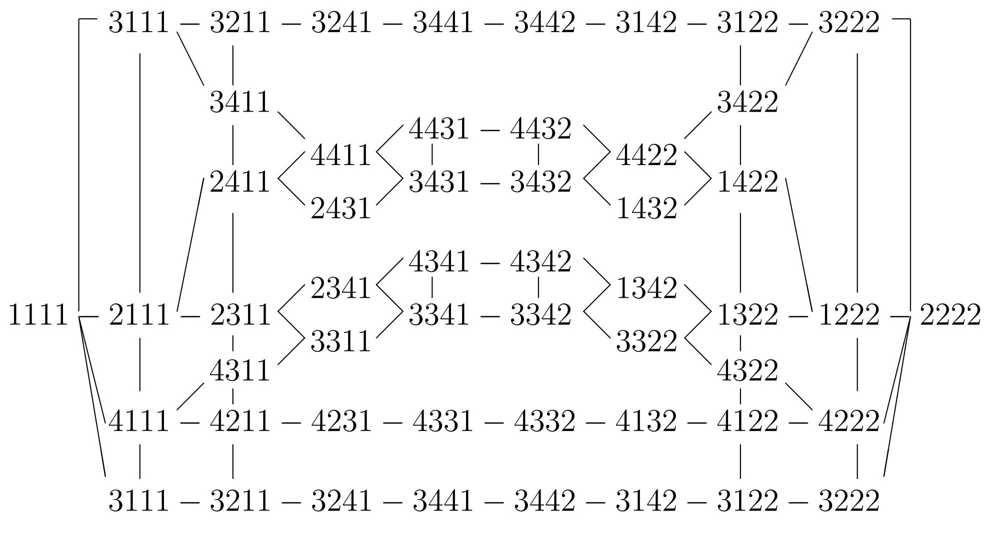


$\mathcal{H}anoi_1^4$



$\mathcal{H}anoi_2^4$

$\mathcal{H}anoi_4^4$ において 1111 と 2222 を結ぶ最短の手順



線が重なって見難いので、１番上の列は１番下にもう一度書いてある。1111 と 2222 を最短で結ぶことにかかわるもの以外は、線も頂点も省略してある。それを補ってみると複雑さが実感できると思う。

このグラフの 1111 と 2222 を結ぶ最短経路（長さ 9）が最短手順を与えていると思うが、ざっと数えただけでも２０はある。こんなに自由度が多いと、最短手順の中から特別なものを定性的な言葉で取り出すことが難しい。

以下は少しやってみただけ。これ位のことでは、第２次評価のときもそれを与えるアルゴリズムに特徴的な頂点を、全く通らなくても同じ回数で実現できる例があるのだから、恐らく n が大きくなれば第２次評価よりも短い手順があるだろう、ということぐらいしか分からない。

$n=5$ のとき、$11111-21111-23111-23411-24411-24431-34431-34432-14432-14422-13422-13222-12222-22222$ (13)

$n=5$ のとき、$11111-21111-23111-23411-24411-44411-44431-44432-44422-14422-13422-13222-12222-22222$ (13) 第１次評価

$n=6$ のとき、$111111-211111-231111-234111-244111-244311-444311-444321-444221-444223-444123-444133-444333-244333-241333-243333-233333-3333333$ (17)

$n=6$ のとき、$111111-211111-231111-234111-244111-444111-444211-444231-444331-444332-444312-444322-444222-144222-134222-132222-122222-222222$ (17) 第２次評価

$n=6$ のとき、$111111-211111-231111-331111-334111-334211-332211-132211-122211-222211-222231-222234-222244-122244-132244-332244-331244-331444-334444-134444-144444-444444$ (21) 第１次評価

もう少し大きな n でやらないと、第２次評価が最短を与えていない場合があることを示すことも出来ない。

これらをいつまで手だけでやっていても見通しがつかないので、コンピュータで応答式に支援するプログラムを作ってみようと思っている。少し教育的な工夫を盛り込めば、小中学校で、また高等学校でも使えるようなものが出来るかもしれないが、これは９５年度の卒論を準備している学生のテーマにとって置くことにしたい。うまくいけば、使っていただけるものが出来るかもしれません。

いろいろ書くべきこともありますがこの辺で勘弁していただくことにします。

6.2 空集合の記号の読み方

空集合の記号 $\emptyset$ をどう読んだら良いかということですが、まずギリシャ語のファイと違うことを見ておきましょう。

この文章は $\LaTeX$ という組み版ソフトを使って書いているのですが、$\LaTeX$ での印刷上の違いを見てみましょう。命令文そのものと印刷の出来上がりを並べてみると

$$\text{空集合} = \backslash\text{emptyset} = \emptyset \qquad \text{ギリシャ語のファイ} = \backslash\text{phi} = \phi$$

となって、違っていることは一目瞭然ですね。しかし、違っているということは分かっていての質問でしたから、これでは納得しては頂けないでしょう。

手書きにすれば区別するのが難しいのも、混同しやすい理由でしょう。やはりファイ ϕ とは違うことを意識して、書くときも書いた方が良いでしょう。実際に黒板に ϕ を書いておいて、これはファイ ϕ とは違うのだと言っても、児童・生徒は納得しないでしょう。$\emptyset$ の書き方としては、数字の 0 を少し大きめに書いてその上に右上方から左下方へ線を引くようなつもりで書くと、ϕ と区別しやすいのではないでしょうか。

読み方としての結論を先に述べるとすれば、$\emptyset$ は「空集合」と読むのが良いと思います。

空集合は、上の命令文でも分かるように、英語では empty set です。この頭文字を採って、e とすれば良いわけですが、e はアルファベットの前の方にあることもあり、一般に何かの量を表したり、多項式の係数に使ったり、また電荷を表すのにも用いられ、空集合であるというような特徴的な事柄を表すのには適していません。新しい記号が必要です。

どんな集合でも、その要素を一つも含まない部分集合として空集合を持ちます。いろんな数学的対象からなる集合がありますが、それがどのような対象であっても、その部分集合としての空集合は同じものなのです。つまり、空集合は固有名詞であると言っても良いわけで、見ただけではっきりと分かる記号が欲しかったのです。

アンドレ・ヴェイユの自伝 [13] は、記号が生まれる経緯が語られています。それによれば、ブルバキが「集合論要約」を出す時に集合論で使う記号を整理したり発明したのだそうです。その時ノルウェー語の字母で少し硬い「エ」という音の $\emptyset$ を使うことにしたようです。その時の会議の場にノルウェー語を知っていたのは自分だけで、だから $\emptyset$ は自分の発明なんだと、学校で集合論を習って来た小さい娘に自慢できて、ヴェイユはとても嬉しかったということです。

それはともかく、$\emptyset$ は空集合を表しており、空集合と読むのが適当だと思います。たとえ、ノルウェー語を勉強して正確に発音したとしても、聞いた人がそのことを認識してくれないような音を出して見せても仕方がないと思います。

また、ある人は void と呼んでいるがと質問にありましたが、それは単に、日本語であっても、ある集合が「空集合である」と言わずに、形容詞に変えて、「空（くう）である」と言うことも、「空（から）である」と言うこともあるだろうというくらいのことでしかありません。

どう読むのかという疑問が単なる好奇心ならそれで良いのですが、どう読まねばならないかというような議論は倫理臭を感じさせない程度にしておくのが良いと思います。どういう概念なのかが問題なのですから、正々堂々と、「空集合である」と読むのが良いと思います。

6.3 対偶による証明法と背理法との違い

対偶を用いた証明法は背理法の一種であるという高校教科書の記述に納得しにくいものを感じているというのが、質問の趣旨のようです。対偶を用いた証明法で背理法を示すことができるのではという疑問もありました。背理法による証明を対偶を証明する方法であると誤解しないようにという記事を引用して、その方向で考えたいがという思いも書かれていました。

これらの質問に答える為には背理法とは何か、また対偶とは何かをはっきりさせておく必要があります。さらに、真理値とは何かということも問題になります。実は、仮題「小学校教師の数学的常識」という教科書を何年か前から書き始めていて、その論理についての節に少し詳しい議論があります。その原稿を次節に添付しますので、ここでまずその節を参照して下さい[10] 。

背理法の意味を、質問者の添付してくれた高校教科書の記述に従って、「命題 R を否定して矛盾を導くことにより、命題 R の成り立つことを示す」ということにすれば、確かに対偶を用いた証明法は背理法の一種ということになります。

教科書の説明は簡単過ぎて納得出来ないことがあっても仕方が無いかもしれませんが、素直にその記述のままに納得しておいた方が「幸せ」かも知れません。きちんと納得したいという質問なので、次節を読んでいるという前提のもとに、少し細かい議論をしてみますが、分かりやすいとは言えないと思います。これは、事柄がかなり微妙で根源的な問題を含んでいるので、一般的にするこのような議論では、止むを得ないことも了解しておいて下さい。

質問者の添付した文章には、$P \Longrightarrow Q$ をその対偶 $\neg Q \Longrightarrow \neg P$ を示すことで証明することと、背理法とには差のあることが指摘してあります。つまり、$\neg Q$ を仮定して $\neg P$ を示さなくても、公理、定理、仮定に反することを示せば良いからとあります。

確かにこれはこれで正しいのですが[11] 、背理法で示すということの意味を考えてみる必要がありそうです。

「背理法」を広辞苑で引くと、「帰謬法」を見よとあり、「帰謬法」を引くと reductio ad absurdum(ラテン語) とあって、「否定命題 $\neg P$ を仮に真とすれば結局不条理に陥ることを示して命題 P が真であることを間接的に証明する方法」であるとなっています。ラテン語もその直訳である帰謬法という術語もこの定義をよく表していると思いますが、恐らくは「謬」という文字を避けるために造語された「背理法」という術語は少しニュアンスが違うようです。この差がまた、混乱の元なのかもしれません。

問題はこの「不条理」ということなのです。不条理とは何にとって不条理か、また不条理とは一体どういうことか、が問題なのです。次節を読むと、意味のはっきりしない宇宙と呼ばれる集合 Ω が何故かとても重要なもののように感じられないでしょうか。そう感じ

[10] 何人かの学生にこの部分を読ませてみた所、次節を読んでからとここに書いてあるにも拘わらず、次節を読まずに以下を読み進み、意味が判らんと不平を言います。ぜひ次節を先にお読みください。まだ出てもいない本の宣伝をしているわけではありません。

[11] 正しいかどうかを問題にするのではなく、教育上の技術的な提言だと思った方が良いのではないでしょうか。つまり、$\neg Q$ が真であると仮定したとき、ひたすら $\neg P$ を示そうとするのでなく、公理にでも、定理にでも、定義にでも何でもいいから矛盾を導けばいいという指導の方が、生徒の気持ちは少しでも自由になれるのではないでしょうか。

てもらえれば良かったのです。命題 P の真理値とは Ω の元 x に対して、$P(x)$ が真であるか偽であるかを与えるものなのです。「命題 $\neg P$ を仮に真とすれば」ということは、$P(x)$ が偽であるような $x \in \Omega$ を考えれば、ということであり、不条理というのは、そのように仮定したとき x は Ω の元であるために守るべき規範に反しているということなのです。

それでもなお気持ちが悪ければ、Ω を含む十分大きな集合 $\tilde{\Omega}$ [12] を考え、x は $\tilde{\Omega}$ の元だと思っておき、$P(x)$ が偽であると仮定すれば、x はもはや Ω にはいられない $(x \in \tilde{\Omega} \setminus \Omega)$ ことが示されるということにすればいい。そのためには、$\tilde{\Omega}$ の中で部分集合 Ω を特徴付けている条件や性質（これがこの世界 Ω における公理や定理に当たる）を満たしていないことを言っても良いのです。

排中律の定式化は、次節によれば、「複合命題 $P(x) \vee \neg P(x)$ は常に真で、$P(x) \wedge \neg P(x)$ は常に偽である」ことでした。命題 P が真である範囲 M_P も本来は $M_P = \{x \in \Omega | P(x)\}$ と書くべきであったし、命題 P が偽である範囲 $M_{\neg P}$ は $M_{\neg P} = \{x \in \Omega | \neg P(x)\}$ となる。この時排中律は、$M_P \cup M_{\neg P} = \Omega$ かつ $M_P \cap M_{\neg P} = \emptyset$ であることを意味しています[13] 。

宇宙 Ω の中では、どんな命題 P に対しても、P が成り立つか $\neg P$ が成り立つかのいずれか一方だけが成り立つということです。

$\neg P$ が真であると仮定して不条理に陥るとは、$\neg P(x)$ が真であるような x は Ω の元では有りえないことを示したことになるので、$M_{\neg P} = \emptyset$ であること、すなわち、$M_P = \Omega$ であることが示され、つまり宇宙全体で P が真であることが示されたことになるのです。

これが背理法の意味であり、それは排中律そのものであると言っても良いほど直接的な排中律の帰結だといえるでしょう。

議論が繁雑になるので止めますが、排中律をフルに使えば、真理値の同じ命題は全く同じと考えていることになることに注意しておきます。

さて、問題を仮言命題 $P \Longrightarrow Q$ を証明することに限って議論してみましょう。

そもそも、この命題の対偶 $\neg Q \Longrightarrow \neg P$ を示すことによって、何故元の命題 $P \Longrightarrow Q$ が示されたことになるのでしょうか。

次節を読んで貰っていればこれは明らかなことになっているでしょう。$P \Longrightarrow Q$ は P, Q の複合命題として $\neg P \vee Q$ と表され、対偶 $\neg Q \Longrightarrow \neg P$ は $\neg(\neg Q) \vee \neg P$ と表されるのだが、この二つは論理式としてまったく同等なのですから、対偶を示すこと、すなわち元の命題を示すことだったわけです。

しかし、こんな当たり前のことで良いのでしょうか。

論理式が同じであることを示す変形を見ていると、$\neg(\neg Q) = Q$ であるという変形がポイントであることが分かるでしょう。

しかし、これこそ上に述べた排中律そのものだと言っても良い事柄なのです。排中律は、理性においては疑うことが出来ないほど明らかで受け入れやすいことなのに、感性においてはなかなかに受け入れにくいということがあります。それは往々にして、宇宙 Ω と拡大宇宙 $\tilde{\Omega}$ とを混同することにあるようですが、これは生徒には説明しにくいでしょう。

少し別の角度から考えてみましょう。

$\neg Q(x)$ が真であると仮定しましょう。

[12] 宇宙 Ω を銀河系とでも考えたら銀河系集団のようなもの

[13] 分からないという人のために、老婆心ながらもう一度言います。次節を読みましたか？

その時 $\neg P(x)$ が真であることが示されたとすればどういうことになるのでしょうか。そのとき、$P \Longrightarrow Q$ が示せたら良いのですね。

それでは $P(y)$ が真だとしましょう。$Q(y)$ が真だと主張したいのですが、ともかく排中律から $Q(y)$ は真か偽かのいずれか一方だけが成り立っているのでした。$Q(y)$ が偽だと仮定したら、$\neg P(y)$ が真であることが示されているのですから、排中律から $P(y)$ と $\neg P(y)$ が共に真であるような元 y は宇宙 Ω には存在しないことになります。したがって $Q(y)$ は真でなければならないことになります。

これはよろしいですね。

さてもう一方の方を考えてみましょう。$\neg Q(x)$ が真であると仮定して、何らかの公理などとの間に矛盾を起こさせて不条理であることが示されたとします。

しかしそれで、$P \Longrightarrow Q$ が示せたことになるのでしょうか。矛盾に導く際に P であることを一切使わなかったとすれば、それは $P \Longrightarrow Q$ などではなく、$Q(x)$ が Ω 上どこでも、つまりいつでも Q が成り立つことを示していることになります。

だからやはり、具体的に現れていなくても何らかの形で、P を仮定していることになるのです。つまり示したことは、P と $\neg Q$ とを仮定して矛盾を導いた、すなわち $P \wedge \neg Q$ は偽であることが示されたことになり、それは取りも直さず、$\neg(P \wedge \neg Q) = \neg P \vee Q$ が真であるなのです。そしてこの最後の式は $P \Longrightarrow Q$ の定義式に他なりません。

結局、$P \Longrightarrow Q$ を示す二つの方法は、排中律をどこでどんな形で使うのかが違うだけで本質的には差のないものであることが分かったわけです。

お疲れ様でした。さて、

大山鳴動してネズミ一匹

出たでしょうか。

6.4 論理（数学のグラマー）[「小学校教師の数学的常識」より]

アルファベット[14] だけでは言葉にはならない。学ぶには文法も必要である。数学でも集合について何か主張しようと思えば、論理が必要になるのである。

Logic を訳すのに論理という言葉を選んだ人は、議論するときの理屈という面を強調したかったのだろう。その議論とは、命題を一定の規範で並べていかないといけない。議論とは、相手か第三者かを納得させるためのものだから、自分の主張したい命題を連呼しているだけではいけない。共通に納得出来る基盤から、承認できる命題の連鎖で主張したい命題を導く必要がある。論理学は古代ギリシャで生まれた。古代ギリシャは民主的な多民族国家だったが、国家の成立ちから多くの議論が必要であり、人を説得する技術としての雄弁術が盛んであった。

議論しようとする人々が共通に承認する命題を公理 Axiom と言い、後は三段論法だけを用いて主張したい命題を導くのが最も本格的な議論の仕方であった。基本的にはこれ以外の論理の運用を認めないのは数学だけで、当時は幾何学がその主流であった。プラトンの学塾アカデメイアの入り口に「幾何学を知らざるものこの門を入るを許さず」と書いてあったというが、論理の正しい運用も出来ないものは入学できないという入学の条件だったということかもしれない。

当時の多くの雄弁家はまた詭弁（インチキな議論）の達人でもあって、それが政治の歪みを引き起こし、社会の関心事でもあったのだろう。正しい論理の運用の術が、幾何学をモデルに整備されてゆき、その集大成がプラトンの弟子であるアリストテレスの論理学という本である。これが古典論理学であり、基本的には現在もこれから出るものではない。

正しい論理を知るためには詭弁も知っておく必要がある。アリストテレスには詭弁の分類もあって面白いが、まず命題について考えてみることにしよう。

命題はそれ自体文章なのだが、どんな文章でもよいという訳ではなく、基本的なものの適切な組み合わせだけを考えることにするのである。まず基本的な命題を「A は B である」という形の文章 P とする。B として「C をするもの」とか「D なもの」を考えることによって、述語に動詞や形容詞を使うことも出来る。

さて、A が固有名詞なら命題 P も確定した意味を持ち得るが、A が普通名詞であったりすると曖昧さが残る。例えば「リンゴは赤い」という命題 P を考えて見よう。A=「リンゴ」、B=「赤い」である。今目の前にしている特定のリンゴという意味でなら別だが、普通は「リンゴ」は普通名詞として考えているだろう。確かにリンゴの多くは赤いけれど、黄色のリンゴも青いリンゴもある。だから P は正しいとも言えるし、正しくないとも言える。

前の節で集合を $M = \{a|P(a)\}$ と表わしたが、集合に対する要請として「$a \in M$」か「$a \notin M$」かのどちらかが成り立たねばならなかった。命題 P にとって言えば、P が真であるか偽であるかのどちらかが成り立たねばならないということになる。

「リンゴは赤い」というのは命題ではないのだろうか？

確かにこのままでは数学的に処理できる命題とは言えない。しかしほとんどの文章はこのようなものである。その本質は変えないで、成り立つか否かが確定するようにするには

[14] 未完の教科書 [11] のこれより前の節で集合は数学のアルファベットであると言って少し集合の話がしてある。以下それを前提とした議論もあるが、ここで理解するのに支障がないと思うのでそのままにしておいた。

どうしたら良いだろうか？

全称命題と特称命題という概念を導入するのである。「リンゴは赤い」というとき、赤いリンゴがそうでないリンゴより多いとか、赤いりんごがリンゴの典型的なものであるとかいう意味であることが多い。しかし、「多い」というのも状況によって変わるかもしれないし、典型というのも人によって変わるかもしれない。青いリンゴしか生らない土地の人には「リンゴは赤い」という命題はとても奇異に感じられるだろう。すべての人に同じように納得してもらうために、主張を百歩譲って「赤いリンゴもある」ということだけにする。「あるリンゴは赤い」とか「赤いリンゴがある」とか言うとすれば、真偽がはっきりするだろう。もちろん、真である。このように「ある A は B である」という形なら命題に対する要請を満たす。これを特称命題と言う。

これに対して「すべてのリンゴは赤い」というのを全称命題と言うのである。明らかに、これは偽であるわけで、真偽が確定しているので命題と呼べるのである。

曖昧にみえる「A は B である」という文章を、「ある A は B である」という特称命題と、「すべての A は B である」という全称命題とに分けることにすれば、はっきりと真偽が判定出来るだろう。

問１。　命題の例を５つ挙げて、特称のときと全称のときに真偽がどうなるかを示せ。

ここでさらに、一般の命題でも扱える形に書き直してみよう。Q, R を一つの変数を含む命題で、$Q(x) =$「x は A である」、$R(x) =$「x は B である」という形とする。このとき「A は B である」というのを「x が A であれば、x は B である」と言い換えてもよく、さらに「$Q(x)$ が真ならば、$R(x)$ は真である」と言い直せ、これを論理記号で $x(Q(x) \Longrightarrow R(x))$ と書くのである。

しかし、これだけでは、$P=$「A は B である」を命題と言うわけにはいかない。x という変数がどのように振る舞うかの指定が必要で、それを指定するのが全称、特称ということである。

特称命題「ある A は B である」=「B である A が存在する」を $\exists a(Q(a) \Longrightarrow R(a))$ と書き、全称命題「すべての A は B である」を $\forall a(Q(a) \Longrightarrow R(a))$ と書く。

しかし全称か特称かを一々言うのが面倒だと思う人も多く、何も言わず「A は B である」と言えば全称命題のことで、特称命題の時だけそのことを断るという使い方が日常的には多いようである[15]。

集合 $M = \{a|Q(a)\}$ を考えれば、上の論理式はそれぞれ $\exists a \in M$ $(R(a))$、$\forall a \in M(R(a))$ と書いても良い。($\exists$ を存在作用素と言い、$\forall$ を全称作用素と言う。)

さらに集合 $N = \{a|R(a)\}$ を考えれば、上の論理式は集合算で表わすことが出来る。特称命題 $\exists a \in M(R(a))$ は $M \cap N \neq \emptyset$ を表わしており、非存在 ($\emptyset$) の否定として存在 ($\neq \emptyset$) を表わしている。また全称命題 $\forall a \in M(R(a))$ は包含関係 $M \subset N$ を表わしており、「Q ならば R である ($Q \Longrightarrow R$)」という含意を言い換えたものと言える。

以下、基本命題から複雑な命題を得ていく過程を考えよう。

[15] しかしこれははっきりとした取り決めになっているわけではなく、聞いている人に全称のことだと思わせておいて実は特称だったというレトリックを使う人達がいる。全称・特称の勘違いに気持ちを向けておいて、肝心の主張に疑問を感じさせないようにし受け入れさせてしまうのである。テレビで種々の討論を聴く機会が増えたが、全称・特称に気をつけて聞いているだけでも、色々なことが見えてくる。

変数を含んでいない命題「A は B である」も変数を含む命題を使って仮言命題[16] の形に表わすことが出来たので、命題は常に変数を含んでいると考えてもよい。命題 $P(x)$ が変数 x を含んでいるとは、命題 P は x を何か特定したとき真か偽かが確定しているということである。

集合 $M_P = \{x|P(x)\}$ は命題 $P(x)$ が真である元を集めた集合であるが、言い換えれば命題 P が成り立つ範囲であるとも言える。そうすれば幾つかの命題 $P, Q, R, \cdots$ に対して、対応する集合の集合算に対応する命題が考えられるだろう。

$M = M_P, N = M_Q, L = M_R$ とすると、和集合 $M \cup N$ に対しては論理和 $P \vee Q$(P または Q) が対応し、共通部分 $M \cap N$ に対しては論理積 $P \wedge Q$(P かつ Q) が対応している。含意（$P \Longrightarrow Q$(P ならば Q)）も、包含関係 $M \subset N$ に対応していた。古典的な三段論法

$$(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R) \Longrightarrow (P \Longrightarrow Q)$$

も包含関係の推移律

$$M \subset N \text{ かつ } N \subset L \text{ ならば } M \subset L$$

に対応しているのである。[17]

問２。　正しい三段論法の例を５通り以上、誤った推論の例を５通り以上挙げよ。

補集合 M^c に対応する命題は $P(x)$ の否定命題 $\neg P(x)$ であるが、これが考えだすとなかなかに難しい。「x はリンゴである」の否定命題は「x はリンゴでない」である。これには問題はないようだ。しかし、「x は大きい」の否定命題となると、「x は小さい」とするべきか「x は大きくない」とするべきか、現実的には迷うところである。数学としては、命題の真偽が確定していないといけないので、「x は大きくない」に統一することにする。つまり、命題 $P(x)$ の否定命題 $\neg P(x)$ は、$P(x)$ が真のとき偽で、偽のとき真であるような命題のこととするのである。

このように定義するのであるから、複合命題 $P(x) \vee \neg P(x)$ は常に真で、$P(x) \wedge \neg P(x)$ は常に偽である。

当然のようなこの結論のことを排中律と言う。真と偽の間の中間を認めないということである。しかし、排中律はすべての論理学者・数学者が認めているという訳ではない。勿論、多くの数学者は排中律の上に立って仕事をしているのであり、排中律を認めないという数学者に出会ったことはないのだけれど。

ともかく、排中律自体は証明できる性質のものではなく、論理の運用のための要請としておかれたものである。従って、排中律を認める、つまり、白でも黒でもない「灰色」を認めないという立場で論理を運用しているのである。しかし現実的にはそうでない場合に出会うことも多い訳で、数学が机上の空論と見られかねない根拠もここにあるのである。

現在では数学も灰色を認める、つまり排中律を認めない論理学も作られており、特に人間の脳に関する議論には有効なようであるが、だからと言って、その論理に従うことを主

---

[16] 「Q ならば R である」という命題のこと。Q であることのなかに R であることが含まれているという意味で「含意」という言葉を用いるが、変数 x を意識して、仮に x が Q であるとすれば x が R であることが言えるという意味で使う。

[17] 真であることが確定している命題から新しく真である命題を作る方法は古典的にはこの三段論法しかない。詭弁の発達した古代ギリシャ時代には、これに似て非なる論法が横行したようで、４つの格の $(2^3)^3 = 8^3 = 256 \times 2$ 通りの三段論法に分類され、そのうち正しいものは 24 通りにすぎない。格は前提の各仮言命題の前後の入れ替えで得られ、他のものは全称特称の別、肯定否定の別によるものである。

張することによって、排中律の基盤の上に建っている全理論科学を捨て去ることが出来る訳ではない。

問３。　排中律を肯定する立場と否定する立場に分かれてディベートを行え。一人の場合には、それぞれの立場の論拠を２つ以上考えた上で、自分の立場を決めよ。

問３の結果がどうであれ、本書では排中律が成り立っているものとしている。

問４。（ラッセルの集合の幽霊）すべての集合の全体がそれ自身集合だったとする。これを $\mathcal{S}$ と書くと、$M = \{A \in \mathcal{S} | A \notin A\} \subset \mathcal{S}$ は集合である（$M \in \mathcal{S}$）この時、M はその存在それ自身が矛盾である、つまり集合の幽霊であることを示せ。[18] 。
[Hint] $M \in M \Longrightarrow M \notin M$, $M \notin M \Longrightarrow M \in M$.

変数を含む命題 $P(x)$ は x によって真であったり偽であったりする。x が集合 $A = M_P$ に属すとき真で、属さないとき偽であった。そこで、$A = M_P$ の元 x を考えているとき、命題 $P(x)$ の 真理値 は T(true) であり、$x \in A^c$ に対しては $P(x)$ の真理値は F(false) であるということにする。
基本命題 $P, Q, R, \cdots$ の真理値が分かっているとき、複合命題 $\neg P, P \vee Q, P \wedge Q, P \Longrightarrow Q$ などの真理値が分かるだろうか？
それは対応する集合の集合算を見てやれば分かるのである。例えば、$P \wedge Q$ は P と Q の真理値が共に T のときだけ T となるのである。しかし、含意 $P \Longrightarrow Q$ は $A \subset B (= M_Q)$ となるだけで真理値が分からないような気がするかもしれない。
$A \subset B$ をもう少し考えて見よう。A の元は必ず B の元であることであった[19] 。これを言い換えると、A の元であるにも係らず B の元でないという元はない、更には A の元であって B^c の元でもあるものはないということになり、$A \cap B^c = \emptyset$ という式で表現される。ベン図を描けばこれが $A \subset B$ と同じことであるのはすぐに分かるだろう。補集合を取れば、$A^c \cup B = \Omega$ [20] となる。$A^c \cup B$ に対応する命題は $\neg P \vee Q$ となり、これを含意 $P \Longrightarrow Q$ の定義とすることにするのである。
P, Q（つまり A, B）の係り方次第で、(P, Q がたとえ真でも偽でも) 仮言命題 $P \Longrightarrow Q$ は命題として（常に）真であることが有り得るのである。むしろ仮言命題こそが常に真でありうるのだということが言える。
例えば次のような例を考えてみる。

「明日天気なら、遠足に行く」

と学校の掲示板に告示があったとする。明日天気なら、確かに遠足に行くのであってこれは問題がない。しかし明日天気でなかったらどうなるのだろうか？雨をおして遠足に行っ

[18] $\mathcal{S}$ を集合としたから矛盾が出たのだが、そのとき $\mathcal{S} \in \mathcal{S} \setminus M$ であり、普通の集合はみな M に属している。$\mathcal{S}$ 自身が幽霊と言うのではなく、普通に扱わねばならない集合を全て集めてきたら M という矛盾を孕んだものが生まれたことに、このパラドックスの深刻さがある。排中律の副産物とも言える。
[19] ここ以前の、集合を扱っている節で、包含関係の意味について説明している。
[20] これも集合の節で議論していることだが、Ω は宇宙 (Universe) という名前の集合である。つまり、ラッセルのパラドクスがあるため、集合全体の集合を考えることが出来ず、そのとき考察している対象すべてを含む集合を Ω と呼び、考察の対象をこの集合の元に限るのである。もちろんこの集合を意識しないでも済む多くの場合には、省略することになっている。
ある意味では、考察する対象のすべてが集合をなすように自己規制していることになる。数学者にとっても、宇宙 Ω を特定することが一番難しいということも有り得る。

たとしても、雨だから遠足が中止になったとしても掲示の文章が間違っていたとは誰も思わないだろう。$P =$「明日天気である」、$Q =$「明日遠足に行く」として $P \Longrightarrow Q$ であるという掲示そのものは、無責任と言われるかもしれないが、間違ってはいなかったことになる。明日天気であっても遠足に行かないということだけはないと言っているのである[21] 。

仮言命題 $P \Longrightarrow Q$ の命題の位置を逆にした命題 $Q \Longrightarrow P$ を 逆 といい、各命題を否定にしたもの $\neg P \Longrightarrow \neg Q$ を 裏 と言い、否定にして順序を逆にしたもの $\neg Q \Longrightarrow \neg P$ を 対偶 と言う。

これらに対しても真理値がどうなるか、真理表† を挙げておこう。

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$\neg P \Rightarrow \neg Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
T	T	F	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	F	F	T	T	T	T

問題５。 i)*) 上の真理表で、各命題に対応する集合を求め、集合算における結果と表の値が一致することを示せ。

ii) 表の各値を実現するような命題の例を作れ。

基本命題を $\forall, \exists, \neg, \vee, \wedge$ だけで結合した複合命題だけを考えることにする[22] 。

真理表を見ると対偶の真理値と元の含意の真理値は一致しており、このことを「対偶は真」と言っているのである。

含意 $P \Longrightarrow Q$ をその定義 $\neg P \vee Q$ で表すのと同じ様に対偶 $\neg Q \Longrightarrow \neg P$ を書き換えれば、$\neg(\neg Q) \vee \neg P = Q \vee \neg P = \neg P \vee Q$ であって、元の含意と全く同じ命題であることが分かる。

含意についてもう少し注意しておこう。$P =$「$Q \Longrightarrow R$」とし、Q が真理値としてＦしか取らないなら、つまり $Q(x)$ が真であるような x が存在しなかったならどうなるのだろうか？真理表によれば R の真理値がどうであれ、含意 P は真であるということになる。このことを仮言命題「$Q \Longrightarrow R$」は、無内容的に成り立つ と言うのである。

対応する集合で考えて見よう。$A = M_Q, B = M_R$ とおくとき、$A \subset B$ となるわけだが、Q がＦしか真理値を取らないということは $A = \emptyset$ ということであり、どんな集合 B に対しても $\emptyset \subset B$ が成り立つということである。

このように論理だけで分かりにくいときは、対応する集合の言葉で言い換えると分かりやすくなることがある。

まだ言っておくべきこともあるが、これでも十分長くなった。パズルを一つ挙げて、この節を終えることにしよう。

問題６。 昔ある男が病気の母のために、万病に効く霊芝を取りに山に行った。山には

[21] 雨が降るのを天気でないこととしている。降ったり止んだりしていたらどうなるのはいう疑問はもっともではあるが、この際問題にしていることではない。天気であるということの判定が微妙で命題とは言いがたいという反論には抵抗する気も起こらない。不満な読者はもっとはっきりした例を自分で作って欲しい。例えば、「ソクラテスが日本人なら、ジンギス汗は源義経だ」、というのは如何でしょう。

[22] 複合命題についてもう少し述べる必要がある。例えば、$\neg(\neg P) = P,\ P \vee Q = Q \vee P,\ \neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$ などの規則を与えるなど。しかし、本書の程度ではこれ位にして置いたほうがよいだろう。

双子の子鬼がいて、霊芝を守っていた。何が霊芝かを知っているのは子鬼だけである。霊芝に良く似た毒キノコもあって、霊芝の乱獲を防いでいる。兄の子鬼は正直もので嘘をつかないが、弟はいたずらもので嘘しか言わない。しかも、人間の言葉を話すのが苦手で、「うん」か「いや」しか言えないし、一言喋ると人前から隠れてしまう。

男はやっと一人の子鬼を見つけ、霊芝らしいキノコも２種類見つけた。男はどちらのキノコが霊芝かを、たった一つの質問をして、子鬼から訊き出した。男の母親は救われた。

さて、男はどんな質問をしたのだろう？

[Hint]　例えば、「お前は正直ものか?」と訊いても、返ってくる答えは「うん」に決まっていて、兄弟どちらか分からない。

****

[数学教育史コラム]†　真理表はどこへ行った

(「小学校教師の」と銘打ったので、各節に関係する教育史的コラムを入れるつもりであるが、人に頼むのか自分たちでやるのか決心がついていない。)

7　第５回 TOSM ポストの質問

古くから問題にされており、それなりの回答もいろんな角度からなされている問題が多く、来年度の会誌の原稿の締切までゆっくりと考える、というか放って置くつもりの質問には回答をしていない。半年も放っておくといろんな立場のどれをとるのかという覚悟が出来てくる。

しかし、こうして公開する資料に載せるとなると、一言ずつはコメントを付けないといけないという強迫観念にとらわれてしまう。会誌に書くときはこの１００倍平均の回答をするので、期待して欲しい。

7.1　アキレスと亀

「アキレスと亀の話はどうなっているのでしょうか？解決されたという話も聞きますし、解決されていないという話も聞きます。どちらが本当でしょう？」

質問者：上垣　渉 (三重大学教育学部)

コメント　これは「無限」と、「無限の質」の問題。１９世紀末に集合論が確立されたとき、数学的には解決されたといって良い。しかし、カントールの無限を手づかみにするその精神が、人類にとって受け入れられるものか否かという哲学的な懐疑が、それ以降連綿と続いている。ほとんど哲学の領域。哲学を宥めるために、数学基礎論という数学の分野もあって、その間を埋めているのだが、面倒なことの嫌いな（僕を含めた）数学の大衆からは異端視されている、というのは言い過ぎかもしれない。

7.2　$0.99999\ldots = 1$ の問題

「$0.99999\ldots = 1$ が分からない。$0.1111111\ldots = \frac{1}{9}$ で $0.9999999\ldots = \frac{9}{9} = 1$ というのが納得できない。

$x = 0.11111\ldots$ とおくと、$10x = 1.111111111\ldots$ で、これを引いて $10x - x = 9x = 1$ だから $x = 1/9$ という証明は、何だかおかしい。

例えば $0.111111111111\ldots$ が、100 桁だったとしたら、$10x - x$ の計算で 100 桁目に 1 が残るような気がする。」

このように言う中学生がいますが、どのように教えたら良いのでしょうか。

質問者：山田　健一 (三重大学付属中学校)

掲示板上の回答（Full の回答は来年度の三重県高数研の会誌に）

この問題は多くの場所で語られ、それなりに解決法が語られているが、本質的には中学生はこの問題に正しく取り組むだけ成熟していない（勿論、特別な生徒はいるので、その場合は別）ということに尽きる。従って、その種の議論ではいかに誤魔化すかという論点で語られることが多い。

数学的には、無限と向かい合えるかということであり、無限を実体として認識できるかということである。従って、ことは極めて難しいことなのである。中学生向けの説明が色々考案されているが、手品のような技術で誤魔化すべきではないと思っている。

実際に現場で生徒に説明を示してみて、どんな説明が受け入れられやすいか、経験をこの掲示板に書き込んでいただきたいと思う。

とは言うものの、山田氏に答えないで済ますわけにもいかない。とりあえず、まともに答えてみよう。（詳しくはまた別のところで）

答え方は 2 種類の方向があると思う。

一つは勿論、「例えば $x = 0.111111111\ldots$ が、100 桁だったとしたら」、という仮定が間違っているということを納得させること。100 などではなく無限に続いているのだということを、いろんな形で納得させる。しかし、これが一番難しい。無限に続いてしかもそれがただ一つの数を表すということを納得させなければならない。それでも、これが正しい方法なのである。

もう一つはいわば裏から攻める方法。つまり「100 桁だとしたら、$10x - x$ は 100 桁目に 1 が残る気がする」という生徒の主張を全面的に肯定するのである。そして、x が 100 桁だとしたら x は $\frac{1}{3}$ とは違うが、その違い方は小数点以下 100 桁でしかないことを納得させる。1000 桁だとしたら、x と $\frac{1}{3}$ との差は $\frac{1}{10^{1000}}$ であり、$0.111111\ldots$ がどれだけ続いても有限の所で止まれば、x は $\frac{1}{3}$ ではありえない。しかし桁数が増えていけばどんどん $\frac{1}{3}$ に近づいていく。だから、$\frac{1}{3}$ を小数で表そうとすれば無限に続く $0.11111\ldots$ と表す以外に方法はないことを納得させる。

数学は一つなのだから、突き詰めてみれば皆同じことなのだが、教育技術的には、生徒の心の中の障壁を如何に回避するかが問題だということである。

7.3 数学という教科について

「 数学なんて、なんの役に立つかわからないという質問をよくされます。数学の理論はいろいろなことに使われているから、大切なんだと言うことにしているのですが、そうすると、そういう仕事につく人だけ勉強すればよいといった返事が返ってきます。形式陶冶の面を言うのもなんだかなあ … と思っているので、何かよい理由があれば教えてください。」

質問者：松井　真治 (福井県立盲学校)

コメント　実に答えにくい質問である。問題はこうした質問をする児童・生徒が本当に「数学を学ぶ」わけを訊ねているかどうかが分からないという点にある。

教育を受けること全体に対して、学校に行くことに対して、この社会に生きさせられていることに対して、彼らの憤りと不満の槍玉に、勉強しないと成績の上がらない数学がなっているのに過ぎないことが多い。

そんな時、数学の美や有効性を説いても、逆効果であることが多い。こうした質問は相手を見て答える必要があるし、そうすることが現場の教師の役割なのである。

こうした質問に一律に答えることは出来ない、答えてはいけないのだというのが、一言で答える場合の回答になる。

半年、答えることを待って貰うことにしたい。生きていれば、答えることにする。

7.4　角度の定義

「ベクトルの内積の定義の仕方に、二つのベクトルのなす角を用いる方法と、成分を用いる方法があるが、２次元、３次元では二つのベクトルのなす角が分かるが（？）、４次元以上ではなす角が分からない（？）から、成分を用いて内積が定義され、その内積を用いて、二つのベクトルのなす角を定義することになる。

そこで、一般に角度をどのように定義するかを教えてください。」

質問者：丸林　哲也 (三重県立津西高等学校)

コメント 一言で言えば、ベクトルのなす角と、内積を用いて定義される角とは別のものであるということになる。実は「幾何的直感と対称性」という論文の中で、立体角の意味を論じたとき、角の問題を論じておくつもりになっていた。しかし、とても長くなりそうで、すでに８０ページを越えていた論文の中では、書く元気が湧いてこなかった。今度は是非。

7.5　小町算について

「小町算というのがあるそうですが、どんな本に載っていますか？」

質問者：家戸　昇一 (名張で学習塾経営)

掲示板上の回答

こういう質問の形が困るんですね。質問のポイントが分かりにくいのです。もっとストレートに質問して下さって結構です。

このままだと、「小町算」とは何かは知っているけれど、もっと詳しい文献が知りたいという意味にもとれるし、「小町算」が何か分からないが、それの説明を求めるのが失礼とか悪いのじゃないかと思って文献だけ訊ねているのかもしれません。もしかすると、「小町算」という言葉の由来が知りたいのかも知れません。

ですから、質問は出来るだけはっきりとした形でしていただきたいのです。しかし、はっきりした形で質問が出来るときには、疑問の多くは解消していることが多いということもありますので、曖昧な形の質問をしないようにとは言わないことにします。どんどん質問してください。

家戸さんという方は、何年か前、僕の一般教育の文科系向けの数学の講義を何度か聴講しに来られていました。好奇心旺盛で、熱心な塾の先生です。知人である彼に怒られ役になって貰いましたが、許してくださると思います。

さて、「小町算」ですが、初耳でした。西洋数学の伝統下にあって、和算が成し遂げたものの多くは忘れられています。数学の研究の点からは振り返ってみても余り労に値しないと思われますが、算数・数学教育の示唆を与えるという点ではもっと省みられても良いのではないでしょうか。

「小町算」はFour Fours(４つの４)と同様の、謂わば数字の語呂合わせの遊びのようです。数字を使って遊んでいるうち、数の世界に親しんで貰えば、それなりの教育効果が上がるというわけです。

Four Foursは、数字の４を４つ並べて、その間に四則の演算と括弧を好きな形で挟み込んで、いろんな値を得ようとするパズルです。

小町算は、１、２、３、４、５、６、７、８、９、１０をこの順に並べてその間に四則の演算と括弧を好きな形で挟み込んで、得られた式の値が１００になるように出来るか？という問題です。

１から１０というのも、当時漢字文化圏では１０進記数法がなかったので、漢字一字で表記できる最長の連として、一、二、三、四、五、六、七、八、九、十が選ばれ、次に一字で表現できる「百」にするという遊びが考案されたのでしょう。

逆順の、十、九、八、七、六、五、四、三、二、一に対して行う小町算もあります。

小町算という理由は、解法を語呂合わせで、和歌に読み込んだものが伝えられていて、歌詠みの代表としての小野小町の名前をとったということのようです。

最も簡単な答えをいくつか、Mathematicaの練習として求めてみました。

$$\begin{aligned}
1\times2+3\times4+5+6+7\times8+9+10 &= 100\\
1\times2\times3+4-5+6+7+8\times9+10 &= 100\\
-1+2\times3+4+5+6+7+8\times9-10 &= 100\\
1\times2\times3\times4\times5+6\times7-8\times9+10 &= 100\\
(1-2-3+4)\times5\times6-(7-8-9)\times10 &= 100
\end{aligned}$$

比較的容易に手に入る文献としては、平山諦著「増補新版　東西数学物語」恒星社、がある。この文献に載っていることは、上垣渉氏に教わった。

同著によれば、1から10ではなく、1から9までの数で作るのが本来の小町算らしい。そして、数の間に記号を挟まないことも許すものらしい。例えば、23とすれば二十三のこととするわけだ。代表的な小町算の文献、中根彦循著「勘者御伽双紙」に挙げられている20例では、記号は＋－しか使わず、むしろ演算記号の少なさを誇ってもいるようだ。

＋、－、×、÷を使って、正順150例、逆順198例を作ったと平山氏は述べている。

小野小町に振られた深草の少将が、することもない夜長の徒然に、和を99にする小町算を考えたという由来を述べた本もあったが、その出典は明らかでない。99はまた、全てが満たされ得た数という意味を付けることも出来るためでもあろう。

小町算は更に一般化され、答えが99や100でなくても良く、またどんな順序でもよいという条件のものも小町算と言われている。

小町算は古くから、計算遊戯として親しまれてきたようであるが、数学的な意味はあまりなく、和算の有名な入門書「塵劫記」にも採られていない。しかし、四則演算の技術を習得させようとする初年度の教育において、計算そのものに、付加価値を与えるものとして活用することは可能であると思われます。

7.6　タレスの方法について

「タレスはピラミッドの高さをその影を測って求めたということを聞きましたが、ピラミッド本体が邪魔になって、影のどの部分を測れば良いのか分かりません。実際にはどのようにしたのでしょうか？

「数学の話題から」という講義の中で、影を測ってピラミッドの高さを求めたという話をしたら、あまり簡単に学生が納得したので、僕がへそを曲げて、学生に本当にそんなに簡単に納得できるのか？と訊いたというのが趣旨。

数学史の本を見れば書いてあるのだろうが、それとはかかわりなく自分の頭で考えてみたらどうなるのか、というのが、学生に対する質問。」

質問者：蟹江　幸博

コメント　これは本質的には水平面をどう決定するかという問題。それに気付けば、あとは方法を考えるだけ。

8　文献表

参考文献

[1] 秋山武太郎 「新版　幾何学つれづれ草」サイエンス社 (1993)

[2] 岩田至康編 「幾何学大辞典 1 基本定理と問題ー平面ー」槙書店 (1971)

[3] 蟹江幸博 「幾何的直観と対称性」プレプリント

[4] 蟹江幸博 「数について（美杉セミナー ’９１）」’92 年度数学研究会誌 36 号、三重県高等数学教育研究会 (1992),3-41.

[5] 蟹江幸博 「TOSM ポスト」’93 年度数学研究会誌 37 号、三重県高等数学教育研究会 (1993),2-44.

[6] 蟹江幸博 「数学を語るのか、数学で語るのか（美杉セミナー ’93)」’94 年度数学研究会誌 38 号、三重県高等数学教育研究会 (1994)

[7] 蟹江幸博 「数学的知識の欠如に関する自己認識の調査」三重大学教育学部紀要、第 45 巻、教育科学 (1993),1-13.

[8] 蟹江幸博、黒木哲徳、中馬悟朗 「数学教育における教師の授業観と意識に関する調査研究」岐阜大学教育学部研究報告 (自然科学)、第 18-2 巻 (1993),75-97

[9] 蟹江幸博「算数綴り方教室の試み」三重大学教育学部紀要、第 46 巻、教育科学 (1994),41-49.

[10] 蟹江幸博 「三角定規の組み合わせ図形の考察」三重大学教育学部紀要、第 46 巻、教育科学 (1994),41-49.

[11] 蟹江幸博、黒木哲徳、中馬悟朗 「小学校教師の数学的常識（仮題）」（未完）.

[12] イアン・スチュアート 「スチュアート教授のおもしろ数学入門」(山崎秀記・坂井公・田中裕一訳) 日経サイエンス社 (1993) Another Fine Math You’ve Get Me Into . . . by Ian Stuwart(1992)

[13] アンドレ・ヴェイユ「アンドレ・ヴェイユ自伝 ある数学者の修業時代」(稲葉延子訳) シュプリンガー・フェアラーク東京 (1994) Souvenirs d’apprentissage by André Weil(1991)