証明すべきことはつぎのこと．

任意の正数 $a_1,\dots,a_n$，$p_1,\dots,p_n$（$\sum_{i=1}^n p_i=1$）に対して

$$a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_n^{p_n} \quad \leqq \quad p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n$$

が成り立つ．

$n=2$ のときは，$0<a<b$ と $0<p<1$ に対して，$a^pb^{1-p}\leqq pa+(1-p)b$ であるとしてよい．これは両辺の対数をとれば

$$\log a^pb^{1-p}=p\log a+(1-p)\log b\leqq \log(pa+(1-p)b)$$

となって，これは対数関数 $\log x$ が $x>0$ で上に凸であることにほかならない．微分法を知っていれば

$$\frac{d^2\log x}{dx^2}=\frac{d}{dx}\frac{1}{x}=-\frac{1}{x^2}<0 \quad (x>0)$$

からすぐに分かる．

一般の場合は，数学的帰納法を使う．$n$ の場合に成り立つとして，$p_i'=p_i/q$ $(q=1-p_1)$ とおくと，$\sum_{i=2}^{n+1}p_i'=\sum_{i=2}^{n+1}p_i/q=(1-p_1)/q=q/q=1$ だから，帰納法の仮定を使って，

$$\begin{aligned}
&p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n+p_{n+1}a_{n+1}\\
&=p_1a_1+q\left(p_2'a_2+\cdots+p_n'a_n+p_{n+1}'a_{n+1}\right)\\
&\geqq p_1a_1+qa_2^{p_2'}\cdots a_{n+1}^{p_{n+1}'}\geqq a_1^{p_1}(a_2^{p_2'}\cdots a_{n+1}^{p_{n+1}'})^q\\
&=a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_{n+1}^{p_{n+1}}
\end{aligned}$$

がわかる．$n=2$ の場合も下から 2 行目の不等式で使った．